NAZ. CENTR.
201
41 D
24
R. BIBLIOTECA VITT. EMAN. II
ROMA

Digitized by Google

201. 48. G. 24

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ SEX.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

113

Digitized by Google

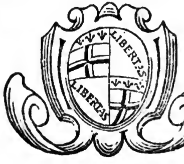
EXERCITATIONES GEOMETRICÆ SEX.

I. De priori methodo Indiuiſibilium.
II. De poſteriori methodo Indiuiſibilium.
III. In Paulum Guldinum è Societate Ieſu dicta Indiuiſibilia oppugnantem.
IV. De vſu eorumdem Ind. in Poteſtatibus Coſsicis.
V. De vſu dictorum Ind. in vnif. diffor. grauibus.
VI. De quibuſdam Propoſitionibus miſcellaneis, quarum ſynopſim verſa pagina oſtendit.

Auctore F. Bonauentura Caualerio Mediolanenſi Ordinis Ieſuatorum S. Hieronymi Priore, & in Almo Bononienſi Archigymnaſio primario Mathematicarum Profeſſore.

AD ILLVSTRISSIMOS, ET SAPIENTISS.
SENATVS BONONIENSIS
QVINQVAGINTA VIROS.

Bibliotecæ Coll. Soc. Secretæ Rom. Jesu



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

BONONIÆ, Typis Iacobi Montij. 1647. *Superiorum permiſſu.*

Google

SYNOPSIS.

Præfatæ Exercitationis Sextæ, quæ ſine Indiuiſibilibus procedit.

De modo facili deſcribendi Sectiones Conicas, & in omnibus vniformi. pag. 445
De mirabili quadam vi parabolica. pag. 451
De Perſpicillorum focis. pag. 458
De deſcriptione Parabolæ per quatuor data Puncta in angulis quadrilateri, cuius duo ſaltem oppoſita latera ſint extra concurrentia. pag. 496
De inueniendo puncto, quod à tribus datis quibuſuis diſtet ſecundum minimam quantitatem. pag. 504
De inueniendis lateribus trianguli æquicruris ex data area, & perimetro eiuſdẽ. pag. 511
De ratione primæ regulæ Problematis tertij meæ Centuriæ. pag. 519
De magnitudinum incommenſurabilitate. pag. 526
De motu puncti in circulo. pag. 528
De foco Speculi ſpherici concaui. pag. 532
De ſolido infinite longo æquali finito. pag. 536
De Hydracontiſterio, hoc eſt Vaſe aquarum eiaculatorio. pag. 537

Digitized by Google

ILLVSTRISSIMI.
ET SAPIENTISSIMI
DOMINI.

SApientiam tanquam Hominis procreatricem nobiliſſimam prudentiſſimi quamplures, interquos eſt Cicero 7. de finibus, agnouerunt viri, ac venerati ſunt, illa nanque meliori luto præcordia fingens, vno Ioue minores efficere nouit, quos literis inſigniori-bus ſatos eſſe eadem probauit; haud equi-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

dem fallar ego ſi dixerim, quod ipſamet *victrix fortunæ prima docens rectum SAPIENTIA plurima felix*, vt canebat ille, feliciſſimæ Vrbis Felſineæ veſtræ (Senatores ſapientiſſimi) Solo, & Cœlo multis iam ab ſæculis deſponſata fuerit; fœcundiſſimum enim Bononienſe Cœlum Studiorum Parens admirabile docet in æternitatem, & viros profundiſſimæ doctrinæ innumeros profudit ſemper. Quid ni igitur ego, vitali hac aura octodecim ab hinc annis perfruens, illuſtri Profeſſionis primariæ Mathematicarum apud Vos auctus titulo, Sapientiæ ipſius qualis qualis filius & alumnus non dicar, & habear? cum itaq; me non diuitem ſapientiæ habeam ſed à diuite ſapientia adiutum ſperem, omnia me etiam vobis debere veriſſima confeſſione prędicabo, grati vndè animi ſigna in publicum prodire ſæpe ſæpius geſtiunt. Diſcurſiuam rerum cognitionem ex præcognitorum vì, & efficatia firmitatem, & certitudinem adipiſci docebat Ariſtoteles; quam veritatem in me ipſo comperi abunde exemplificatam, dum veſtræ benignitatis, & liberalitatis præexiſtentia, & præcognitio illam mihi tribuit efficа-

fica-

ſicatiam,atq; illud animi robur eſt impartita, vt his Exercitationibus lucubrandis, ſcribendis, atq; cudendis, alioquin debillimus, ſuffecerim.

Omnia deficiũt, animus tamen omnia vincit,
Ille etiam vires corpus habere facit.

quemadmodum canebat Ouidius. O' munera, ò ſapientiæ nunquam effætam Gloriam! non poſſum propterea iſthæc omnia mente, manuq; non verſare diurna, nocturnaq; ſimul, & vt loquar cum Poeta Sulmonenſe non Poeticè *Semper in oblita repetam quæ munera mente.* His ergò Exercitationibus Mathematicis ſpiritus, quos potui eruditiores à vobis mihi præſtitos, atq; conceſſos in aciem deduxi, in campumq; & arenam docti certaminis pro veritatis defenſione euocaui, & has vobis dicandas, & vouendas iure meritò duxi, quia iacentes artes omnes liberales erigendi, atq; ſublimandi ea polletis auctoritate, vt irrita quoque fieri conſpiciantur in dies quot quot orbem ipſum doctrinarum ſupplantare iactant aduerſantia machinamenta; quò ſpectat illud aureum verè Socratis effatum, in bello ſcilicet auro ferrum præſtare, at in ciuili vita pri-

Digitized by Google

primas tenere eruditionem ? iure ergò perquam optimo vobis, Italicarum, immò totius orbis præcipuarum Athenarum Patres, hæ debētur Exercitationes, qui in perpetua Exercitatione ornandi, & adaugendi doctrinas omnes, & doctrinarum veros Aſſeclas feliciter eſtis. Feliciſſimi diutiſſimè viuite.

Bononiæ die 7. Nouemb. Anni 1647.

DD. VV. Illuſtriſs.

Deditiſs. & Deuinctiſs. Cliens

F. Bonauentura Caualerius.

Digitized by Google

Lectori Beneuolo.

NOn vna quidem, ſed plures, & haud ineſficaces impulere me cauſæ ad has Exercitationes Mathematicas, et meditãdas, & publici iuris faciendas, amice Lector, nec me abſterruit, aut à propoſito auertere potuit, quod in hoc ſæculo ingeniorum valdè ſublimiũ feraci impoſſibile ferè videatur quidquam noui in medium proferre, vndè vlterioribus auſibus locum præripuiſſe tot opera nobiliſſima, & Aritmetica, Aſtronomica, & Geometrica noſtris hiſce temporibus Mercurij, aut Iouis ipſius, vel celſioris Aſtri Calamo dictata, cenſeri poſsint; alacri animo arctiſſimam hanc triui ſemitam, quæ ad virtutis cliuum ducit Non datur ad Muſas currere lata via *canebat ille, quia ſcientiã, non ſolum ſcientia preſtãtiorem eſſe, ſed & modum exponẽdi ſcientiã aliquam modo alio eandem exponendi ſcientiam præferri didici ex Philoſophorum principe Ariſtotele; difficilem quidem prouinciam agnoui, ſed pulchram, & ideò iucundam, & exoptabilem* Non iuuat ex facili lecta corona iugo *Canebat Prop. l. 4. eleg.*

eleg. Rethorica ne dicam Sophiſtica pigmenta artifitioſè nimis vſurpata veritati faciem ità perlinire poſsunt, & immutare, vt aniles propoſitiones ſpeciem viraginum ementiantur, & tãquam ſolida ſcientificarum concluſionum fundamenta à mediocribus ingenijs accipi, & haberi poſsint; erit quidem nouum, & ſimul vtiliſsimum inuentum veritatis faciem nudare, perſonam illi detrahere, & velamenta argumentorum apparentium reuelare, quibus coloribus inſuſsiſtentibus cognitis, atq. perſpectis intellectuum lumina illuſtrabuntur, & perficientur egregiè; adde quod ex docta æmulatione virtus augeſcit, & in exactam venit cognitionem, ex qua Gloria conſurgit Immenſum Gloria calcar habet *appoſitè vates ille: Glorioſam ſanè exiſtimaui fore cum præclariſsimo, & doctiſsimo Guldino diſſertationem, vt meam Indiuiſibilium tuerer doctrinam, & oſtenderem obiecta rationum pigmenta, eſſe acutiſsimi quidem, & nobiliſsimi ingenij inuenta, ſed neutiquam talia, quæ meæ Indiuiſibilium Geometriæ rè ipſa quicquam officiant, & hæc fuit cauſarum, quas innui ſuperius, potiſsima, propterquam calamum arripui ad oſtendendum præcipuè meas Geometriæ Indiuiſibilium à me*

iam

iam pridem editas, aſſertiones à veritate nuſquã aberraſſe, ſed eidem veritati Indiuiſibiliter iũctas fuiſſe, quod ſi praſtitero, vt ſpero, opera pretium in reliquis etiam feciſſe arbitrabor. Vna etenim virtus repulſæ neſcia ſordidę Hęc manet, hæc auidos effugit vna rogos. *Sic lyrici, & Sulmonenſis carmina monent. Alia accedit cauſa huiuſce mea ſcriptionis, & apud me non exigui momenti, quod meum docendi è primo ſubſellio Mathematicas diſciplinas in hoc Bononienſi Archigymnaſio munus alicuius fructuoſi profectus in ijſdem facultatibus maturationem promouebat; literaria ſtudioſorum militia teſſeram expetebat; & Minerualis tãdem Res publica ſatiſdationem quandam pro doctrina prolata tutela, & Indemnitate contrà, non modò ingenioſa obiecta, ſed cõtra ipſius otij deſtructoris vires occultas imperauit quodamodo; altius enim animo meo inſedit vtiliſſima, & aurea illa Amaſis antiqui Aegyptij Regis lex ad omnes trãsferenda hominũ ordines, & atates proportionabiliter, qua quilibet propria rationem vita anteacta certo tempore reddere cogebatur; hanc moralem mihi neceſſitatem hac euulgandi ſcripta ſcientiarũ, & pulcherrima veritatis amor, otijq; & inſcitia turpiſ-*

ſima

Digitized by Google

ſima inexpiabile itidem odium imperarunt. In his habebis ſcriptis (candide Lector) meam non minus candidam inte fidem, & iuuandi contentionem, quã multa ſcitu digna, & vtilia, vt reor, quorum te Iudicem æquiſsimũ, ſed nonniſi tota, vt aiunt, lege perſpecta, appello; in prima ſpeciatim harum ſex Exercitationum ſyncera offeretur tibi intentio mea, ambitionis, & peruicatiæ vitio carens, & boni, veriq; ſolum appetens. In ſecunda earundem tractandarum materierum exponetur ſeries, & Indiuiſibilium dilucidabitur vtilitas, in qua aſſentiẽs Indiuiſibilibus omnes demõſtrationes præterire poteris, quæ sũt à pag. 116. vſq; ad pag 174. in tertia Clariſsimi Antagoniſtæ laudes recenſentur, quibus vlla in re ex reſponſionibus afferendis detrahendum eſſe ſolemnis ſit proteſtatio. In Quarta extenditur Indiuiſibilium admiranda vtilitas in omnibus coſsicis poteſtatibus. In quinta noua traditur ſpeculatio circa difformes grauitates ponderandas. In ſexta demum variorum problematum elucidatio pro iucundo quodam Par ergo ab Indiuiſibilium doctrina nimis ſeuera diuiſibili eſt adiecta. In hoc ego volebam ante mearum Exercitationum lectionem te eſſe exercitatum. Vale.

EXER-

Digitized by Google

EXERCITATIO PRIMA.

In qua Prioris Methodi Indiuiſibilium fundamenta enucleantur.

PRODIIT in lucem ferè decem ab hinc annis mea Geometria, nouis ſuperſtructa ſundamẽtis, & in Lib. 7. diſtributa cui propterea titulũ feci. Geometria Indiuiſibilibus continuorũ noua quadã ratione promota, &c. Eandẽ tamen hic, breuitatis cauſa, Geometriã Indiuiſibiliũ appellabimus. Quoniã verò nulla amplius inueniũtur penes Bibliopolas exẽplaria, propterea nunc aliqualiter & huic defectui ſupplere volui, & ijs pariter ſatisfacere, qui vel dicta carent Geometria, vel habentes, totam videre faſtidiunt, cum tamen horum Indiuiſibilium ſaltem vſum cupiant intelligere. Hoc in præſenti, ac ſubſequenti Exercitatione præſtare contendi, ijs tantum è dicta Geometria deſumptis, quæ magis ad Lectoris inſtructionem circa dictum vſum opportuna viſa ſunt; adiectis & Notis per numeros digeſtis, quibus huc ex eadem translata, nonnihil maioris claritatis aquirant. Acceſſit & ratio, quod cum Guldinus in ſua Centrobaryca contra dictæ Geometriæ fundamenta quaſdam dubitationes in me-

dium attulerit (quarum erit in tertia Exercitatione diſcuſſio) oportuit prius diſputationis ſubiectum Lectorem edoceri, vt eiuſdem ſatis capax, legitimam ſubinde ferre poſſit ſententiam, an aliquid hinc Geometris ſit ſperandum vtilitatis, vel tamquam pſeudogeometricum nouum hoc demonſtrandi genus ſit prorſus reijciendum. Certè ſi fructum Indiuiſibilium ope hucuſque collectum, præcipuè (vt meorum inuentorum in ſupradicta Geometria tenuitatem ſilentio prætercam) induſtria, ac ſolertia præſtantis, & acerrimi Geometræ, ac Ser. Etruriæ, Magni Ducis Mathematici Euangeliſtæ Torricellij attentè conſideremus, illa non omnino videbuntur negligenda. Iam enim toti Reipublicæ Literariæ ſatis conſtat in illius Operibus Geometricis, quam faciliter difficillimorum Problematum ſolutionem per hæc obtinuerit. Vtpotè in multiplici per ipſa quoque Indiuiſibilia quadrandæ Parabolæ ratione: in dimenſione ſpatij cycloidalis, quæ per hæc adeò peruia facta eſt, vt Problema viſum plerisq; Geometris ſummæ difficultatis, facillimum euaſerit. Quinimmò & corpus (quod ipſe vocat, Solidum acutum hyperbolicum) infinitæ longitudinis, Geometriæ inſolens, ſed tamen admirabile, vt & Cochleam, per Indiuiſibilia tamen curua (quibus & ipſe huiuſce methodi fines mirè ampliauit) menſuræ ſubiecit. Vt verò magis hæc vtilitas eluceſcat, ijs, quæ in dicta Geometria à me inuenta ſunt, nonnulla quoq; adijciam poſt Exercitationem tertiam, vt hæc omnia, benigne Lector, tuo ſubijciantur iudicio. Nunc autem ſequuntur Notæ in Librum ſecundum dictæ Geometriæ, vt illius doctrina, in qua præcipuè conſiſtit prior methodus Indiuiſibilium, captu facilior euadat.

In

Digitized by Google

I.

IN Noua Geometria Indiuiſibilium adhibentur ipſamet Continui Indiuiſibilia tamquam præcipuum inſtrumentum ad figurarum tam planarum, quam ſolidarum menſuram comparandam.

II.

Ad hanc autem duplicem viā inſtituimus. Priorem quidem exhibent ſex priores dictæ Geometriæ Libri (etſi primus contineat potius communem vtrique viæ Lemmaticam doctrinam, dum ſimilium figurarum, cylindricorum, & conicorum, quos explicant definitio 3. 4. 10. *&* 11. *paſſiones præcipuè conſiderat) poſteriorem verò continet Liber ſeptimus. Vtramq; igitur non incongruè methodum Indiuiſibilium appellabimus, nempè illam priorem, poſteriorem alteram.*

III.

In vtraq; methodo ad menſuram planarum figurarum adhibentur lineæ rectæ vni cuidam ſignatæ lineæ (quæ earum dicitur regula) parallelæ, in ipſis figuris numero indefinitæ mente deſcriptibiles, ac deſinentes ad duas illas, quæ ex oppoſito tangunt eaſdem figuras, dicunturq; in B. def. pr. Libri primi, earum oppoſitæ tangentes. quarum altera tanquam cæterarum parallelarum regula ſumi conſueuit. Ad menſuram verò ſolidarum adhibentur plana vni cuidam ſignato plano (quod eorum dicitur regula) æquidiſtantia, in ipſis ſolidis numero indefinita mēte deſcriptibilia, ac deſinentia ad duo illa plana, quæ ex oppoſito tangunt ipſa ſolida, dicunturq; in B. def. 2. Lib. pr. eorum oppoſita tangentia plana, quorum alterum tanquam cæterorum æquidiſtantium planorum regula ſumi ſolet.

IV.

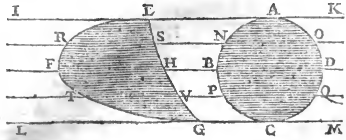
Hinc manifeſtum eſt figuras planas nobis ad inſtar telæ parallelis filis contextæ concipiendas eſſe: ſolida verò ad inſtar Librorum, qui parallelis folijs coaceruantur.

V.

Cum verò in tela ſint ſemper fila, & in libris ſemper folia numero finita, habet enim aliquam craſſitiem, nobis in figuris planis lineæ, in ſolidis verò plana numero indefinita, ceu omnis craſſitiei expertia, in vtraq; methodo ſupponenda ſunt. His tamen vtimur cum diſcrimine, nam in priori methodo illa conſideramus, vt collectiuè, in poſteriori vero, vt diſtributiuè comparata.

VI.

Sint enim ex. gr. duæ quæcunq; figuræ planæ, A B C D, E F G H, in ijſdem parallelis, I K, L M, conſtitutæ, earum autem altera, vt L M, ſumatur tanquam regula parallelarum in eiſdem figuris numero indefinito ducibilium, quarum aliquæ in figura, A B C D, ſint, N O, B D, P Q, &c. & in figura, EFGH,



ipſæ; R S, F H, T V, &c. Nunc ergo dupliciter poſſumus comparare lineas figuræ, A B C D, ad lineas figuræ, E F G S, nempè vel collectiuè, hoc eſt comparando aggregatum ad aggregatum: vel diſtributiuè ſc. comparando ſingillatim quamlibet rectam figuræ, A B C D, cuilibet rectæ figuræ, E F G S, ſibi in directum exiſtenti. Iuxta priorem rationem procedit prior methodus, comparat enim ad inuicem aggregata omnium linearum planarum figurarum, & aggregata omnium planorum ſolidorum, quotcumque illa ſint. At iuxta poſteriorem ſe habet poſterior methodus, comparat enim ſingulas lineas ſingulis lineis, & ſingula plana ſingulis planis, ijſdem in directum conſtitutis. Vtraque autem tradit ſuam regulam generalem ad figurarum menſuram comparandam; quarum prior talem profert. Si in

VII.

Si in duabus quibuſcunq; figuris planis, etiam non in eadem altitudine exiſtentibus, omnes lineæ vnius figuræ, cuidã ſignatæ regulæ parallelæ mente deſcriptibiles, & collectiuè ſumptæ, fuerint æquales omnibus lineis alterius figuræ, cuicunque ſignatæ regulæ parallelis, mente deſcriptibilibus, & collectiuè ſumptis; etiam ipſæ figuræ erunt æquales: & è contra. Vt in ſchemate nu. 5, ſi ſint æquales, R S, N O, vt &, F H, B D, necnon, T V, P Q, & reliquæ, &c. collectiuè ſumptæ; etiã ipſæ figuræ ABCD, E F G H, erunt æquales. Immò vniuerſaliter quamcumq; rationem habuerint omnes lineæ ad omnes lineas, eandem habebunt, & ipſæ plana figuræ. Similiter in ſolidis, ſi omnia plana vnius fuerint æqualia omnibus planis alterius, ſumptis iiſdem quibuſcunq; regulis, etiam ipſa ſolida erut æqualia: & ſi omnia plana habuerint quãcunq; rationem inter ſe, eandem habebunt & ipſa ſolida: & è contra. Vt in eodem Schemate nu. 5. ſi A B C D, E F G H, ſupponantur figuræ ſolidæ, & fuerint æqualia plana, RS, N O; F H, B D; T V, P Q, & reliqua &c. etiam ipſæ figuræ, ABCD, EFGH, erunt equales: vel quamcunq; illa collectiuè ſumpta, habuerint rationem, eandem & ipſæ figuræ ſolidæ retinebunt.

VIII.

Poſterior methodus paulò ſtrictiorem affert, & eſt huiuſmodi. Si in duabus quibuſcunq; figuris planis in iiſdem parallelis conſtitutis, quarum altera ſit regula, ſingulæ lineæ cum ſingulis lineis in directum exiſtentibus, communiq; regulæ parallelis, collatæ, fuerint æquales; etiam ipſæ figuræ erunt æquales. Immo vniuerſaliter quamcunq; rationem communiter habuerint dictæ lineæ ſingillatim ſumptæ, eandem habebunt & ipſæ figuræ. Sic in ſolidis ſi plana vnius communi regulæ æquidiſtantia fuerint æqualia planis alterius eidem regulæ æquidiſtantibus, etiam ipſa ſolida erunt æqualia: & quamcunq; rationem communiter illa habuerint inter ſe, eandem habebunt & ipſa ſolida, quæ tamen ſupponimus eſſe in iiſdem oppoſitis tangentibus planis, quorum alterum ſit eorum communis regula.

IX.

Ex his duabus vnica regula generaliſſima conſtrui poteſt, quæ erit totius dictæ Geometriæ compendium, nempè huiuſmodi.

FIGV-

FIGVRAE TAM PLANAE, QVAM SOLIDAE, SVNT IN RATIONE OMNIVM SVORVM INDIVISIBILIVM COLLECTIVE, ET (ſi in iiſdem reperiatur vna quædam communis ratio) DISTRIBVTIVE AD INVICEM COMPARATORVM.

X.

Ex his manifeſtum fit ad indagandam rationem, & menſurã, duarum datarum figurarum, tam planarum, quam ſolidarum, iuxta priorem methodum expendendam eſſe rationem, quam habent aggregata omnium Indiuiſibilium in ijs mente deſcriptibilium iuxta datam regulam. Secũdum poſteriorem verò quærendum eſſe an in ſingulis Indiuiſibilibus in directum conſtitutis, ſiue ſint lineæ rectæ, ſiuè plana, reperiatur quædam communis ratio. Etenim eandem habebunt & ipſæ figuræ.

XI.

Vt verò Lector de ſupradictorũ congruentia, præcedentiumq; regularum generalium, ſeu dictæ regulæ generaliſſimæ veritate, certus fiat, afferemus hic ea quæ in dictis 7. Libris deſcripta ad explicationem, & confirmationem vtriuſq; methodi facere videbuntur, cæteris prætermiſſis. Prius autem exponentur in hac Exercitatione Prima, quæ pertinent ad enucleandam priorem methodum, & hæc ſuppeditabit eiuſdem Geometriæ Liber 2. Poſterius verò in Exercitatione 2. afferemus, quæ ſpectant ad methodum poſteriorem, quorum præcipuam partem è Lib. 7. deſumemus. Sequuntur ergo Definitiones, & Poſtulata eiuſdem Libri ſecundi.

DEFINITIONES.

I.

SI per oppoſitas tangentes cuiuſcunq; datæ planæ figuræ ducantur duo plana inuicem parallela, recta ſiue inclinata ad planum datę figurę, hinc inde indefinitè producta; quorum Poſt Secũ. lib. 1. alterũ moueatur verſus reliquum eidem ſemper æquidiſtans donec illi congruerit: ſingulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes ſectiones plani moti, & datæ

datæ figuræ, ſimul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, ſumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana ſunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam ſunt inclinata vocentur. Omnes lineæ eiuſdem obliqui tranſitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; libeat tamen, cum expediet, etiam prædictas vocare, recti tranſitus, ſicuti has, obliqui tranſitus, eius nempè, qui fit in tali æquidiſtantium planorum ad datam figuram inclinatione. E Defin. Sec.l.1.

COROLLARIVM.

HInc patet, quoniam oppoſitæ tangentes regula quacunq; in data figura duci poſſunt, etiam omnes lineas datæ figuræ regula quacunque recta linea propoſita haberi poſſe, tum recti, tum etiam eiuſdem obliqui tranſitus. Coro. Pri. l.1.

II.

SI, propoſito quocunq; ſolido, eiuſdem oppoſita plana tangentia regula quacunq; ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorū alterum verſus reliquum moueatur ſemper eidem æquidiſtans, donec illi congruerit; ſingula plana, quæ in toto motu concipiuntur in propoſito ſolido, ſimul collecta, vocētur: Omnia plana propoſiti ſolidi, ſumpta regula eorundem vno. Coro. Pri. l.1. Poſt Sec. l.1. E Defin. l.1.

COROLLARIVM.

HInc etiam diſcimus, veluti propoſiti ſolidi oppoſita tangentia plana quacunq; regula duci poſſunt, ita eiuſdem omnia plana regula quocunq; plano haberi poſse. Coro. Pr. l.1.

III.

SI oppoſitis tangentibus planis occurrant interius duæ rectæ lineæ, vna perpendiculariter, reliqua obliquè; puncta, quæ ſunt communes ſectiones propoſitæ lineæ perpendiculariter incidentis, & ſingulorum planorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana (ita tamen producta, vt eaſdem ſecare poſſint) ſiue puncta, quæ ſunt communes ſectiones eiuſdem, & moti plani, fiuntq; in toto motu, ſimul collecta vocentur: Omnia puncta recti tranſitus propoſitæ lineæ perpendiculariter incidentis; quæ in obliquè incidente vocentur, eiuſdem obliqui tranſitus.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIVM.

EX hoc habetur ſingula puncta recti tranſitus, vel obliqui, incidentis lineæ, nedum eſſe communes ſectiones illius, & ſingulorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana propoſiti ſolidi, ſed etiam, ſi per talem incidentem extendatur planum, eſse communes ſectiones illius, & ſingularum quæ collectæ dicuntur: Omnes lineæ planæ figuræ, cuius oppoſitę tangentes ſunt communes ſectiones plani eiuſdem figuræ, & oppoſitorum tangentium dicti ſolidi: nam motum planum deſignat in plano ſecante rectam lineam, & inſimul punctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea, & ideò idem punctum eſt communis ſectio tum moti plani, & rectę incidentis, tum vnius earum, quæ dicuntur omnes lineæ datæ figuræ planæ (ita tamen productæ, vt hanc incidentem ſecare poſſint) & eiuſdem incidentis.

IV.

SI inter alterum extremorum punctorum propoſitę rectę lineæ, & ſingula puncta, quæ ſimul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus eiuſdem, ſumamus interiacentes lineas, dicantur iſtæ ſimul collectæ: Omnes abſciſsæ propoſitæ lineæ, quas (etiam ſi non exprimatur) vocari ſupponemus recti tranſitus, ſi puncta ſint recti tranſitus, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi puncta ſint eiuſdem obliqui tranſitus.

V.

REctæ lineæ verò in antecedentis definitionis propoſita linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicentur: Reſiduæ omnium abſciſsarum propoſitæ lineæ recti tranſitus, ſi puncta ſint recti tranſitus, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi ſumpta puncta ſint eiuſdem obliqui transitus.

COROLLARIVM.

HInc liquet cuilibet abſciſsæ in proximis definitionibus propoſitæ lineæ reſpondere vnam ex reſiduis, ita vt tot ſint illæ, quæ dicuntur reſiduæ omnium abſciſsarum propoſitæ lineæ, quot illæ, quæ dicuntur eiuſdem omnes

abſciſsæ,

Digitized by Google

abſciſſæ, ſiue recti, ſiue eiuſdem obliqui tranſitus, nam reſiduæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ interiacent inter reliquum extremum eiuſdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum, interiacent omnes abſciſſæ.

VI.

SI pro qualibet earum, quæ dicuntur omnes abſciſſæ propoſitæ rectæ lineæ, ipſa propoſita linea, ſiue eidem æqualis, ſemel aſſumpta intelligatur, iſtæ, ſimul collectæ dicentur: Maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, vel ſubintelligentur ſemper eſſe omnium, etiam ſi dicerentur ſolummodò: Maximæ abſciſſarum.

COROLLARIVM.

ET quia omnes abſciſſæ tot ſunt, quot omnes reſiduæ, maximè verò omnium abſciſſarum tot ſunt, quot omnes abſciſſæ, nam cuilibet abſciſſæ reſpondet vna maximarum, ideò maximæ omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ tot erunt, quot etiam reſiduæ omnium abſciſſarum, quotcunq; ſint omnes abſciſsæ, vel reſiduæ; ideſt pro qualibet reſidua habemimus quoq; vnam maximarum; ijs ſemper recti, vel eiuſdem obliqui tranſitus aſſumptis.

VII.

SI cuilibet omnium abſciſſarum propoſitæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta linea cuidam æqualis, compoſitæ ex omnibus abſciſſis, & adiunctis, ſimul collectę dicentur: Omnes abſciſſæ propoſitæ lineæ adiuncta tali, nempè adiuncta illa, cui, quæ adiunguntur, ſunt æquales: ſi verò fieret hęc adiunctio reſiduis, vel maximis omnium abſciſſarum, pariter dicerentur: Reſiduæ, vel Maximæ omnium abſciſſarum adiuncta eadem; recti ſemper, vel eiuſdem obliqui tranſitus.

A

A. VIII.

PRopoſita quacunque plana figura, & in ea ducta vtcunq; recta linea vſq; ad ambitum hinc inde terminata, ſi ipſa recta linea deſcribere quamcunq; figuram planam intelligatur, non exiſtentem in plano propoſitæ figuræ, ac deinde reliquę earum, quæ dicuntur omnes lineæ propoſitæ figuræ, ſumptę regula iam ducta linea (& recti tranſitus ſi deſcriptæfigura ſit erecta plano propoſitæ, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi illi ſit inclinata, eius nempè tranſitus, qui ſit in tali inclinatione) deſcribere intelligantur figuras planas ſimiles, ac ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes primò deſcriptę, ita vt omnes deſcribentes ſint deſcriptarum figurārum lineæ, vel latera homologa; omnes deſcriptæ figurę ſimul ſumptę dicentur: Omnes figurę planę ſimiles talis propoſitæ figuræ, ſumptę regulá earum vna, vel regula etiam ipſa linea, vel latere deſcribente; vt ſi deſcriptę figurę eſſent quadrata, hæ dicerentur. Omnia quadrata talis propoſitę figurę, vel ſi eſſent triangula æquilatera dicerentur. Omnia triangula ęquilatera eiuſdem.

B

B.

Solidum, cuius omnes deſcriptæ figurę ſimiles ſunt omnia plana, dicetur: Solidum ſimilare genitum ex propoſita figura iuxta eandem regulam, iuxta quam ſumptę omnes dictę figuræ ſimiles fuerũt. Quę igitur ex figuris propoſitis, vt ſic generantur, dicentur abſq; alio addito: Solida ſimilaria genita ex propoſitis figuris iuxta regulas omnium ſimilium figurarum, quæ ipſorum euadunt omnia plana, propoſitæ autem figuræ, eorundem genitrices figuræ vocabũtur.

C

C.

Cum verò duarum genitricium vtcunq; figurarum omnes deſcriptę figurę nedum ſimiles erunt, quæ reperientur in earum vnaquaque, ſed etiam quæ ſunt vnius, inuenientur ſimiles omnibus figuris ſimilibus alterius propoſitæ figuræ, fuerint autem in vtroque ſolido figuræ æquè eleuatæ ſuper plana genitricium figurarum, tunc ſolida genita ex propoſitis figuris iuxta regulas eas, quæ ſunt regulę omniũ ſimilium figurarum earundem propoſitarum genitricium figurarũ, dicentur ſolida inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria

genita

genita ex dictis figuris iuxta dictas regulas, vel intelligentur ſemper eſse inter ſe, ſeu ad inuicem ſimilaria, licet hoc non exprimatur, quotieſcunque contrarium aliquid non adijciatur.

D.

Cum autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine exiſtentes, rectangula ſub ſingulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ vnius propoſitarum figurarum, & illis in directum reſpondentibus in alia figura ſimul ſumpta ſic vocabimus, nempè Rectangula ſub eiſdem figuris, regula eadem, quæ eſt omnium ſumptarum linearum regula. D

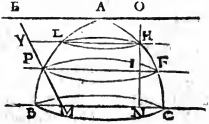
E.

Cum verò propoſitarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius baſis, iuxta quam altitudo ſumitur, ſit ſumpta pro regula, dicta rectangula vocabuntur etiam: Omnia rectangula reliquæ figuræ, æquè alta ac eorum vnum. E

APPENDIX.

Pro antecedentium Definitionum explicatione.

SIt figura plana quæcunque, ABC, duę eiuſdem oppoſitæ tangentes vtcunque ductæ, EO, BC, intelligantur autem per, EO, BC, indefinitè extenſa duo plana inuicem parallela, quorum quod tranſit per, EO, ex. g. moueatur verſus planum per, BC, ſemper illi æquidiſtans, donec illi congruat, igitur communes ſectiones talis motiſ, ſiue fluentis plani, & figuræ, ABC, quæ in toto motu fiunt, ſimul collectæ à me vocantur: Omnes lineæ figurę, ABC, quarum aliquæ ſint ipſæ, LH, PF, BC, ſumptæ regula earum vna, vt BC, recti trāſitus, cū plana parallela rectè ſecāt figurā, A B C, eiuſdem obliqui tranſitus, cum illam obliquè ſecāt, eius ſcilicet tranſitus, qui in tali inclinatione fit. Coro. P 1. 1. Defin. 1. huius.



Intelligamus nunc ABC, eſſe ſolidū, cuius

Digitized by Google

duo oppoſita plana tangentia ſint, quæ tranſeunt per, EO, BC, moueatur autem adhuc planum per, E O, extenſum, verſus planum per, BC, ſemper illi ęquidiſtans, igitur huius plani moti, ſiue fluētis conceptæ in ſolido, ABC, figurę, quę in toto motu fieri intelliguntur, voco: Omnia plana ſolidi, ABC, ſumpta regula eorum vno, quorum aliqua repræſentare poſſunt plana, LH, PF, BC.

Definit. 2. huius.

Vlterius duæ rectę lineę, ON, EM, occurrant planis per, E O, B C, tranſeuntibus iam dictis in punctis, O, N, E, M, quarum, ON, perpendiculariter, EM, verò obliquè illis incidat, puncta igitur, quæ ſunt communes ſectiones omnium planorum ſolidi, ABC, productorum, ſi opus ſit, & rectæ, ON, vocantur ipſius omnia puncta recti tranſitus, quarum aliqua ſunt puncta, H, I, N, quæ inter ipſa, & extremum punctum, O, continentur, vt ipſę, OH, OI, ON, dicuntur abſciſſæ, quæ inter eadem puncta, & aliud extremum, quod eſt, N, continentur, vt ipſæ, NI, NH, NO, reſiduę omnium abſciſſarũ; tot æquales ipſi, ON, quot ſunt omnes abſciſſę, ſiue reſiduę omnium abſciſſarum, ON, dicuntur maximę abſciſſarum, ſiue omnium abſciſſarum, ON, quibus ſi adiungatur aliqua recta linea, dicuntur abſciſſæ, reſiduæ, ſiue maximæ adiuncta tali linea, omnes quidem recti tranſitus in recta, ON, in, EM, verò dicuntur eiuſdem obliqui trãſitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

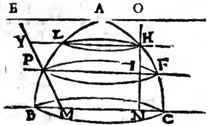
Def. Tert. huius. Def. Qua huius. Def. Qui. huius. Def. Sept. huius.

Dicitur autem in Coroll. Defin. 3. eadem puncta recti tranſitus, ſiue obliqui, fieri tum ab omnibus planis propoſiti ſolidi, vt, ABC, tum ab omnibus lineis plani per eaſdem incidentes extenſi, vt ex. g. plani, quod tranſit per, EO, BC, quod quidem etiam tranſeat per ipſas, ON, EM, idem. n. planum, quod in ſolidum, ABC, producit figuram, LH, in figura plana, ABC, producit rectam, LH, & in recta, ON, punctum, H, in, EM, verò punctum Y, quod tranſit, H L, producta, & ideò dico puncta, HY, poſſe dici etiam effecta à recta, YH, & ſic omnia puncta recti transitus, quæ nempè ſunt in, ON, nedum fieri à dictis planis parallelis, ſed etiam à lineis parallelis figuræ, ABC, productis si opus ſit, idem intellige in recta, EM, cuius omnia puncta dicuntur eiuſdem obliqui transitus, eius nempè, qui in tali inclinatione fit.

Pro

Digitized by Google

Pro intelligentia Defin. 8. ſupponatur in figura plana propoſita, ABC, vtcunq; recta, BC, quæ deſcribat figuram planam, BC, eleuatam ſuper, ABC, ſingulæ autem lineæ, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, ABC, ſumptæ regula, BC, recti tranſitus, ſi figura, BC, ſit erecta figuræ, ABC, vel eiuſdem obliqui tranſitus (qui nempè in inclinatione deſcriptæ figuræ ad planū, ABC, fit, ſi figura, BC, ſit inclinata ad figuram, ABC,) deſcribere intelligantur figuras planas ſimiles, ſimiliter poſitas, & æquidiſtantes ipſi figuræ, BC, ita vt deſcribentes ſint deſcriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa, quarum figurarum aliquæ ſint ipſæ, BC, PF, LH, iſtæ igitur omnes ſimul ſumptæ vocantur, omnes figuræ ſimiles ipſius figuræ, ABC, ſumptæ regula figura, BC, vel linea, aut latere, BC. D. Defin. 10. l. 1. A. Def. 8. huius.

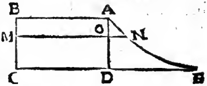


Solidum, cuius omnes dictæ figuræ ſimiles ipſius, ABC, ſunt omnia plana, dicitur, ſolidum ſimilare genitum ex figura plana, ABC, iuxta regulam ipſam figuram, vel lineam, BC, & ipſa figura, ABC, appellatur genitrix eiuſdem ſolidi, quod eſſe intelligatur ipſum, ABC. B. Def. 8. huius.

Si verò adſit alia figura plana, cuius omnes lineę, quadā regula ſumptæ, deſcribant ſimiles figuras planas, & ſimiliter poſitas, omnes vni cuidam æquidiſtātes, & ſimiles figuræ, BC, & æquè eleuatas ſuper plana genetricium figurarū, ſolida ſimilaria genita ex iſtis figuris, iuxta dictas regulas vocabuntur vlterius inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria, licet cum dicemus, ſolida ſimilaria genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam ſine alio addito, intelligemus ſemper ea eſſe inter ſe, vel ad inuicem ſimilaria, etiam ſi non exprimatur, hoc autem niſi aliter explicetur. C. Def. 8. huius.

Pro declarandis D. & E. Defin. 8. exponantur duæ figurę in eodem plano, & in eadem altitudine, quæ ſint BCDA, ADE, ſit autem altitudo figurę, ABCD, ſumpta reſpectu ipſius rectę, CD, & altitudo figuræ, ADE, reſpectu ipſius, DE,

rectę,CD,& altitudo figurę,ADE, reſpectu ipſius,DE,quę intelligantur abſcindere ex eadem parte à communi altitudine partes ęquales, quę ſibi in directum erunt, ſint verò ambę communis regula omnium linearũ dictarum figurarum, & ſit ducta alia vtcunq; eidem, CE, parallela, MN, cuius



portio manens in figura, BD, ſit, MO, & manens in figura, ADC, ſit, ON; rectangula igitur, CDE, MON, & reliqua Definit. 1. huius. rectangula, quę ſub qualibet earum, quę dicuntur omnes lineę figurę,BD, (regula, CE, vel, CD,) & illi in directum poſita in figura, ADE, continentur (erit autem ſemper aliqua eidem in directum, pręterquam fortè illi, quę tangit figurã,vt,BA, poteſt.n. in figura, ADE, illi vice lineę vnum punctum tantum reſpondere, vt, A, hoc tamen rectãgulum non computatur, quia nihil illis adiungit, erit inquam hęc linearum reſpondentia in figura, ADE, eis, quę ſumuntur in, B D, nam ſunt in eadem altitudine ſumpta reſpectu earundem linearum, ſub quibus rectãgula continentur) ſimul D. Def. 8. huius. ſumpta vocamus: Rectangula ſub figuris, BCDA, ADE.

Si verò contigeret alteram earundem figurarum eſſe parallelogrammum, & regulam omnium eiuſdem linearũ eſſe vnum eiuſdem laterum, vt, CD, reſpectu cuius ſumitur altitudo,tunc quia illę,quę æquidiſtant ipſi,CD,in parallelogrammo,BD,ſunt eidem, CD,ęquales,& ſunt latera dictorum rectangulorum, ideò dico, nos ea vocare poſſe nedum rectangula ſub his figuris; ſed etiam ſic appellare, nempè: Omnia rectangula figuræ, ADE, (quæ non eſt neceſſariò parallelogrammum)ęquè alta,ac vnum eorum.i. ac rectangulum, CDE, altitudinis ſcilicet æqualis ipſi, CD, prout libuerit autem nominentur.

POSTVLATA. I.

Def. 1. & 2. huius. Congruentium planarum figurarum omnes lineæ,ſumptæ vna earundem, vt regula communi, ſunt congruentes; Et congruentium ſolidorum omnia plana ſum-

pta

pta eorum vno, vt regula communi, ſunt pariter congruentia.

II.

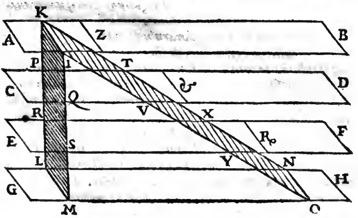
Omnes figurę ſimiles alicuius figurę planę ſunt omnia plana ſolidi, quod terminatur ſuperficie, in qua iacent perimetri omnium dictarum ſimilium figurarum. A. Def. 8. huius.

X I I.

Vt verificari poſſet regula generaliſsima ſuperius tradita numero 9. æquum erat omnem procul à ſubiecto noſtro varietatem arcere, quæ in ipſo recognoſcendo poſſemus in hac priori methodo hallucinari. Hoc eſt congruū erat aggregata omnium Indiuiſibilium figurarum, quæ inuicem ſunt comparandæ (ijs enim vtimur tanquam ſubiecto) ſub quadam vniformi ratione, ſeu ſub quodam determinato ſpiſſitudinis, aut conſtipationis gradu, quicunq; ille ſit, ſemper accipere. Quemadmodum enim duo fruſta æqualia, vt duo quadrata, decerpta vnum ex tela ſpiſſiori, alterum vero ex rariori, nō haberent aggregata ex ſuis filis æqualia, ſed neceſſe eſſet vtraq; abſciſſa eſſe ex tela eiuſdē gradus raritatis, vel ſpiſſitudinis in ſuis filis, vt in vtriſq; aggregata quoq; ex filis eſſent æqualia. Ita ſuo modo res ſupponi debet circa ipſarum figurarum Indiuiſibilia, ne in comparatione aggregatorum eorundem poſsimus hallucinari.

XIII.

Vt verò intelligat Studioſus, qua ratione prædictam vnifor-



mita-

mitatem in aggregatis dictorum Indiuiſibilium & agnoſcere, & retinere poſſit videat præſens Schema. In hoc enim inter duo oppoſita plana parallela, AB, GH, interijciuntur duo parallelogramma, KLMI, KNOI, quorum, KLMI, eiſdem AB, GH, incidit perpendiculariter, KNOI, verò obliquè. Supponatur ergo iuxta primam definitionem planum, AB, moueri verſus, GH, ſemper illi tanquam regulæ æquidiſtans, donec eidem congruerit: illud enim fluens, quolibet momento diſsignabit rectas, vt in kLMI, ipſas, PQ, RS &c. & in, kNOI, ipſas, TV, XY &c. inuicē parallelas. Igitur tam deſsignabit omnes lineas, kLMI, quam omnes lineas figuræ, KNOI, quæ erunt æquales prædictis, vnaquæq; enim æquatur ſibi in eodem plano reſpondenti in figura, KLMI. Verum omnes lineæ figuræ, kLMI, oriuntur ex ſectione rectæ, ſeu perpendiculari, aut tranſitu recto, plani, AB, fluentis: & omnes lineæ figuræ, kNOI, oriuntur ex ſectione obliqua, ſeu tranſitu obliquo eiuſdem, AB fluentis cum, kLMI, figura poſita fuerit recta, &, KNOI, obliqua planis, AB, GH. Ergo, KLMI, ſe habet ad inſtar telæ ſpiſſioris, &, kNOI, rarioris. Quapropter mirum non eſt omnes lineas, kNOI, iſtius obliqui transitus, æquari omnibus lineis ipsius, KLMI, recti transitus, & tamen ipſas figuras non adæquari, immo parallelogrã-mum KNOI, infinitè poteſt augeri, cum ipſum ſemper longius ac longius ſupponere poſſimus, manentibus ſemper omnibus eiuſdem lineis obliqui tranſitus, æqualibus omnibus lineis recti transitus ipsius, KLMI. Videns ergo hunc diuerſum tranſitũ dictæ regulæ generaliſsimæ veritatem perturbare, propterea dixi in def. prima, omnes lineas datarum planarum figurarum ſub eodem tranſitu accipiendas eſſe, hoc eſt, vel ſub recto, vel ſub eodem obliquo transitu, vt retineamus ſemper eundem in omnibus lineis ſpiſſitudinis, vel raritatis gradum, quicunq; ille ſit, & quacunq; neceſsitatis Geometricæ lege hæc Indiuisibilia conſtipentur.

XIIII.

Similem diuerſitatem ſubeunt & puncta in lineis, IM, IO, Schematis num. 13. deſsignata, quapropter illa recti tranſitus, hæc verò obliqui tranſitus in def. 3. appellaui. Eandem quoq; ſortiuntur abſciſſæ, residuæ, &c. vnde dicuntur & ipſæ recti transitus, vt, IQ, IS, IM, &c. & obliqui, ut IV, IY, IO, &c. quæ

quæ ſunt abſciſſæ ipſarum, IM, IO. Omnia plana verò non ſunt huic varietati obnoxia, ſupponuntur enim accipi in ſummo conſtipationis gradu, quem illis præbet neceſſitas Geometrica.

X V.

Nota ex dictis ſequi duas quaſcunq; lineas oblatæ figuræ, dictæ regulæ parallelas, debere æqualiter inter ſe diſtare, ac duæ illæ, quæ in altera figura, ad quam prædicta comparatur, eiſdem reſpondent in eiſdem planis parallelis illas efficientibus, quãdo illæ fiunt per eundem tranſitum. Vnde ſi non æqualiter inter ſe diſtarent ſignum eſſet non eſſe eiuſdem tranſitus, ſed ab ipſa definitione degenerare. Sic ergo in figura num. 13. apparet lineas parallelogrammi, KNOI, non eſſe eiuſdem tranſitus cum lineis parallelogrammi, KLMI, quia ex. gr. TV, XY, non æqualiter inter ſe diſtant, ac ſuæ correlatiuæ. PQ, RS, ab ijſdem parallelis planis deſsignatæ, vnde iuxta Def. primam nequeunt ad inuicem comparari. Per hoc autem ſoluitur quoddam argumentum contra hæc Indiuiſibilia, quod ſuo loco diſcutietur.

X V I.

Conſideratio omnium abſciſſarum propoſitæ lineæ, vt & reſiduarum, ac maximarum abſciſſarum, vel abſolutè, vel etiam adiunctæ tali, vel tali lineæ, quamuis opportuna, non tamen eſt ſimpliciter neceſſaria, vt infra declarabitur.

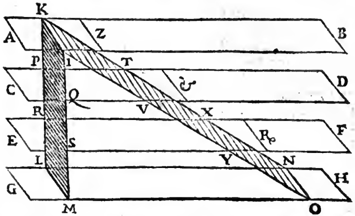
X V I I.

Duplex ratio geneſis aliquorum ſolidorum datur apud Geometras. Prior fit per reuolutionem figuræ planæ cuiuſcumque circa datum axem, donec redeat vnde diſceſſit; & ſic generantur apud Euclidem Libro vndecimo Elem. def. 14. 18. 21. Sphæra, Conus, ac Cylindrus, & in vniuerſum corpora, quæ vocantur rotunda. Poſterior geneſis fit per motum figuræ æquidiſtantem: vt ſi circulus ſui centro in ſublime feratur per rectam lineam, & ſemper ſit æquidiſtans cuidam datæ regulæ, fiet cylindrus. Similiter ex fluxu parallelogrammi orietur paralleleppipedum: & in vniuerſum ex fluxu cuiuſcunq; figuræ planæ orietur corpus, quod vocari ſolet columnare, & à me dicitur Cylindricus in def. 3. Lib. 1. ſequens ſimilitudinem ſuæ baſis genitricis. Cum

*verò hi duò modi non ultra corpora rotunda, & columnaria extendantur, vt & iſtorum, & aliorum puamplurium corporum ortus ſub vna quadam vniuerſali ratione comprehenderetur, alia eorundem geneſis ineunda ratio fuit, quam exhibent ſectiones Def.*8. *Extenditur autem hæc ad omnia illa corpora, in quibus traiectis quotcunq; planis data regulæ parallelis, oriuntur ex tali traiectione figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, quas rectè, vel obliquè ſecans, aut tangens alia figura, illa exhibeat omnes lineas, ſeu latera homologa dictarum ſimilium figurarum. Hæc autem vocatur genitrix ſolidi, cuius omnes dictæ figuræ ſimiles ſunt omnia plana, ipſumq; ſolidum dicitur ſolidum ſimilare, vt patet in ipſa Def.*8. *Hinc ſequitur è contra, ſi ſit propoſita quæcunque figura plana, tanquam genitrix alicuius ſolidi ſimilaris, cuius omnes lineæ recti, vel obliqui tranſitus, deſcribant ſimiles, ſimiliterq; poſitas figuras planas vni certæ regulæ parallelas, nos poſſe concipere ſolidum ſimulare, cuius prædictæ figuræ ſunt omnia plana, quodāmodo emanare, ſeu gigni ab eadem genitrice figura. Ab hac ergo ſi ſit parallelogrammum rectangulum, & regula figura ab vno laterum deſcripta parallelogrammoq; erecta, emanabit cylindricus rectus: vel ſi parallelogrammum non ſit rectāgulum; & figura rectè, vel obliquè ad genitricem deſcripta, orietur cylindricus ſcalenus: hoc eſt corpora columnaria recta, & ſcalena. Similiter à triangulis orientur corpora, quæ vocantur pyramidalia, & à me dicuntur Conici in def* 4. *Lib.*1. *Et ab alijs figuris aliæ corporum ſpecies naſcentur, vt à circulo Sphæra, ab Ellipſi Sphæroïs, à Parabola Conoides parabolicum, ab Hyperbola Conoides hyperbolicum; ſicuti ab alijs quoq; irregularibus figuris, innumerabiles orientur ſpecies ſolidorum irregularium. Ad horum autem maiorem intelligentiam recolatur Schema num.*13. *in quo eſt regula planum, GH, cui eſt erectum parallelogrammum, KLMI, & obliquum, KNOI. Nunc ſupponamus ab ipſis, KI, PQ, RS, LM, &c. omnibus lineis recti tranſitus, deſcribi quadrata KAI, PCQ, RES, LGM &c. & ab ipſis, KI, TV, XY, NO &c. omnibus lineis obliqui tranſitus deſcribi quadrata kZI, T&V, XRY, NHO &c. communi regulæ, GH, parallela. Hic ergo concipere poſſumus duo ſolida ſimilaria (licet non ad inuicem ſimilaria, quia figuræ genitrices, kLMI, kNOI, non æquè inclinantur ad ſimiles*

deſcri-

Digitized by Google



deſcriptas figuras, vt poſtulat Sectio. C. eiuſdem def.8.) vnum genitum à, kLMI, per deſcriptionem omnium eiuſdem figurarum, ſeu planorum recto tranſitu, ſiue à lineis recti tranſitus effectam, quod erit corpus columnare, ſeu cylindricus rectus, poſito, kM, eſſe parallelogrammum rectangulum. Alterum verò fiet à, kNOI, per deſcriptionem obliqui tranſitus, eritq; cylindricus Scalenus. Hac ergo ratione noſtram ſolidorum geneſim fieri intelligimus. Quæ circa definitiones attigiſſe ſufficiat, ſequuntur nunc Propoſitiones eiuſdem Libri Secundi.

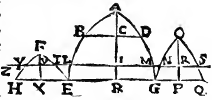
PROPOS. I.

QVarumlibet planarum figurarum omnes lineę recti tranſitus; & quarumlibet ſolidarum omnia plana, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes.

Sint duæ planæ vtcunque figuræ, EAG, GOQ, quarum regulæ, EG, GQ, vtcunque, ſit autem figuræ, EAG, altitudo ſumpta reſpectu, EG, ipſa, A℞, & figurę, GOQ, altitudo ſumpta reſpectu, GQ, ipſa, OP. Dico ergo omnes lineas recti tranſitus figurę, EAG, ſumptas cum regula, EG, ad omnes lineas recti tranſitus figurę, GOQ, ſumptas cum regula, GQ, rationem habere. Conſtituantur regulę, EG, GQ, ſibi in directum, & ſint totę figurę ſupra ipſas regulas

 in co-

in eodẽ plano, vel igitur altitudines, A℞, OP, ſunt ęquales, vel non, ſupponamus primò ipſas eſſe æquales, abſcindantur nũc ab altitudinibus, A℞, OP ex hypoteſi æqualibus, portiones, I℞, RP, æquales, verſus regulas, EG, GQ, ſi ergo per punctum, I, duxerimus regulę, EG, parallelam, LM, hæc producta tranſibit per punctum, R, fiet ergo, LM, quę clauditur perimetro figurę, EAG, vna ex ijs, quę dicuntur omnes lineę figurę, EAG, &, NS, clauſa perimetro figuræ, GOS, vna ex omnibus lineis figurę, GOQ, ſumptis omnibus lineis iam dictis, regula communi, EQ, & recti tranſitus, vti ſemper intelligemus, niſi aliter explicetur, etiamſi id non exprimatur. Quoniam igitur ſi recta, NS, ſit minor recta, LM, poteſt indefinitè producta aliquando fieri maior, ſi hoc intelligamus fieri de cęteris lineis, quę ab altitudinibus portiones abſcindunt ęquales verſus regulas, EG, GQ, patet quod ſingulæ, quę erunt in figura, GOQ, productæ fient maiores ijs, quæ erunt in figura, EAG, ſit autem ita facta productio cuiuſuis omnium linearum figurę, GOQ, regula, EQ, vt quę illi in directum conſtituitur in figura, EAG, ſit portio eiuſdẽ productę, vt ex. g. ita ſit producta, SN, verſus, ML, vt ipſam pertranſeat perueniens verbi gratia vſque ad, T, ita vt LM, ſit portio ipſius, TS, patet ergo, quod omnes lineæ figurę, EAG, erunt pars omnium linearum figurę, GOQ, ſic productarum, & iſtę erunt totum, nam illę iſtis claudentur, ſiue in his totę reperientur, & aliquid amplius. ſ. quod de omnibus lineis figurę, GOQ, ſic productis manet extra figuram, EAG: totum autem eſt maius ſua parte, ergo omnes lineę figurę, GOQ, ſic productæ fuerunt, vt maiores effectæ fuerint omnibus lineis figuræ, EAG. Eadem methodo omnes lineas figuræ, EAG, ſic producemus, vt complectantur omnes lineas figuræ, GOQ, iam productas, vt dictum eſt, & ideò maiores eiſdem fiant, magnitudines autem rationem habere inter ſe dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare



rare

Digitized by Google

tare poſſunt, ergo patet omnes lineas figurarum, EAG, GOQ, cum altitudines, A℞, OP, fuerint æquales, inter ſe rationem habere.

Non ſint autem ęquales, ſed altitudo, A℞, ſit maior altitudine, OP, & ab, A℞, ſit abſciſſa verſus, EG, ipſa, C℞, æqualis ipſi, OP, & per, C, ducta, BD, parallela, EG, intelligatur per, BD, à figura, EAG, abſciſſa figura, BAD, & ea conſtituta, vt, HFE, ità vt ſit in eodem plano ad eandē partem cum figuris, EBDG, (quæ remanſit) &, GOQ, exiſtente, HE, in directum ipſi, EQ, quod ſi adhuc altitudo, FX, ſit maior altitudine, OP, abſcindatur illi æqualis, & ſic ſemper fiat, & diſponantur figuræ reſiduæ, vt earum baſes ſint in directum ipſi, EQ, & figuræ conſtitutæ in eodem plano, & ad eandem partem cum figuris, EAG, GOQ, in altitudinibus vel æqualibus, vel non maioribus altitudine, OP. Intelligatur nunc ducta vtcunque in figura, GOQ, recta, NS, parallela, GQ, quæ erit vna ex omnibus lineis figura, GOQ, regula, GQ, producaturq; ita, vt pertranſeat omnes ſic diſpoſitas figuras, vt vſq; in, Z, complectetur ergo, SZ, ipſas, LM, YT, & ſic quæuis omnium linearum figuræ, GOQ, hac lege producta, complectetur eas, quæ de ipſa manent in figuris iam diſpoſitis. Ergo omnes lineę figurę, GOQ, ſic productæ complectentur omnes lineas figurarum ſic diſpoſitarum, ergo erunt ad illas ſimul ſumptas, vt totum ad partem, nam illæ in his reperientur, & aliquid amplius, ergo erunt illis maiores, omnes lineæ autem figurarū ſic diſpoſitarum ſunt non minores omnibus lineis figuræ, EAG, ex qua deſumptæ ſunt, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ, ſic productæ ſūt, vt effectę fuerint maiores omnibus lineis figuræ, EAG Eodem pacto oſtendemus nos poſſe vice verſa iſtas illis efficere maiores, ergo omnes lineæ figurarum, EAG, GOQ, ſumptæ cum regulis vtcunq; ſuppoſitis, cuiuſuis ſint altitudinis ſumptæ iuxta eaſdem regulas, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes. Quod ſi ſubter rectam, HQ, adhuc eſſent portiones conſideratarum à nobis figurarum, EAG, GOQ, eodem modo oſtenderemus omnes lineas earundem ſumptas cum iiſdem regulis eſſe magnitudines rationem inter ſe habentes, vnde integrarum figurarum omnes lineæ eſſent

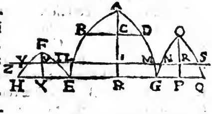
Diffin. 4. l. 5. Elem.

ſent

ſent magnitudines inter ſe rationem habentes, quod in fig. planis oſtendere opus erat.

In figuris autem ſolidis conſimiliter procedemus; nam ſi in ſuperiori figura intellexerimus, EAG, GOQ, eſſe figuras ſolidas, & pro rectis lineis æquidiſtantibus intellexerimus plana æquidiſtantia, vt pro rectis, EG, GQ, plana EG, GQ, quibus plana, LM, NS, ſint æquidiſtanter ducta, ſumptis pro regulis planis, EG, GQ, iiſque in directum ſibi conſtitutis. i. ità vt iaceant regulæ in eodem plano, oſtendemus nos poſſe ita producere omnia plana ſolidæ figurę, GOQ, vt eadem complectantur omnia plana figuræ, EAG, (ſi ſint eiuſdem altitudinis dictæ figuræ) integræ exiſtentis, vel (ſi non ſint) diuiſæ in figuras ſolidas, ex. g. EBDG, BAD, ſic diſpoſitas, vt baſes, ſiue regulę iaceant in eodem plano, & ita, vt omnia plana dictarum figurarum ſolidarum, vel ſint intra oppoſita plana dictas figuras tangentia, vel nihil eorum extra, vnde omnia plana figuræ ſolidæ, GOQ, ſic producta fient totum, & portiones ab eiſdem captæ in figura ſolida, EAG, integra, vel diuiſa, vt dictum eſt. i. omnia plana figuræ, EAG, fient pars omnium planorum figuræ, GOQ, ſic productorũ, nam hæc in in illis tota reperiĕtur, & aliquid amplius, vnde omnia plana figuræ, GOQ, ſic producta erunt, vt effecta ſint maiora omnibus planis figuræ, EAG. Eodem modo oſtendemus nos poſſe ſic producere omnia plana figuræ, EAG, vt fiant maiora omnibus planis figuræ, GOQ, ita productis, & ſic deinceps. Ergo omnia plana ſolidarum figurarum, EAG, GOQ, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes, quod oſtendere opus erat.

Definit. 4. l. 5. Elem.



SCHOLIVM.

POſſet fortè quis circa hanc demonſtrationem dubitare, non rectè percipiens quomodo indefinitæ numero lineæ, vel plana, quales eſſe exiſtimari poſſunt, quæ à me vocantur,

cantur, omnes lineæ, vel omnia plana talium, vel talium figurarum poſſint ad inuicem comparari: Propter quod innuēdum mihi videtur, dum conſidero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figuræ, me non numerum ipſarum comparare, quem ignoramus, ſed tantum magnitudinem, quæ adæquatur ſpatio ab eiſdem lineis occupato, cum illi congruat, & quoniam illud ſpatium terminis comprehenditur, ideò & earum magnitudo eſt terminis eiſdem comprehenſa, quapropter illi poteſt fieri additio, vel ſubtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod ſufficere dico, vt illa ſint ad inuicem comparabilia, alioquin neque ipſa ſpatia figurarum eſſent ad inuicem comparabilia: Vel enim continuū nihil aliud eſt præter ipſa indiuiſibilia, vel aliquid aliud, ſi nihil eſt præter indiuiſibilia, profectò ſi eorum congeries nequit comparari, neque ſpatium, ſiue continuum, erit comparabile, cum illud nihil aliud eſſe ponatur, quam ipſa indiuiſibilia: Si verò continuum eſt aliquid aliud præter ipſa indiuiſibilia, fateri æquum eſt hoc aliquid aliud interiacere ipſa indiuiſibilia, habemus ergo continuum diſſeparabile in quadam, quæ cōntinuum componunt, numero adhuc indefinita, inter quęlibet enim duo indiuiſibilia æquum eſt interiacere aliquid illius, quod dictum eſt eſſe aliquid aliud in ipſo continuo præter indiuiſibilia, qua enim ratione tolleretur à medio duarum, à medijs quoque cæterarum tolleretur. Hoc cum ita ſit comparare nequibimus ipſa continua, ſiue ſpatia adinuicem, cum ea, quæ colliguntur, & ſimul collecta comparantur, ſcilicet, quæ continuum componunt, ſint numero indefinita, abſurdum autem eſt dicere continua terminis comprehenſa non eſſe ad inuicem comparabilia, ergo abſurdum eſt dicere congeriem omnium linearum, ſiue planorum, duarum quarumlibet figurarum non eſſe ad inuicem comparabilem, nō obſtante, quod quæ colliguntur, & illam congeriem componunt ſint numero indefinita, veluti hoc non obſtat in cōtinuo. Siue ergo continuum ex indiuiſibilibus componatur, ſiue non, indiuiſibilium congeries ſunt adinuicem comparabiles, & proportionem habent.

Non inutile autem mihi videtur eſſe animaduertere pro huius cōfirmatione, hoc pro vero ſuppoſito, quam plurima,

quæ

Digitized by Google

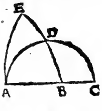
quę ab Euclide, Archimede, & alijs oſtenſa ſunt, à me pariter fuiſſe demonſtrata, meaſq; concluſiones ad vnguem cum illorum concluſionibus concordare, quod euidens ſignum eſſe poteſt, me in principijs vera aſſumpſiſſe, licet ſciam & ex falſis principijs ſophiſticè vera aliquando deduci poſſe, quod tamen in tot, & tot concluſionibus, methodo geometrica demonſtratis, mihi accidiſſe abſurdum putarem: Hoc tamen addo, non tanquam præfatæ veritatis legitimum fundamentum, ſed vt non negligendum, immò ſummè expendendum illius argumentum, quod ſequentia percurrenti cõtinuò magis, ac magis eluceſcet.

PROPOS. II.

AEqualium planarum figurarum omnes lineæ ſunt æquales, & æqualium ſolidarum omnia plana ſunt æqualia, regula quauis aſſumpta.

Sint duę æquales planæ figuræ, ADC, AEB, in figura, ADC, ſit regula, AC, vtcunque, & in figura, AEB, regula vtcunq; ſit, AB. Dico omnes lineas figuræ, ADC, regula, AC, æquales eſſe omnibus lineis figurę, AEB, regula, AB Intelligatur figuram, AEB, ita ſuperponi figuræ, ADC, vt regulę ſint ad inuicem ſuperpoſitæ, velut eſt, AB, in, AC, vel ſaltem æquidiſtent, vel ergo tota figura congruit toti, vel pars parti, congruat pars parti, ergo congruentium harum partium omnes lineæ erunt pariter congruẽtes, ſcilicet omnes lineæ, ADB, partis figuræ, AEB, erunt congruentes omnibus lineis, ADB, partis figuræ, ADC, ſuperponantur adhuc reſiduę harum figurarum partes, hac lege tamen, vt omnes earundem lineæ regulis, AB, AC, ſiue regulæ cõi, AB, vel, AC, ſemper ſituẽtur ęquidiſtãtes, & hoc ſemper fiat, donec omnes reſiduę partes ad inuicem ſuperpoſitę fuerint. Quia ergo integrę figuræ ſunt æquales erunt dictę partes ſuperpoſitæ inuicem congruentes, ergo & earum omnes lineę erunt pariter congruentes, magnitudines autem congruen-

Poſtul. 1. huius.



gruentes ſunt ad inuicem æquales, ergo omnes lineæ partiũ figuræ, AEB, ſimul ſumptarum. ſ. omnes lineæ figuræ, AEB, ſumptæ regula, AB, erunt æquales omnibus lineis partium figuræ, ADC, quibus prædictæ partes congruerunt, ſimul ſumptarum. i. omnibus lineis figuræ, ADC, ſumptis, regula, AC, quod in figuris planis oſtendendum erat.

Ita ſuperpoſitis æqualibus figuris ſolidis, ita vt duæ in ipſis aſſumptæ vtcunq; regulæ ſint ad inuicem ſuperpoſitæ, vel æquidiſtantes, & reſiduorum facta ſemper ſuperpoſitione ita vt omnia eorum plana regulis iam ſuperpoſitis æquidiſtent, tandem, quia figuræ ſunt æquales, dictæ partes erũt ad inuicem congruentes, & conſequenter integræ quoque figuræ erunt congruentes, ergo earum omnia plana ſumpta cum dictis regulis erunt ad inuicem congruentia, ergo & æqualia, quod in figuris ſolidis oſtendere quoq; opus erat.

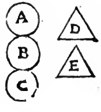
COROLLARIVM.

HInc patet in eadem figura plana, omnes lineas ſumptas cum quadam regula æquari omnibus lineis ſumptis cum alia quauis regula; & in figuris ſolidis omnia plana vnius ſumpta cum quadam regula, æquari omnibus planis eiuſdem, regula quauis aſſumpta; vnde ex. g. ſecto planis cylindro æquidiſtanter axi, qua ſectione in ipſo creantur parallelogramma, & ſecto eodem planis æquidiſtanter baſi ductis, qua ſectione creantur in eodem circuli, patet ex hoc, omnia parallelogrãma dicti cylindri, regula eorundẽ vno, eſſe æqualia omnibus circulis eiuſdem, regula baſi. Coroll. 6. l. 1. Corol. 12 l. 1.

PROPOS. III.

FIguræ planæ habent inter ſe eandem rationem, quam eorum omnes lineæ iuxta quamuis regulam aſſumptę: Et figuræ ſolidæ, quam eorum omnia plana iuxta quamuis regulam aſſumpta.

Sint figuræ planæ vtcunque, A, D. Dico, A, figuram ad figuram, D, eſſe, vt omnes lineæ figuræ, A, iuxta quamuis



regulam aſſumptæ ad omnes lineas figuræ, D, iuxta quamuis regulam aſſumptas. Intelligantur ergo omnes lineæ figuræ, A, &, D, aſſumptæ iuxta quaſdam regulas, deinde capiantur quotcunq; figuræ, BC, ſingulæ æquales figuræ, A, & figuræ, D, quotcunq; æquales figuræ, vt, E; nunc, ſi cõtinuum componitur ex indiuiſibilibus, patet abſq; alia demonſtratione figuram, A, ad figuram, D, eſſe vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non eſſet niſi ipſa indiuiſibilia comparare; ſed eſto, quod hoc ſit falſum, vel quod, etiamſi verum ſit, tamen legitima ratione ad hoc probandum nondum peruenerimus, adhuc dico ipſa indiuiſibilia. ſ. omnes lineas figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, eſſe vt figuram, A, ad figuram, D. Quoniam ergo aſſumpſimus figuras, B, C, ſingulas æquales figuræ, A, &, E, æqualem figuræ, D, omnes lineæ ſingularum figurarum, A, B, C, erunt æquales omnibus lineis figuræ, A, ſumptis iuxta dictam regulam (quacunq; regula dictæ omnes lineæ ſint aſſumptæ) & ideò quotuplex erit compoſitum ex figuris, ABC, figuræ, A, totuplex erit compoſitum ex omnibus lineis figurarum, ABC, omnium linearum figuræ, A, & ideò habebimus æquè multiplicia primæ, & tertiæ vtcunq; ſumpta. Similiter oſtendemus compoſitum ex figuris, E, D, ęq; multiplex eſſe figuræ, D, ac compoſitum ex omnibus lineis figurarum, E, D, multiplex eſt omnium linearum figuræ, D, quæ ſunt æquè multiplicia ſecundæ, & quartæ vtcunque ſumpta. Quia ergo ſi multiplex primę. ſ. compoſitũ ex figuris, ABC, ſuperauerit multiplex ſecundæ, ſcilicet compoſitum ex figuris, DE, etiam multiplex tertię. ſ. compoſitum ex omnibus lineis figurarum, ABC, ſuperabit multiplex quartæ. ſ. compoſitum ex omnibus lineis figurarum, D E: & ſi multiplex primæ fuerit æquale multiplici ſecundæ, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, ſcilicet ſi compoſitum ex figuris, ABC, fuerit ęquale compoſito ex figuris, D E, etiam eorundem compoſitorum omnes lineę erunt æquales, & ſi minus, minus: ideò prima ad ſecundam erit,

Per antecced.

Elicitur ex antec.

Definit. 5. Qui. Ele.

erit, vt tertia ad quartam, ſcilicet figura, A, ad figuram, D, erit vt omnes lineæ figurę, A, ad omnnes lineas figurę, D, ſumptas iuxta datas regulas.ſ. iuxta quaſcunque regulas, quod in fig. planis erat oſtendendum.

Verum ſi intellexerimus, A, D, eſſe figuras ſolidas, aſſumentes, C, B, ſingulas æquales ipſi, A, &, E, ipſi, D, oſtendemus compoſitum ex figuris, ABC, tam multiplex eſſe figuræ, A, ac compoſitum ex omnibus planis figurarum, A, B, C, multiplex eſt omnium planorum figuræ, A, & ſic compoſitum ex figuris, D, E, tam multiplex eſſe figuræ, D, ac compoſitum ex omnibus planis figurarum, DE, multiplex eſt omnium planorum figuræ, D, & tandem per antecedentem Propoſitionem oſtendemus, ſi multiplex primæ ſuperauerit multiplex ſecundæ, etiam multiplex tertiæ ſuperaturum multiplex quartæ, & ſi minus, minus, vel ſi æquale, & æquale fore ergo prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam, ſcilicet figura ſolida, A, ad figuram ſolidam, D, erit vt omnia plana, A, ad omnia plana, D, cum quibuſuis regulis aſſumpta, quod & in figuris ſolidis oſtendere opus erat. Defi. Qui. 5. Elem.

COROLLARIVM.

Liquet ex hoc, ~~quod, vt inueniamus, quam rationem~~ habeant inter ſe duæ figuræ planæ, vel ſolidæ, ſufficiet nobis reperire, quam in figuris planis, inter ſe rationem habeant earundem omnes lineæ, &, in figuris ſolidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam aſſumpta, quod nouæ huius meæ Geometriæ veluti maximum iacio fundamentum.

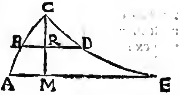
PROPOS. IV.

Si duæ figuræ planæ, vel ſolidę, in eadem altitudine fuerint conſtitutę, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris ſolidis ductis planis vtcumq; inter ſe parallelis, quorum reſpectu prędicta ſumpta ſit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, ſeu ductorum planorum portiones figuris ſolidis interceptas, eſſe magnitudines proportionales, homologis in eadem

Digitized by Google

figura ſemper exiſtentibus, dictę figurę erunt inter ſe, vt vnū quodlibet eorum antecedentium, ad ſuum conſequens in alia figura eidem correſpondens.

Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine conſtitutę, CAM, CME, in quibus duæ vtcunq; rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, AE, BD, reſpectu quarum communis altitudo aſſumpta ĩtelligatur, ſint autem portiones figuris interceptæ ipſæ, AM, BR, in fig. CAM, &, ME, RD, in fig.



CME, reperiatur autẽ, vt AM, ad, ME, ita eſſe, BR, ad, RD. Dico figuram, CAM, ad figuram, CME, eſſe vt, AM, ad, ME, vel, BR, ad, RD. Quoniam enim, BD, AE, vtcumq; ductæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, patet, quod quælibet earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, CAM, ſumptæ regula altera ipſarum, AM, BR, ad eam, quę illi indirectum iacet in figura, CME, erit vt, BR, ad, RD, vel vt, AM, ad, ME, vt igitur, AM, ad, ME, vnum.ſ.antecedentium ad vnum conſequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempè omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnia conſequentia, ſcilicet ad omnes lineas figurę, CME, regula, ME; indefinitus.n. numerus omnium antecedentium, & conſequentium, qui pro vtriſque hic idem eſt, quicunque ſit (& hoc nam figurę ſunt in eadem altitudine, & cuilibet antecedẽti in figura, CAM, aſſumpto reſpõdet ſuum conſequens illi in directum in alia figura conſtitutum) non obſtat quin omnes lineæ figurę, CAM, ſint comparabiles omnibus lineis figurę, CME, cum
1. huius. ad illas rationem habeant, vt probatum, eſt, & ideò omnes lineæ figuræ, CAM, regula, AM, ad omnes lineas figuræ, CME, regula, ME, erunt vt, AM, ad, ME. Verum, vt omnes lineæ figuræ, CAM, ad omnes lineas figurę, CME, ita fig.
3. huius. CAM, eſt ad figuram, CME, ergo figura, CAM, ad figuram, CME, erit vt, BR, ad, RD, vel, AM, ad, ME, quod in figuris planis oſtendere opus erat.

Si verò

Si verò ſupponamus, CAM, CME, eſſe figuras ſolidas, & vice rectarum, AM, BR, ME, RD, plana intelligamus figuris, CAM, CME, intercepta inuicem parallela, & ita conſtituta, vt plana, AM, ME, iaceant in eodem plano; veluti ſe habeant etiam plana, BR, RD, reſpectu quorum præfata altitudo aſſumpta quoque intelligatur, eadem methodo procedentes oſtendemus omnia plana figuræ, CAM, ad omnia plana figuræ, CME, ideſt figuram ſolidam, CAM, ad figuram ſolidam, CME, eſſe vt planum, BR, ad planum, RD, vel vt planum, AM, ad planum, ME, quod & in ſolidis oſtendere opus erat. 3. huius.

COROLLARIVM.

Colligitur ex hoc in figuris planis, vel ſolidis, ſi magnitudines comparatæ ſint lineæ rectæ, vel plana, ſint autem illæ, quæ dicuntur omnes lineæ, vel omnia plana dictarum figurarum, de illis quoque verificari, vt vnum antecedentium ad vnum conſequētium, ita eſſe omnia antecedentia ad omnia conſequentia; & in ſupradictis figuris planis omnes lineas vnius ad omnes lineas alterius, vel in ſolidis omnia plana vnius ad omnia plana alterius, eſſe vt vnum antecedentium ad vnum conſequentiū, iuxta quę, tanquam regulas, dictæ omnes lineæ, vel omnia plana intelliguntur aſſumpta.

XVIII.

Circa Propoſitionem primam, & eius Scholium plura dicentur in Exerc.3. Propoſitio verò 2. & 3. manifeſtant veritatem regulæ generalis num.7. ſeu regulæ generaliſſimæ iuxta priorem methodum aſſumptæ. Propoſitio 4. eſt quaſi quidam nexus vtriuſque methodi Indiuiſibilium: in ea enim apparet comparatio omnium Indiuiſibilium figurarum, CAM, CME, tam collectiuè, quam diſtributiuè ſumptorum. Nam ex eo, quod ſingula Indiuiſibilia figuræ, CAM, cum ſingulis Indiuiſibilibus figuræ, CME, eiſdem in directum poſitis, collata, reperiuntur ad illa habere eandem rationem (quod inueſtigare eſt munus poſterioris methodi) concluduntur omnia Indiuiſibilia ad omnia Indiuiſibilia eſſe, vt vnum ad vnum, quod congruit priori methodo:

vnde

vnde infertur figuras ipſas eſſe, vt vnum ad vnum. Verum hoc idem probat Prop. prima Lib. 7. iiſdem Indiuiſibilibus ſingillatim, hoc eſt non collectiuè, ſed diſtributiuè comparatis, vt videbimus in Exercit. 2. In hac autem Prop. prior methodus aliquantulum ſe contrahit ſcilicet ad limites poſterioris, vbi n. illa pronuntiat in Prop. 3. figuras ſequi proportionem aggregatorum ſuorum omnium Indiuiſibilium, qualeſcunque ſint ipſæ figuræ: hic ad eas ſeſe coarctat, quæ ſunt in eadem altitudine, ſeu in eiſdem parallelis. Prior ergo methodus liberior eſt, ſcilicet vagatur per omnes figuras, cuiuſcunq; nempè ſint altitudinis, ſed eſt implexa conceptui omnium Indiuiſibilium collectiuè cōparatorum: poſterior verò contractior eſt, poſtulat enim figuras eſſe in eadem altitudine, ſed ſoluta eſt à præfato cōceptu, comparat enim ipſa Indiuiſibilia tantum diſtributiuè.

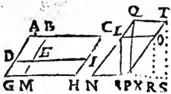
XIX.

Quod autem infinitas terminorum proportionis data non obſtet, quin de illis quoque verificetur, vt vnum antecedens ad vnum conſequens, ita eſſe omnia antecedentia ad omnia conſequentia, vt innuitur in prædicta Prop. 4. egregiè confirmat prænominatus Torricellius Problemate de Dimenſione Parabolæ, Prop. 14. à Lemmate 24. vſque ad 27.

PROPOS. V.

PArallelogramma in eadem altitudine exiſtentia inter ſe ſunt, vt baſes; & quæ in eadem baſi, vt altitudines, vel, vt latera æqualiter baſibus inclinata.

Sint parallelogramma quæcunque, AM, MC, in eadem altitudine conſtituta, ſumpta altitudine iuxta baſes, GM, MH. Dico parallelogrammum, AM, ad parallelogrammum, MC, eſſe vt, GM, ad, MH. Ducatur quæcunq; intra parallelogrāma, AM, MC, parallela ipſis, GM, MH, cuius portiones



paral-

parallelogrammis,AM,MC, interceptæ ſint,DE,EI. Quoniam ergo, DM, eſt parallelogrammum, ſicut &, EH, erit, DE,æqualis ipſi,GM,&, EI, ipſi,MH, erit igitur, GM, ad, MH, vt, DE, ad, EI, &, DE, EI, ductæ ſunt vtcunq; parallelæ ipſis, GM, MH, ergo parallelogramma, AM, MC, erũt ex genere figurarum Theorematis anteced. ergo, AM, ad, MC,erit vt, DE, ad, EI, vel vt, GM, ad, MH,quę ſunt eorundem baſes. Hæc autem verificabuntur etiam ſi altitudines æquales fuerint,vt facilè patet.

Sint nũc parallelogramma,QP,LP,in eadẽ baſi,NP,conſtituta. Dico eadem eſſe, vt altitudines ſumptæ iuxta baſim,NP.Demittantur ergo,OR,TS,altitudines in, NP, productam, in punctis,R,S,illi occurrentes (niſi fortè,TP,OP, eſſent ipſæ altitudines, vel intra parallelogramma inciderẽt baſi,NP,)& à punctis,Q L, agãtur illis parallelæ, QX, LV, in punctis,V,X,baſi,NP,incidẽtes.Sunt igitur parallelogrãma,QS. LR,in æqualib. altitudinibus,QT, LO,sũptis iuxta baſes, TS, OR, ergo parallelogramma, QS,LR, erunt inter ſe,vt baſes,TS,OR,eſt autem parallelogrammũ,QS, ęquale parallelogrammo,QP,&, LR,ipſi,LP,ergo parallelogrãma, QP,LP,erunt inter ſe,vt,TS,OR, quæ pro ipſis ſunt altitudines ſumptæ iuxta baſim,NP. Si autem latus,OP, extenderetur ſuper latus,PT,ideſt latera,OP,PT,eſſent æqualiter inclinata communi baſi,NP,tunc ſumptis pro baſibus ipſis, TP,OP,haberemus parallelogramma,QP,LP,in eadem altitudine ſumpta iuxta baſes, TP, OP, & ideò eſſent, vt ipſæ baſes,TP, OP, ideſt vt latera, TP, OP, æqualiter baſi, NP, inclinata, hæc autem pariter verificabuntur etiamſi baſis, NP,non ſit communis, ſint tamen duæ baſes ęquales, quæ oſtendere opus erat.

Ex prima parte huius Prop.

Ex prima par.huius Propoſ.

XX.

Hæc propoſitio ſuperaddita eſt, vt quoddam exemplar haberet Studioſus prioris methodi Indiuiſibilium, quatenus illa adhibetur circa figuras in eadem altitudine exiſtentes(vt ſemper ferè conſuetum eſt in ipſa Geometria Indiuiſibilium, quamuis vniuerſaliſſimè quibuſcunq figuris in quacunque altitudine exiſtentibus adaptari poſſit) hoc eſt quatenus verſatur circa ſubiectum, quod eſt poſteriori methodo proprium. In ea enim

intelligi

intelligi poteſt ſecundũ priorem methodum fieri comparationem omnium Indiuiſibilium collectiuè, quamuis ſufficeret illa diſtributiuè comparare, quod efficit poſterior methodus. Vt enim concludamus parallelogrammum, GB, ad, BH, eſſe vt, GM, ad, M H, ſufficit probare vt, GM, ad, MH, ita eſſe, DE, ad, EI, & ſic quamlibet parallelam ipſi, G H, in parallelogrammo, GB, ad ſibi reſpondentem in parallelogrammo, BH, parallelam eidem, GH, vt nos docet Propoſ. prima Lib. 7. abſque eo quod inferamus, ergo collectiuè omnes lineæ, GB, ad omnes lineas, BH, hoc eſt parallelogrammum, GB, ad parallelogrammum, BH, eſt vt, GM, ad, MH,. Videat ergo Lector in quo differant prior, & poſterior methodus, & quam facilè per hãc poſteriorem poſſit infinitorum Indiuiſibilium ſimul collectorum comparationem euitare, ſi illa propter infinitatem eidem negotium faciant.

XXI.

Ex præfata Prop. 5. deducuntur ſequentes Propoſitiones eiuſdem Libri ſecundi vſque ad octauam incluſiuè, demonſtrãturq; via Geometrica conſueta, quæ idcirco prætermittuntur. Sciat tamen Lector in ſexta probari quæcunq; parallelogramma habere rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum ſiue laterum æqualiter baſibus inclinatorũ, cum illa ſunt æquiangula. In ſeptima verò demonſtratur parallelogramma, quorum baſes altitudinibus, vel lateribus æqualiter inclinatis, reciprocantur eſſe æqualia, & è contra. In octaua deniq; habetur ſimilia parallelogramma eſſe in dupla ratione ſuorum laterum homologorum. Hæc à me vocantur communia ſymptomata parallelogrammorum, quæ in Corollarijs dictarum Propoſitionum ad eorundem parallelogrammorum omnes lineas, regulis lateribus, pariter transferuntur.

PROPOS. IX.

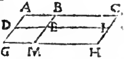
A. Diffi. 8. huius.

Parallelogrammorum in eadem altitudine exiſtentium omnia quadrata, regula baſi, iuxta quam altitudo ſumpta eſt, ſunt inter ſe, vt quadrata baſium.

Sint igitur parallelogramma, AM, MC, in eadem altitudine.

dine. Dico omnia quadrata parallelogrammi, AM, ad omnia quadrata parallelogrammi, MC, regula, GH, eſſe vt quadratum, GM, ad quadratum, MH. Sit intra parallelogrãma, AM, MC, ducta vtcunque, DI, parallela ipſi, GH, cuius portio, DE, maneat in, AM, &, EI, in, BH. Quoniam ergo, DE, eſt æqualis ipſi, G*M*, figuræ autem planæ ſimiles deſcriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus ſunt æquales, & ideò quadratum, DE, erit æquale quadrato, G*M*, & quadratum, EI, quadrato, *M*H, ergo, vt quadratum, G*M*, ad quadratum, *M*H, ita erit quadratum, DE, ad quadratum, EI, & quia, DI, vtcunque ducta eſt parallela ipſi, GH, ideò, vt vnum ad vnũ, ita omnia ad omnia ideſt, vt quadratũ, G*M*, ad quadratum, *M*H, ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, A*M*, ad omnia quadrata parallelogrammi, *M*C, regula, GH, quod erat oſtendendum.

A. Def. 8. huius.



25. l. 1.

Coroll. 4 huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet, ſi vice quadratorum ſumamus alias quaſcunque figuras ſimiles, quod eodem pacto oſtendemus omnes figuras ſimiles parallelogrammi, A*M*, ad omnes ſimiles figuras parallelogrammi, *M*C, vt ex.g. omnes circulos parallelogrãmi, A*M*, ad omnes circulos parallelogrãmi, *M*C, eſſe vt ſimiles figuras ab ipſis baſibus, G*M*, *M*H, deſcriptas, nam figuræ planæ ſimiles quæcunque, vt dictum eſt, deſcriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus ſunt æquales; omnibus pariter aſſumptis figuris ſimilibus regula eadem, GH.

A. Def. 8 huius.

25. l. 1.

XXII.

Ad intelligentiam huius Propoſitionis nonæ recolantur dicta circa def. 8. num. 17. ſuperiori, in hac enim paratur tranſitus ad corpora medijs omnibus quadratis deſcriptis ab omnibus lineis parallelogrammorum, GB, BH, æquidiſtantibus duobus quadratis deſcriptis à baſibus, GM, MH, (ad quæ ſupponuntur æqualiter inclinari parallelogramma, GB, BH, figuræ genitrices ſimilarium ſolidorum, quorum omnia dicta quadrata erũt omnia

plana) tanquã ſuis regulis. In hac ergo oſtenditur omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine exiſtentium, vt ſunt, GB, BH, eſſe vt quadrata baſium. Similiter in Corollario dicitur, ſi vice quadratorum ſumantur circuli, ſeu alia quæcunq; figura deſcripta à baſibus, tamquam regula, nihilominus omnes circulos ſeu omnes figuras ſimiles dictorum parallelogrammorum eſſe, vt ipſas regulas. Et quoniam ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, regulis figuris à baſibus eorundẽ deſcriptis, ſunt cylindrici, ſeu corpora columnaria, vt dictum eſt num.17. & infra probabitur; ideò ex præmiſſa Prop. edocemur corpora columnaria, ſeu cylindricos ſimilium baſium in eadem altitudine exiſtentes, eſſe inter ſe, vt ipſas baſes. Similiter ex ibidem ſequenti Prop.10. eiuſque Corollario innoteſcit Cylindricos in eadem, vel æqualibus, & ſimilibus baſibus exiſtentes, eſſe vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata. Sic 11. Prop. cum Corollario indicat Cylindricos ſimilium baſium habere inter ſe rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum. Pariter Propoſitio 12. cum Corollario patefacit cylindricos ſimilium baſium, quorum ipſæ baſes altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis reciprocantur, eſſe æquales: & è contra. Inſuper ex Prop.13. cum Corollario palam fit ſimiles cylindricos eſſe in tripla ratione laterum homologorum. Deniq; Prop. 14. concludit hac omnia (excepta Propoſitione 13. quoniam poſtulat baſes eſſe ſimiles) verificari de cylindricis etiamſi baſes eorum ſint diſſimiles. Hæc à me vocantur communia ſymptomata cylindricorũ, & omnium quadratorum ipſorum parallelogrammorum, quæ deducuntur ex hac ſola præmiſſa Propoſ.6. via geometrica conſueta, & ideò hic prætermittuntur.

XXIII.

Sequuntur in eodem Libro 2. aliqua Propoſitiones, quæ cum ad intentum noſtrum non ſint neceſſariæ, proptereà relinquũtur. Sunt autem præcipuè Prop.15. in qua oſtenditur omnes figuras planas ſimiles (quas generaliter diffiniuimus Lib. primo def.10) eſſe in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum earundem: & Propoſitio 17. (ſatis prolixa, & laborioſa) in qua probatur omnia ſimilia ſolida (quorum extat definitio generalis

eod: n

eodem Lib. primo ad def. 11.) eſſe in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ ſunt in eorundem homologis figuris. Has autem Lector poterit ſupponere, niſi hunc laborem ſubire velit.

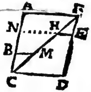
XXIV.

Hactenus Indiuiſibilium priorem methodum experti ſumus in indagandis communibus parallelogrammorum, & cylindricorum ſymptomatibus, nunc ad planas figuras redeũtes in ijſdẽ vlterius progredimur. Quoniam verò poſt parallelogramma faciliora videntur eſſe triangula, & trapezia, propterea in ſequentibus Propoſitionibus medijs parallelogrammis ſit tranſitus ad triangulorum, & trapeziorum menſuram.

PROPOS. XIX.

SI in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum eſt cuiuſuis triangulorum per ipſam diametrum conſtitutorum.

Sit parallelogrammum vtcunque, AD, in quo ducta diameter, F C, ipſum diuidat in triangula, FAC, CDF. Dico parallelogrammum, AD, duplum eſſe cuiuſuis triangulorum, FAC, CDF. Abſcindantur ab, FD, CA, verſus puncta, F, C, partes æquales, FE, CB, & per puncta, B, E, parallelæ ipſi baſi, CD, ducantur, EH, B*M*, incidentes diametro, FC, in punctis, H, *M*; quoniam ergo in triangulis, FHE, CB*M*, angulus, HFE, æqualis eſt angulo illi coalterno, BC*M*, & HEF, ipſi, FDC, qui eſt æqualis angulo illi oppoſito, FAC, qui tandem æquatur angulo, *M*BC; interior exteriori, ideò angulus, FEH, æquatur angulo, *M*BC, ſunt igitur in triangulis, FEH, *M*BC, duo anguli duobus angulis æquales, & latera illis adiacentia ſunt æqualia, nempè, FE, ipſi, BC, ergo reliqua latera erunt æqualia, ſcilicet HE, ipſi, B*M*. Eodem modo oſtendemus de cæteris parallelis ipſi, CD, eas nempè, quæ verſus puncta, F, C, abſcindunt à lateribus, FD, CA, partes æquales, eſſe pariter inter ſe æquales, veluti ſunt ex- 26. Primi Elem.



 tremæ,

tremæ,AF,CD,ęquales. Ergo omnes lineę trianguli,CAF, æquabuntur omnibus lineis trianguli, FDC,ſumptis in vtriſque omnibus lineis regula, C D; ergo triangulus, ACF,
3. huius. erit æqualis triãgulo,FDC,ergo duo trianguli,ACF,FDC, ſcilicet parallelogrammum, A D, erit duplum cuiuſuis triãgulorum,ACF, FCD,quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM I.

HInc patet, quæcunque de parallelogrammis in Prop. 5.6.7. & 8. huius Libri oſtenſa ſunt, eadem de triangulis vt vera recipi poſſe,ſi in triangulis conditiones ibi appoſitæ repertæ fuerint, nam in vnoquoque expoſitorum triangulorum ſumptis duobus quibuſuis lateribus, fieri poteſt ſub illis in eodem angulo parallelogrammũ,cuius triangulum erit dimidium. Triangula ergo, quæ in eadem ſunt altitudine inter ſe ſunt,vt baſes: Et quæ in eadem baſi inter ſe ſunt, vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata: Item habent rationem cõpoſitam ex ratione baſium, & altitudinum,ſiue laterum æqualiter baſibus inclinatorũ, cum ſunt æquiangula: Item Triangula, quorum baſes altitudinibus,vel lateribus ęqualiter baſibus inclinatis,reciprocantur ſunt æqualia; & quæ ſunt æqualia baſes habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reci-
Iux.dif.1. 1. Sexti Elem. procas: Et tandem habetur ſimilia Triangula eſſe in dupla ratione laterum homologorum, quæ omnia ex præſenti Propoſ. pendent.

COROLLARIVM II.

COlligitur inſuper, ſi ſupponamus, CD, eſſe æqualem ipſi,DF, quamlibet ductam in triangulo, FCD, parallelam ipſi, CD, æqualem eſſe ei, quam ipſa abſcindit ab, FD,verſus,F,nempè ipſi abſciſſæ,FE, & producta, EH,verſus,AC,cui incidat in N, ipsã,HN, ęquari reſiduæ abſciſſę, FE,ſcilicet ipſi, ED, &, NE,integram æquari ipſi,FD,quæ eſt vna maximarum abſciſſarum ipſius, FD, vnde hac via colligemus omnes lineas trianguli,FCD,regula, CD, dum latus

latus,FD, æquatur ipſi,DC, eſſe æquales omnibus abſciſſis ipſius FD,& omnes lineas trianguli,AFC,eſſe æquales reſiduis omnium abſciſſarum, FD, & omnes lineas parallelogrammi,AD,æquari maximis abſciſſarum, F D, quæ dicuntur eiuſdem obliqui tranſitus,ſi angulus,CDF,nõ ſit rectus, & recti tranſitus, ſi ſit rectus;vnde ſicuti oſtendimus,parallelogrammum,AD,duplum eſſe trianguli,FCD,vel,ACF, & ſubinde etiam omnes lineas, AD, regula,CD,duplas eſſe omnium linearum trianguli,FCD,vel,ACF,ſic etiam vt demonſtratum recipi poteſt propoſitæ lineæ rectæ, vt ipſius, FD, vtcunque, maximas abſciſſarum duplas eſſe omnium abſciſſarum eiuſdem, vel reſiduarum omnium abſciſſarum, vnde & omnes abſciſſas patebit æquari reſiduis omnium abſciſſarum eiuſdem lineæ,ijs vel recti,vel eiuſdẽ,obliqui tranſitus ſumptis, quæ ad ſequentium intelligentiam diligenter ſunt adnotanda.

Defin. 4. huius. Defin. 5. huius. Defin. 6. huius. 3. huius.

LEMMA.

SIt magnitudo, A, ad quotcunque magnitudines, E, O, ſingillatim ad vnamquamque, vt magnitudo,V, ad tot alias, P S, ſingillatim ad vnamquamq; nempè ſit, A,ad,E,vt,V, ad,P; A,ad,O, vt,V,ad, S. Dico, A,ad,E,O, ſimul eſſe,vt,V,ad P,S, ſimul iunctas. Etenim conuertendo erit prima,E,ad ſecundam,A,vt tertia,P,ad quartã, V, ſed etiam conuertendo quinta, O, eſt ad ſecundam, A,vt ſexta,S,ad quartam,V,ergo compoſita ex prima, E, & quinta, O, erit ad ſecũdam, A,vt compoſita ex tertia,P, & ſexta,S,ad quartam,V,ergo cõuertendo, A, ad, E,O,ſimul erit,vt,V,ad,P,S,ſimul iunctas,qui arguendi modus dicitur à me, Colligere,ſeu Colligendo.



24. Quinti Elem. Defin. 13. huius.

PROPOS. XX.

ASſumpta Propoſ. antecedentis figura, dimiſſa, BM, retineatur, N E, pro vna ex ductis vtcunque parallela ,ipſi CD, producta autem,CD,vtcunque in,M,completoq;

paral-

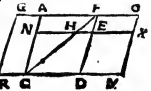
parallelogrammo, OD. Dico parallelogrammum, AM, ad trapeziũ, FCMO, eſſe vt, CM, ad, MD, ſimul cũ $\frac{1}{2}$. CD.

Erit enim, AM, parallelogrammum, vnde, MA, ad, AD, erit vt, CM, ad, CD, AD, verò ad triangulum, FCD; eſt vt, CD, ad $\frac{1}{2}$. CD, ergo, AM, ad triangulum, FCD, erit vt, MC, ad $\frac{1}{2}$. CD, eſt autem, AM, ad, FM, vt, CM, ad, MD, ergo, colligendo, A*M*, ad, FM, cum triangulo, F C D, ideſt ad trapezium, OFCM, erit vt, CM, ad, M D, cum $\frac{1}{2}$. D C, quod oſtendendum erat.

5. huius.

Ex antec.

5. huius.



COROLLARIVM.

Ex Cor. 2 antec.

Manifeſtum eſt autem, ſi, CD, ſit æqualis ipſi, DF, omnes lineas parallelogrammi, AD, regula, C D, eſſe æquales maximis abſciſſarum, FD, & omnes lineas triãguli, FCD, regula eadem æquari omnibus abſciſſis, FD. Nunc ſi intelligamus cuilibet earum, quæ dicuntur maximæ abſciſſarum, vel abſciſſæ, adiungi rectam, DM, vocantur tunc maximæ abſciſſarum, vel abſciſſæ adiuncta, DM, hæc autem ſunt eædem illis, quæ habentur in parallelogrammo, AM, & trapezio, FCMO, nam ſi produxeris, NE, vſque ad, OM, in, X, fiet, EX, adiuncta tum ipſi, NE, vni ex maximis abſciſſarum, FD, tum ipſi, HE, vni ex omnibus abſciſſis, FD, &, EX, adiuncta eſt æqualis ipſi, DM, vnde omnes lineæ, AD, adiuncta, DM, ſunt omnes lineæ parallelogrammi, AM, & ſunt ęquales maximis abſciſſarum ipſius, F D, adiuncta, DM, & omnes lineæ trianguli, FCD, adiuncta, D*M*, ſunt omnes lineæ trapezij, FC*M*O, & ſunt æquales omnibus abſciſſis ipſius, FD, adiuncta, D*M*. Quia ergo, A*M*, ad trapeziũ, FC*M*O, eſt vt, C*M*, ad, *M*D, cum $\frac{1}{2}$. DC, ideò omnes lineæ, A*M*, ad omnes lineas trapezij, FC*M*O, (regulam hic ſemper intellige ipſam, C*M*,) ideſt maximæ abſciſſarũ, FD, adiuncta, D*M*, ad omnes abſciſſas, FD, adiuncta, D*M*, erunt vt, C*M*, compoſita nempè ex propoſita linea, CD, ſiue ex propoſita, FD, illi æquali, & adiuncta, D*M*, ad compoſitam ex adiuncta, *M*D, & $\frac{1}{2}$. propoſitæ lineæ, CD, vel, DF.

Defin. 7. huius.

3. huius.

PRO-

PROPOS. XXI.

IN expoſita ſuperioris Prop. figura, ſi producatur, CD, ad partes, C, vtcunque, vt in, R, & compleatur parallelogrammum, GC, oſtendemus trapezium, FGRC, ad trapezium, FC*M*O, eſſe vt compoſita ex RC, & ½. CD, ad compoſitam ex, *M*D, & ½. CD.

Nam trapezium, CRGF, ad, GD, eſt vt compoſita ex, RC, & ½. CD, ad, RD, inſuper, GD, ad, A*M*, eſt vt, RD, ad, C*M*, & tandem, A*M*, ad trapeziũ, FC*M*O, eſt vt, C*M*, ad, *M*D, cum ½. CD, ergo ex æquali trapezium, FGRC, ad trapeziũ, FC*M*O, erit vt, RC, cum ½. CD, ad, *M*D, cum ½. DC, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HInc patet omnes lineas trapezij, FGRC, regula, R*M*, ad omnes lineas trapezij, FC*M*O, regula eadem eſſe, vt, RC, cũ ½. CD, ad, *M*D, cũ ½. DC. Veluti autem in antecedenti oſtendimus, ſi, CD, ſit æqualis ipſi, DF, omnes lineas trapezij, FCMO, regula, C*M*, æquari omnibus abſciſſis ipſius, FD, adiuncta, D *M*, ita in præſenti oſtendemus omnes lineas trapezij, FGRC, regula, RD, æquari reſiduis omnium abſciſſarum ipſius, AC, vel, FD, adiuncta, RC; vnde patebit reſſiduas abſciſſarum propoſitæ lineæ, vt, FD, adiuncta, RC, ad omnes abſciſſas eiuſdem, adiuncta alia linea, vt, D*M*, eſſe vt compoſitum ex prima adiuncta, & ½ propoſitæ, CD, ſiue, FD, illi æqualis, ad compoſitum ex ſecunda adiuncta, & ½. propoſitæ lineæ, ideſt vt, RC, cum ½. CD, vel, DF, ad, *M*D, cum ½. CD, vel, DF. 3. huius.

XXV.

Cum triangulum dimidium eſſe circumſcripti eidem parallelogrammi in præmiſſa Prop. 19. oſtenſum ſit, ideò communia parallelogrammorum ſymptomata num. 21. indicata, etiam ad ipſa triangula, & ad eorum omnes lineas, regula baſi, transferri intel-

intelliguntur, vt innuit Corollarium. Ex Corollario verò ſecundo eiuſdem Prop.19. liquidò apparet nos ſine abſciſſis, reſiduis, & maximis abſciſſarum propoſitæ lineæ, vt ipſius, FD, in illius Schemate noſtras Prop. oſtēdere poſſe, vt dicebatur nu. 16 Etenim ſi ſupponamus, FD, æqualem ipſi, DC, pro omnibus abſciſſis ipſius, FD, poſſumus vti omnibus lineis trianguli, FCD, & pro reſiduis omnibus lineis trianguli, ACF, ſicuti pro maximis omnium abſciſſarum poſſunt vſurpari omnes lineæ parallelogrammi, ACDF, regula, CD. Similiter ex Corrolario Prop. 20. innoteſcit in eius figura ſuppoſita, FD, æquali ipſi, DC, omnes lineas parallelogrammi, AM, poſſe deſeruire pro maximis abſciſſarum, FD, adiuncta, DM; & omnes lineas trapezij, FCMD, pro omnibus abſciſſis eiuſdem, FD, adiuncta eadem, DM. Sic in Prop. 21. omnes lineæ trapezij, GRCF, ſeruient pro reſiduis omnium abſciſſarum, FD, adiuncta, CR. Videtur enim res clarior euadere, & ab oppoſitionib. liberior, ſi his abſciſſis, reſiduis, &c. ſubſtituamus omnes lineas dictarum figurarum, ijs enim dictæ abſciſſæ, & reſiduæ, &c. tam diſtributiuè, quam collectiuè adæquantur, vt patet ex dictarum Propoſitionum Corollarijs. Hæc addidi, quia non defuit, qui perperam accipiens has abſciſſas, reſiduas &c. fallaciæ hanc priorem methodum Indiuiſibilium credidit obnoxiam, vt ſuo loco clarius explicabitur.

XXVI.

Poſt parallelogramma, triangula, & trapezia in planis, & poſt cylindricos in ſolidis, ſupereſt vim Inuiſibilium iuxta hāc priorem methodum pariter circa alia ſolida experiri. Inter ea verò primò ſeſe offerunt corpora pyramidalia, ſeu conici, quippe quæ à triangulis iuxta noſtram rationem oriuntur. Ad ea ergo ſit cylindricorum comparatio in ſequenti Prop. 22. quam cum ſuis Corollarijs, & duabus ſubſequentibus Prop. 23. & 24. pariter cum ſuis Corollarijs hic ſubnectimus..

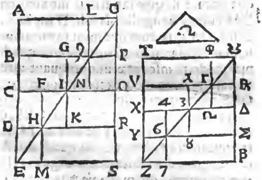
PROPOS. XXII.

EXpoſitis duobus vtcunq; parallelogrāmis, in eiſdemq; ductis diametris, & duobus vtcunque lateribus pro regula ſumptis, nempè in vnoquoq; eorum uno: Omnia quadrata

Digitized by Google

drata cuiuſuis dictorum parallelogrammorum ad omnia quadrata cuiuſuis triangulorum per diametrum in ipſo conſtitutorum, erunt vt omnia quad. reliqui parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusuis triangulorum per diametrum in iſto ductam pariter conſtitutorum.

Sint expoſita vtcunq; parallelogramma, AS, Tβ, in ijſq; ductæ diametri, EO, Z&, regulis ſumptis, ES, Zβ. Dico omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, eſſe vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, &Zβ. Si enim, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, ita non ſunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, erunt igitur ita omnia quadrata, AS, ad maius, vel ad minus omnibus quadratis trianguli, OES. Sint exceſſus, vel defectus, omnia quadrata figuræ planæ, Ω, diuidatur autem latus, OS, bifariã, in Q, &, OQ, QS, bifariam in, P, R, & ſic deinceps fiat, ita vt ductis per pũcta diuiſionũ parallelis ipſi, ES, DR, CQ, BP, tandem deuẽtum ſit ad parallelogrãmum, DS, cuius omnia quadrata,



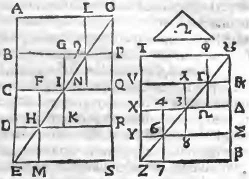
regula, ES, ſint minora omnibus quadratis figuræ, Ω: per puncta autem, in quibus dictæ parallelæ ipſam, OE, ſecant, ducãtur vſque ad proximas parallelas æquidiſtantes lateribus, AE, OS, ipſæ, LN, GK, FM. Erit igitur triangulo, OES, circumſcripta figura quædam compoſita ex parallelogrãmis, LP, GQ, FR, DS, & alia inſcripta compoſita ex parallelogrammis, 9Q, IR, HS; ita vt omnia quadrata figuræ circumſcriptæ, regula, ES, excedant omnia quadrata inſcriptæ, regula eadem, minori quantitate, quam ſint omnia quadrata figuræ, Ω. Nam in parallelogrammo, DS; recta, HM, diui- Iux.Prim. 10. Elem.

dit omnia quadrata, DS,in omnia quadrata, DM,in omnia quadrata,HS,& in rectãgula bis ſub,DM, MR, veluti punctum,H,diuidit quadratum,DR, in quad.DH. quad.HR,& rectangulum bis ſub;DHR,ſiue ex 23. ſeq. ab hac independente, & ideò omnia quad. DS,excedunt omnia quadrata, HS, omnibus quadratis, DM, & rectangulis bis ſub, DM, MR. Eodẽ pacto oſtẽdemus omnia quadrata, FR,excedere omnia quadrata, IR, omnibus quadratis,FK,& rectangulis bis ſub,Fk,kQ, & ſic omnia quadrata,GQ, excedere omnia quadrata,9Q, omnibus quadratis,GN,cum rectangulis bis ſub,GN,NP,& in figura circumſcripta ſuperſunt adhuc omnia quadrata, LP. Porrò ſi hos exceſſus ſimul colligamus fient omnia quadrata, DS, nam ſi omnia quadrata,LP,vel, 9Q iunxeris omnibus quadratis,GN,& rectangulis bis ſub, GN,NP,fient omnia quadrata, GQ,hæc ſi iunxeris omnib. quadratis, Fk, cum rectangulis bis ſub, Fk, kQ, fient omnia quadrata, FR, quæ tandem ſi iunxeris omnibus quadratis, DM,cum rectangulis bis ſub, D M, M R, fient omnia quadrata, DS, quæ cum ſint minora omnibus quadratis figuræ, Ω, hinc figuræ circumſcriptæ omnia quadrata excedunt omnia quadrata inſcriptæ minori quantitate, quam ſint omnia quadrata, Ω, & ideò excedunt omnia quadrata trianguli, OES,multò minori quãtitate: Quia ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli,OES, cum omnibus quadratis,Ω, erant vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, &Zβ, hinc omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo,OES,habebunt maiorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quad. trianguli,&Zβ.

Nunc diuidatur ſimiliter, &β,in punctis, ℞,Δ,Σ,ac,OS,in punctis,PQR,& per puncta,℞,Δ,Σ,parallelæ ipſi,Zβ, ducantur,℞V,ΔX,ΣY,ſecantes,&Z,in punctis,Γ,3,6, per quæ vſq; ad proximas parallelas ipſis, &β, TZ, æquidiſtantes ducantur,ΦΓ,Λ3,4 6, vt triangulo,&Zβ,ſit circumſcripta figura ex parallelogrammis,Φ℞,ΛΔ,4Σ,Yβ, compoſita.Quia ergo,vt,
10. huius. OS,ad, SR, ita eſt, &β,ad,βΣ, vt autem, OS,ad, SR,ita ſunt omnia quadrata,AS,ad omnia quadrata, DS,& vt, &β, ad, βΣ,ita ſunt omnia quadrata,Tβ,ad omnia quadrata,Yβ:ergo

omnia

omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, ſunt vt omnia quadrata, Tβ, ad oĩa quadrata, Yβ. Quia verò omnia quadrata, Yβ, ad omnia quadrata, 6β, ideſt ad omnia quadrata, 4Σ, ſunt vt quadratum, Zβ, ad quadratum, 7β, ideſt ad quadratum, 6Σ, ideſt vt quadratum, β&, ad quadratum, &Σ, .i. vt quadratum, SO, ad quadratum, OR, ideſt vt quadratum, ES, ad quodratũ, HR, ideſt, vt omnia quadrata, DS, ad omnia quadrata, FR: ergo ex æquali oĩa quadrata, AS, ad oĩa quadr. FR, erũt vt oĩa quadr. Tβ, ad oĩa quadr. 4Σ: Eodẽ pacto oſtẽdemus oĩa quadr. AS, ad oĩa quadrata, GQ, eſſe vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, ΛΔ, & tandem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, LP, eſſe vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, ΦR, vnde, colligendo, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata parallelogrammorum, DS, FR, GQ, LP, ideſt figuræ circumſcriptæ, erunt vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata parallelogrammorum, ΦR, ΛΔ, 4Σ, Yβ, ideſt ad omnia quadrata figurę circumſcriptæ triangulo, & Zβ. Sed omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, OES, oſtenſa ſunt habere maiorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, & Zβ, ergo omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, & Zβ, habebuñt maiorem rationem, quam ad omnia quadrata trianguli, & 7β, ergo omnia quadrata figuræ circumſcriptæ triangulo, & Zβ, minora erunt omnibus quadratis triãguli, & Zβ, quod eſt abſurdum. Non ergo omnia quadrata, AS, ad maius, quam ſint omnia quadrata triãguli, OES, habẽt eandem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, & Zβ.



9. huius.

Defin. 12. l. 1.

 Dico

Dico autem neque ad minus eiſdem habere eandem rationem, ſint enim defectus adhuc omnia quadrata figuræ, Ω, & ſit circumſcripta triangulo, O E S, figura ex parallelogrammis, LP, GQ, FR, DS, & alia inſcripta ex parallelogrammis, MQ, IR, HS, compoſita, ita vt omnia quadrata circumſcriptæ ſuperent omnia quadrata inſcriptæ minori quantitate, quam ſint omnia quadrata, Ω, ergo omnia quadrata trianguli, OES, ſuperabunt omnia quadrata inſcriptę figuræ multo minori quantitate. Sunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, detractis omnibus quadratis, Ω, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata triãguli, & Zβ, ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata inſcriptæ figuræ habebunt minorem rationem, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, & Zβ. Diuidatur nunc pariter latus, &β, in punctis, ℞, Δ, Σ, ſimiliter ac, OS, diuiditur in, P, Q, R, & cætera, vt ſupra, fiant, vt habeamus figuram inſcriptam ex parallelogrammis, ΓΔ, 3Σ, 6β, compoſitam, oſtendemus igitur, vt ſupra, omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, OES, eſſe vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, & Zβ, ſunt autem omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, OES, in minori ratione, quam ſint omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata triãguli, & Zβ, ergo omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata figuræ inſcriptæ triangulo, & Zβ, erunt in minori ratione, quam omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, & Zβ, ergo figuræ inſcriptæ triangulo, & Zβ, omnia quadrata maiora erunt omnibus quadratis trianguli, & Zβ, quod eſt abſurdum, igitur omnia quadrata, AS, non ad minus, quam ſint omnia quadrata trianguli, OES, erunt vt omnia quadrara, Tβ, ad omnia quadrata trianguli, & Zβ, ſed neque ad maius, vt oſtenſum eſt ergo ad ipſa erunt, vt omnia quadrata, Tβ, ad omnia quadrata, & Zβ. Si autem comparentur omnia quadrata, A S, T β, ad omnia quadrata triangulorum, A E O, TZ &, eodem modo fiet demonſtratio, igitur oſtenſum eſt, quod erat demonſtrandum.

A.CO-

A. COROLLARII SECTIO I.

HInc patet quæcunque de omnibus quadratis parallelogrammorum tales, vel tales conditiones habẽtium in Propoſ. 9. 10. 11. 12. 13. 14. huius Libri oſtenſa ſunt, eadem de omnibus quadratis triangulorum, tanquam de eorundem partibus proportionalibus verificari, regula vno latere ſumpta, dum triangula circa altitudines, & baſes, ſiue à baſibus deſcriptas figuras, & latera æqualiter baſibus inclinata, eaſdem obtinuerint conditiones ibi notatas.

B. SECTIO II.

IGitur triangulorum in eadem altitudine exiſtẽtium omnia quadrata, vel omnes figuræ ſimiles (ſiue ſint ſimiles ad inuicem, quæ ſunt vtriuſque trianguli, ſiue diſſimiles) erunt vt figuræ à baſibus deſcriptæ. 9. huius.

C. SECTIO III.

ET ſi triangula fuerint in eadem, vel æqualibus baſibus, omnes figuræ ſimiles vtriuſq; ad inuicem, erunt vt altitudines, vel vt latera baſibus æqualiter inclinata. 10. huius.

D. SECTIO IV.

ITem triangulorum omnia quadrata, ſiue omnes figuræ ſimiles, etiamſi ſint diſſimiles, quæ ſunt vtriuſque trianguli, habebunt rationẽ compoſitam ex ratione figurarum à baſibus deſcriptarum, & altitudinum, ſiue laterum baſibus æqualiter inclinatorum. 11. huius.

E. SECTIO V.

ET triangulorum, quorum baſium figuræ altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis reciprocantur, omnes figuræ, ſimiles baſiũ figuris, ſunt æquales: Et ſi

omnes

11. huius. omnes figuræ, ſimiles baſium figuris, ſint æquales, figuras baſium altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis reciprocè reſpondentes habebunt.

F. SECTIO VI.

Iux. diffi. 1. Sexti Elem. ET tandem ſimilium triangulorũ omnia quadrata erunt in tripla ratione laterum homologorum, ſiue vt eorum cubi; regulas verò in ſupradictis ſuppono ſemper duo illo-
11. huius. rum triangulorum latera, quę baſes voco; hic verò intellige illorum triãgulorum latera homologa. His autem ſequentem Propoſitionem ſubiungam, tum huius gratia, tum eorum, quæ ſequentur.

PROPOS. XXIII.

SI, expoſita quacunque figura plana, in ea ducatur vtcunque recta linea, quæ ſit ſumpta pro regula, eadem verò in puncto, vel punctis diuiſa, prout Lib. 2. Elem. ſupponitur ſecari, per puncta diuiſionũ lineas duxerimus rectas, ſiue curuas, figuram diuidentes, & ſemel tantum ſecantes quamuis aliam regulæ parallelam, ſi regula in vno puncto tantum diuiſa ſit, vel toties, quot ſunt puncta diuiſionum regulæ (exceptis tamen extremis, in quibus linearum ſectæ partes in puncta aliquando degenerare poſſunt) quæcunq; in dicto 2. Lib. demonſtrãtur hac diuiſione ſuppoſita circa vel quadrata, vel rectangula eidem rectæ lineæ applicata,
D. Diff. 8. huius. eadem de omnibus quadratis dictæ figuræ, vel eiuſdem partium, vel de rectangulis ſub ipſis pariter verificabuntur.

Sit expoſita vtcunque figura plana, ABCD, in qua ducta, BD, recta linea vtcunq; ſit illa ſumpta pro regula, & ea diuiſa in vno, vel pluribus punctis, prout poſtulant Prop. Lib. 2. Elem. per puncta diuiſionũ ducantur lineæ ſiue rectæ, ſiue curuæ, A E C, AFI, toties quamuis aliam ipſi, BD, parallelam in figura, BADC, ſecantes, quo-



ties,

ties, BD, ſecta eſſe ſupponitur, exceptis tamen extremis, vt ex.g.ipſa,CI,in qua partes,CI,quæ in recta,CI,ſeparari debuiſſent per lineas, AEC, AFI, in puncta, C, I, partibus, BE, FD, reſpondentia degenerauerunt. Dico quæcunque demonſtrantur in linea,BD,circa quadrata,vel rectangula, illi, vel illius partibus applicata, verificari de omnibus quadratis totius figuræ, BADC, ſiue partiũ eiuſdem figuræ per dictas lineas conſtitutarum, ſiue de rectangulis ſub eiuſdem partibus. Vt ex.g. quia in 3. Prop. Lib. 2. Elem. oſtenditur rectangulum ſub, B D, D F, æquari rectangulo ſub, B F D, cum quadrato,FD,ſic dico verũ eſſe rectangula ſub figura, ABCD,& figura,ADI, æquari rectãgulis ſub figuris,ABIF, ADIF,cum omnibus quadratis figuræ,ADIF.Si enim aliam vtcunque duxerimus regulæ,BD, parallelam, vt, HO, ſecãtem lineas, AC,in, M,&,AI,in,N, verum eſſe comperiemus rectangulum,HON, æquari rectangulo,HNO,cum quadrato,NO, & idem in cæteris regulæ, BD, parallelis, in figura, ABCD, ductis reperiemus.Ergo verum erit rectangula illa ſimul collecta, ideſt rectangula ſub figura, ABID, & figura, ADI,æquari rectangulis ſub figuris, ABI, ADI,cum omnibus quadratis, ADI,quod 3. Propoſ.2.Lib.Elem.reſpõdet.

Vide D. Defin. 8. huius.

Coroll.4. huius.

Similiter ſi ſupponamus, BF, bifariam ſecari in,E,cui adiungatur, FD, ſuppoſuerimus etiam lineam, A C, bifariam ſecare quamlibet omniũ linearum figuræ,ABI, regula, BD, ſupradictarum, quarum ſingulis additur, quæ in directum manet in figura,ADI,veluti Propoſ.6. oſtenditur rectangulum,BDF,cum quadrato,FE, æquari quadrato,ED,ita hic ad modum ſuperioris oſtendemus rectangula ſub figura, ABID,&,ADI,cũ omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ACD, quod reſpondet Prop. 6. eiuſdem Lib. Conſimiliter reliqua demonſtrabimus, vnde iuxta 1. Prop. Secundi Elem. colligemus.

A. COROLLARII SECTIO I.

Rectangula ſub figura indiuiſa, ABID, & ſub diuiſa, ACD,per lineã,AI, æquari rectangulis ſub indiuiſa, ABID, & ſub partibus diuiſæ, quæ,ſunt, ACI, AID.

B. SE-

B. SECTIO II.

IVxta ſecundam habebimus omnia quadrata figuræ, ABID, æquari rectang. ſub, ABID, & ſingulis partibus, ABI, AID.

C. SECTIO III.

IVxta tertiam iam dictum eſt in Propoſitine quid colligamus.

D. SECTIO IV.

IVxta quartam habemus omnia quadrata figuræ, ABID, per vnicam lineam, AFI, diuiſæ, æquari omnibus quadratis figurarum, ABI, AID, & rectangulis bis ſub dictis fig. ABI, AID.

E. SECTIO V.

IVxta quintam, ſi ſupponamus lineam, AI, bifariam diuidere omnes lineas figuræ, ABID, regula, BD, ſumptas, & eaſdem lineam, AC, non bifariam diuidere; colligemus rectãgula ſub inæqualibus partibus, ABC, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, æquari omnibus quadratis figuræ, ABI.

F. SECTIO VI.

IVxta ſextam quid colligatur iam dictum eſt in Propoſitione.

G. SECTIO VII.

IVxta ſeptimã colligemus, ſuppoſito, quod figura, ABID, ſecetur à ſola linea, AI, vtcunque, dummodo eadem ſecet omnes æquidiſtantes ipſi regulæ, BD, in figura, ABID, ductas, & in vno tantum puncto, colligemus inquam omnia quadrata figuræ, ABID, & omnia quadrata figuræ, ADI, æquari rectangulis bis ſub figuris, ABID, ADI, vna cum omnibus quadratis, ABI.

H. SE-

H. SECTIO VIII.

IVxta octauam, ſi ſupponamus figuram, ABCD, vtcunq; ſectam per lineam, AC, (quæ tamen ſecet omnes ipſi, BD, æquidiſtantes in figura, ABCD, ductas, & in vno tantum puncto vti dictum eſt) colligemus rectangula quater ſub figuris, ABCD, ABC, cum omnibus quadratis, ACD, æquari omnibus quadratis figuræ compoſitæ ex figura, ABCD, &, ABC, ita vt omnium linearum figuræ, ABCD, ſingulis intelligatur adiecta, quæ nunc in figura, ABC, eſt cum illa in eadem rectitudine.

I. SECTIO IX.

IVxta nonam, ſi ſupponamus lineam, AI, ſecare omnes æquidiſtantes ipſi, BD, in figura, ABID, ductas bifariã, & lineam, AC, eaſdem bifariam non ſecare, colligemus omnia quadrata figuræ, ACD, cum omnibus quadratis figuræ, ABC, dupla eſſe omnium quadratorum figuræ, AID, cum omnibus quadratis figuræ, ACI, intermediæ.

K. SECTIO X.

IVxta decimam, ſi ſupponamus, AC, lineam bifariam ſecare omnes æquidiſtantes ipſi, BD, in figura, ABI, ductas, & illis addi, quæ in directum illis iacẽt in figura, AID; colligemus omnia quadrata figuræ, ABCD, cum omnibus quadratis figuræ, ADI, dupla eſſe omnium quadratorum figuræ, ABC, cum omnibus quadratis figuræ, ACD.

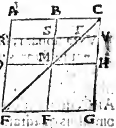
L. SECTIO XI.

IVxta vndecimam, ſi ſupponamus, BD, in, E, ita ſectam eſſe, vt rectangulum, DBE, ſit æquale quadrato, ED, quælibet autem æquidiſtantium ipſi, BD, in figura, ABCD, tali modo, & ad eandem partem diuidatur per lineã, AEC, patet, quod etiam rectangula ſub figuris, ABCD, ABC,

æquabuntur omnibus quadratis figuræ, ACD, regula, BD. Igitur linea, AC, diuidet ſuperficiem planam, *A*BCD, (ſic dicere liceat) ſecundum extremam, ac mediã rationem. Hæc autem pro ſequentibus accuratè memoriæ commendentur.

PROPOS. XXIV.

Expoſito parallelogrammo quocunque, in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiuſuis triangulorum per dictam diametrum cõſtitutorum erunt in ratione tripla, vno laterum parallelogrammi communi regula exiſtente.



Sit parallelogrammum, *A*G, in eoq; ducta diameter, CE, regula vtcunque latus, EG. Dico omnia quadrata, *A*G, eſſe tripla omnium quadratorum trianguli cuiuſuis, *A*EC, ſiue, CEG. Diuidãtur bifariam latera, *A*C, CG, in pũctis, BH, & per, B, ipſi, CG, perque, H, ipſi C*A*, parallelæ ducantur, BF, DH, quæ ſe cum recta, CE, communiter bifariam ſecabunt in puncto, M. Quia igitur in figura, ſiue parallelogrammo, *A*G, ducitur linea, BF, quæ omnes æquidiſtantes ipſi, EG, bifariam ſecat, &, CE, quæ eaſdem in partes inæquales diuidit, præterquam, DH, omnia quadrata trianguli, *A*EC, cum omnibus quadratis trianguli, CEG, dupla erunt omnium quadratorum, *A*F, cum omnibus quadratis duorum triangulorum CB*M*, EMF. Licet enim, DH, per lineã, CE, ſit non bifariam diuiſa, nihil tamen hoc obſtat noſtro propoſito, nam & ipſi, DH, contingit, veluti ijs, quę inæqualiter ſecantur, quadratum ſectarum partium, ſcilicet quadrata, DM, MH, dupla eſſe quadratorum dimidiæ, nempè quadrati, DM, & eius, quæ inter ſectiones interijcitur, quæ hic nulla eſt, cum duæ ſecantes, BF, CE, vniantur in pũcto, M: Sunt autem omnia quadrata trianguli, *A*EC, æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG, quia ſunt triangula in æqualibus baſibus, EG; *A*C, & eadem altitudine licet euersè

Per I. Corol. antec.

poſita,

Ex B. vel C. Corol. prop. 22. huius.

poſita,& ideò omnia quadrata trianguli,CEG,ſunt æqualia omnibus quadratis,*A*F,cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF. Quoniam verò omnia quadrata trianguli, B M C, ſunt æqualia omnibus quadratis trianguli, CMH,omnia verò quadrata triãguli, CEG,ad omnia quadrata trianguli, CMH, ſunt in tripla ratione eius, quam habet, GC,ad, CH, quæ eſt dupla,ideſt in ratione octupla, & hoc, quia triangula, CEG, CMH, ſunt ſimilia,ideò omnia quadrata, C E G, erunt octupla omnium quadratorum, C M H, & quadrupla omnium quadratorum, C M H, vel, CBM,&,MEF. Sunt autem omnia quadrata triãguli,CEG, æqualia omnibus quadratis, *A* F, cum omnibus quadratis triangulorum,CBM, MEF, ergo hæc erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, CBM,MEF,& diuidẽdo omnia quadrata,*A*F,erunt illorũ tripla. Sunt autem omnia

9. huius.

quadrata,*A*G,ad omnia quadrata, AF, vt quadratum, GE, ad quadratum, EF,ideſt quadrupla ideſt, vt 12. ad 3.& omnia quadrata, AF, ſunt omnium quadratorũ triangulorum, BMC, MEF, tripla, ergo omnia quadrata, AG, erunt duodecupla omnium quadratorum triangulorum, BMC, MEF, & ſunt ad omnia quadrata,AF,vt 12.ad 3.ergo omnia quadrata,AG,ad omnia quadrata,AF, cum omnibus quadratis triangulorum, CBM, MEF, erunt vt 12. ad 4. Sunt autem omnia quadrata,AF, cum omnibus quadratis triãgulorum, CBM, MEF, æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG, vel, AEC, vt oſtenſum eſt. Ergo omnia quadrata, A G, ad omnia quadrata trianguli,CEG, vel,AEC,ſunt vt 12. ad 4. ideſt ſunt eorum tripla, quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc patet, ſi ducamus intra parallelogrammum, AG, æquidiſtantem ipſi, EG, vtcunque, RV, ſecantem, CE, in, T, &, BF, in,S,quod veluti oſtendimus,RV,æquari vni maximarum abſciſſarum,CG,dum,EG,eſt æqualis ipſi, GC,ita nunc oſtendemus quadratum,RV, æquari quadrato vnius maximarum abſciſſarum, C G, & quadratum, TV, æquari quadrato vnius omnium abſciſſarum, C G, ideſt

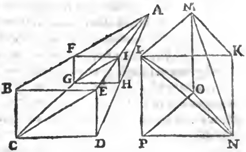
quadrato, VC; quadratum verò, RT, æquari quadrato vnius reſiduarum omnium abſciſſarum, CG, ideſt quadrato VG, vnde concludemus omnia quadrata, AG, regula, EG, æquari quadratis maximarum abſciſſarum, C G, & omnia quadrata trianguli, C E G, æquari quadratis omnium abſciſſarum, CG, & omnia quadrata trianguli, AEC, æquari quadratis reſiduarum omnium abſciſſarum, CG, & rectangula ſub triangulis, AEC, CEG, æquari rectãgulis ſub omnibus abſciſſis, & reſiduis omnium abſciſſarũ, CG, ita ſumptis, vt quoduis rectangulum intelligatur ſub vna abſciſſarum, & eius reſidua: Vnde veluti oſtendimus omnia quadrata, AG, tripla eſſe omnium quadratorum triãguli, CEG, vel trianguli, CAE, ex quo patet tripla etiam eſſe rectangu-
D.Corol. 23. huius. lorum bis ſub triangulis, AEC, CEG, (ſunt enim omnia quadrata, AG, æqualia omnibus quadratis triangulorum, AEC, CEG, & rectangulis bis ſub eiſdem triangulis) ita apparebit quadrata maximarum abſciſſarum, CG, tripla eſſe quadratorum omnium abſciſſarum, vel quadratorum reſiduarum omnium abſciſſarum, C G, & tripla etiam eſſe rectãgulorum ſub dictis omnibus abſciſſis, reſiduiſq; bis ſumptis, ſexcupla verò eorundem rectangulorum ſemel ſumptorum.
Ex diff. 1. huius. Sunt autem maximæ abſciſſarum, abſciſſæ, & reſiduæ recti tranſitus, ſi angulus, EGC, ſit rectus, vel eiuſdem obliqui tranſitus, ſi ille non ſit angulus rectus.

XXVII.

Quoniam ſola Propoſitio 22. ſuperius tradita in tota Geometria Indiuiſibilium, & iuxta priorem methodum, oſtenditur per demonſtrationem ducẽtem ad impoſſibile; vt Lectori palam fiat omnia per dictam priorem methodum poſſe directè demonſtrari, ideò hac volui præfatis Propoſitionibus ſuperaddere, quibus, tam dicta Prop. 22. quam Prop. 24. ab eadem dependens, & omnes aliæ hinc deriuatæ directè probantur.

Lemma. *Si fuerit quodcunque parallelogrammum, vt. B C D E, & in eo ducta diameter, C E; in triangulisq; B C E, E C D, tamquam in baſibus, ac vertice communi puncto, A, fuerint duæ Pyramides, A B C E, A C D E. Dico eaſdem eſſe æquales.*

Traiecto enim quocunq; plano baſi, BD, æquidiſtante, ac pyrami-



ramidem, ABCDE, ſecante, fient cõmunes ſectiones eiuſdẽ cum planis, ABE, ACD, vt ipſa, FI, GH, ipſis, BE, CD, parallelæ per Prop. 16. Vndec. Elem. & ideò erunt inter ſe parallelæ. Sic oſtẽdemus alias communes ſectiones cum planis, ABC, AED, nempè, FG, IH, eſſe parallelas, & rectam, GI, communem ſectionem eiuſdem cum plano, ACE, quod eſt duabus dictis pyramidibus commune. Erit ergo, FGHI, parallelogrammum, eiuſque diameter, GI, ipſum bifariam ſecans, quare triangulum, FGI, æquabitur triangulo, GHI. Eadem ratione oſtendemus, traiecto alio quocunque plano eidem baſi, BD, æquidiſtante, pyramideſque ſecante, facta vt ſic triangula in dictis pyramidibus adæquari. Ergo omnia plana pyramidum, ABCE, ACDE, regula plano, BD; erunt æqualia, & ſubinde per Prop. 3. ſuperiorem eadem pyramides erunt æquales.

Hoc demonſtrato ſit priſma, MOPN, triangularem habens baſim, OPN, in eoq; ducantur, LO, LN, NM, quibus ſcindetur in tres pyramides, LMNO, LMKN, LPNO. Dico præfatũ priſma triplum eſſe pyramidis, LPNO, in eadem baſi & altitudine cum eo exiſtentis. Id etiam oſtendit Euclides Lib. Duodecimo Elem. Prop. 7 ſed quia vtitur Propoſitione 5. eiuſdem Libri, quæ non oſtenſiuè demonſtratur, ideò nos vtimur antecedenti Lemmate, & Euclidi poſtea conformiter procedimus. Cum enim triangulum, MKN, ſit æquale triangulo, MON, & cõis vertex, L, etiam pyramis, LMKN, æquatur pyramidi, LMON, per dictum Lemma. Similiter pyramis, LMON, cuius vertex, L, hoc, eſt pyramis, LOMN, cuius vertex, N (eſt enim eadẽ pyramis) æquatur pyramidi, LPON, cuius vertex eſt idem, N, & baſis, LPO, æqualis ipſi, LOM, in parallelogrammo, MP. Ergo tres pyramides, LMON, LMKN, LPON, ſunt æquales. Vnde patet ipſum priſma MOPN, triplum eſſe pyramidis, LPON.

Si ergo in Schemate Propoſitionis 24. ſuperioris ſuppoſueri-

mus

Digitized by Google

mus à baſi, EG, deſcribi ex. gr. triangulum æquilaterum, ad quod ſit rectum, vel inclinatum parallelogrammum AG, & triangulum, CEG, quorum omnes lineæ deſcribant triangula æquilatera triangulo baſis, E G, tanquam communi regulæ æquidiſtantia; intelligemus, AG, eſſe figuram genitricem cylindrici, hoc eſt priſmatis triangularis, & triangulum, CEG, conici ſeu pyramidis triangularis in eadem baſi, & altitudine cũ dicto priſmate conſtituta. Ergo per demonſtrata concludemus priſma genitum ex, AG, pyramidis genitæ ex, CEG, triplum eſſe. Cum verò vt ſolidum ad ſolidum ita ſint omnia plana ad omnia plana per Prop. 3. ſuperiorem, ideò omnia triangula æquilatera parallelogrammi, AG, tripla erunt omnium triangulorum æquilaterorum trianguli, CEG, Sed vt triangulum æquilaterum ad triãgulum æquilaterum; (ijs deſcriptis à duabus rectis lineis) ita eſt quadratum ad quadratum, circulus ad circulus, & in vniuerſum figura ad ſimilem figuram (dummodò à prædictis duabus lineis tanquam ab homologis deſcribi intelligantur). per oſtenſa ab Euclide, & ab alijs particulariter in aliquibus ſimilibus figuris, & à nobis in Propoſitione 15. ſuperius citata vniuerſaliter in omnibus, patet eas eſſe in duplicata ratione ſuarum linearum, vel laterum homologorum. Ergo per Prop. 4. ſuperiorem nedum omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata, CEG, ſed vniuerſaliter omnes figuræ ſimiles, AG, ad omnes figuras ſimiles ipſius, CEG, ſimiles inquam, & parallelæ deſcriptæ à baſi, E G, erunt in ratione tripla.

Hinc denique ad ſolida tranſeuntes intelligemus per hæc demonſtrari demonſtratione directa, nedum omne priſma pyramidis ſed quemcunq; cylindricum cuiuſcumque conici in eadẽ cum eo baſi, & altitudine exiſtentis, eſſe triplum. Hoc autem magnam vim, & energiam horum Indiuiſibilium ſanè demonſtrat, vbique enim in ſolidis huius vniuerſalitatis ampliſſimos fines attingunt, quod mehercolè conſideratione dignum videtur.

His præoſtenſis illicò manifeſta fit Propoſitio 22. ſuperius tradita: hoc eſt in illius Schemate nedum omnia quadrata parallelogrammorum, A S, T B, ad omnia quadrata triangulorum, OES, & ZB ſed & omnes figuras ad omnes figuras ſimiles, eſſe in eadẽ ratione, nẽpè tripla per directã demonſtrationẽ cõfirmatur.

Similiter

Similiter patet communia ſymptomata omnium quadratorum parallelogrammorum, & vniuerſaliter cylindricorum num. 21. ſuperiori explicata, etiam ad omnia quadrata conicorum, & vniuerſaliter ad omnes conicos transferri, ſunt enim prædictorum ſubtripla: vt in ſectionibus Corollarij eiuſdem Propoſitionis 22. ſupra colligebatur.

XXVIII.

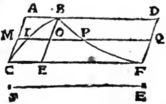
Remanet expendenda Propoſitio 23. cum ſuis Corollarijs, quæ ſi Lector attentè conſiderauerit, agnoſcet quãti illa ſint mometi. Quemadmodum enim Liber ſecundus Elem. apparet eſſe ſummæ fecunditatis, ac totius Algebræ fundamentum: ita hæc Propoſitio cum ſuis Corollarijs quæ eiuſdem ſecundi Libri doctrinã imitantur, facilè animaduertetur eſſe immenſæ vtilitatis, nucleumque Geometriæ Indiuiſibilium in his contineri, quibus ſi ipſe rectè vti ſciuerit, admiranda in Geometricis detecturum eſſe puto. Altioris enim gradus mihi eſſe videtur hæc ſectio, quæ fit per lineas in planis figuris, quam illa, quæ in dicto ſecũdo Elem. fit per puncta in lineis rectis. Per illam enim vnicum quadratum datæ rectæ lineæ, ſeu rectangulum ſcinditur varia fruſta: per hanc verò ſcinduntur omnia quadrata datæ figuræ, ſeu omnia rectangula in diuerſa fruſta; & conſequenter ſolidum ſimilare, cuius illa ſunt omnia plana intelligitur quoque ſcindi in varia ſolida. Quæ quidem ſciſſio vti mirè operatur in planis, ſic etiam in ſolidis: etenim ſoliditatem, quam aliquando, vel nullo modo poſſumus, vel difficillimè integram metiremur; in fruſta diſſectam facilè menſuramus. Et cum innotuerit menſura ſolidi ſimilaris, cuius omnia plana ſunt omnia quadrata, vel rectangula ſuæ figuræ genitricis; vice quadratorum vel rectangulorum ſubſtitutis alijs figuris ab eadem genitrice deſcriptis, illicò infinitorum ſpecie ſolidorum ſimilarium prodit menſura, quod videtur non õino ſpernẽdũ. Extant ĩnumera huiuſce rei exempla in dicta Geometria Ind. nec aliquod hic deerit, vt Lector ex vngue Leonem agnoſcere poſſit. Præcipuè in Prop. 22. aliquod ſpecimen huiuſce ſectionis præbere potuerunt lineæ, HM, IK, 92, &c. in eius Schemate diuidentes omnia quadrata parallelogrammorum, DS, FR, GQ, in ſua fruſta: & in Schemate Prop. 24. diameter, CE, diuidens omnia quadrata, AG, in omnia quadrata, AEC, CEG, & in rectangula bis

ſub

ſub eiſdem triangulis. Per hanc verò Prop 23.& per Prop. 25. & 26. ſubſequentes paratur aditus ad alia ſolida vltra cylindricos,& conicos,in quibus Indiuiſibilium valor pariter expendetur,ſicut hactenus in illis eundem experti ſumus.

PROPOS. XXV.

SI in duobus parallelogrammis ſumptis duobus lateribus pro baſibus, & regulis, ipſa parallelogramma fuerint in eadem altitudine ſumpta reſpectu dictarum baſium; in eiſdem autem baſibus, & altitudine fuerint aliæ duæ planæ figuræ ita ſe habentes, vt ſi ducatur vtcunque parallela dictis baſibus (quæ in directum ſint conſtitutæ) recta linea, eiuſdem portiones dictis parallelogrammis, & figuris interceptæ,vel ab eiſdem deſcriptæ planæ figuræ,ſint proportionales, homologis exiſtentibus, quæ ſunt in parallelogrammis, & pariter quæ ſunt in figuris, in ijſdem baſibus,& altitudine cum illis conſtitutis: dictorum parallelogrammorum, ac figurarum omnes lineæ, ſi lineæ, vel omnes figuræ planæ ſimiles,ſi iſtæ comparētur(ſimilibus inquam exiſtentibus quæ ſunt in vnaquaq; figura) erunt proportionales.



Sint parallelogramma, AE, ED, in baſibus, C E, E F, in directum iacentibus,& in eadem altitudine reſpectu dictarum baſium conſtituta, ſit autem regula, C E, vel, E F,& in eiſdem tanquam in baſibus, & eadem altitudine cum parallelogrammis,AE,ED, ſint figuræ, BCE, BEF, eiuſmodi, vt ſi duxerimus vtcunque ipſi, C F, parallelam, vt, MQ, cuius portiones interceptæ parallelogrāmis, AE, ED, ſint, MO, OQ, & interceptæ figuris ſint, I O, OP, reperiamus,MO, ad,OI, eſſe vt,QO,ad, OP. Dico omnes lineas,AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, eſſe vt omnes lineæ, BF, ad omnes lineas figuræ, BEF. Si verò vice linearum comparentur ab eiſdem deſcriptæ figuræ, ſimilibus exiſtenti-

ſtentibus, quæ ab omnibus lineis vniuſcuiuſq; propoſitarū figurarum deſcribuntur, cuius deſcribentes ſint earum lineę, vel latera homologa. Dico omnes figuras ſimiles ipſius, AE, ad omnes figuras ſimiles figuræ, BCE, eſſe vt omnes figuras ſimiles ipſius, BF, ad omnes figuras ſimiles figuræ, BEF, quia enim, MQ, vtcunque ducta eſt parallela ipſi, CF, & eſt, MO, ad, OI, vt, QO, ad, OP, permutando erit, vt, MO, ad, OQ, ſic, IO, ad, OP, ideſt, vt, CE, ad, EF, ſic, IO, ad, OP, & ſic oſtendemus, vt, CE, ad, EF, ita eſſe quaſlibet alias duas in figuris, BCE, BEF, exiſtentes ipſi, CF, parallelas, & vt vna ad vnam ſic omnia ad omnia, ideſt vt, CE, ad, EF, ita Coroll. 4. huius.
omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF, vt autē, CE, ad, EF, ita ſunt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, ergo omnes lineæ, AE, ad omnes lineas, ED, erunt vt omnes lineæ figuræ, BCE, ad omnes lineas figuræ, BEF.

Si verò vice linearum ſumamus deſcriptas, vt dictum eſt, ab eiſdem figuras, ex. g. ſi, vt quadratum, MO, ad triangulum æquilaterum, cuius latus, IO, ita reperiamus eſſe circulum, cuius diameter, OQ, ad polygonū, cuius latus, OQ, omnium autem linearum, AE, ſingulæ deſcribant quadrata, & omnium linearum figuræ, BCE, ſingulæ deſcribant triangula æquilatera, & oīum linearum, BF, ſingulæ deſcribāt circulos & figuræ BEF, ſingulę deſcribant polygona prædicto ſimilia, ita vt quæ in eadē figura sūt lineæ, vel latera deſcribētia sīt homologa, erit vt quadratū, MO, permutādo, ad circulū, OQ, ita triangulum æquilaterum, IO, ad polygonum, OP, quia verò, MO, æquatur ipſi, CE, &, OQ, ipſi, EF, ideò quadratum, MO, æquatur quadrato, CE, & circulus, OQ circu- 25.l.2.
lo, EF, & ideò, vt quadratū, CE, ad circulum, EF, ita erit triāgulum æquilaterum, IO, ad polygonū, OP, vnde, quia, MQ, vtcunque ducta eſt parallela ipſi, CF, concludemus omnia quadrata, AE, ad omnes circulos, BF, eſſe, vt omnia triāgula Ex 4. huius.
æquilatera figuræ, BCE, ad omnia polygona vni ſimilia figuræ, BEF, & permutando omnia quadrata, AE, ad omnia triangula æquilatera figuræ, BCE, eſſe, vt omnes circuli, BF, ad omnia polygona vni ſimilia figuræ, BEF.

Eodem modo fiet demonſtratio, ſi vice iſtarum aliæ aſſumantur figuræ planæ, quarum poſſunt etiam, quæ ſunt dua-

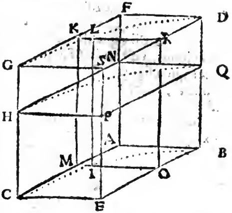
rum figurarum eſſe ſimiles, vt ſi comparentur omnia quadrata parallelogrammorum, A E, E D, & omnia triangula æquilatera figurarum, BCE, BEF, vel ſi comparentur omnia quadrata, A E, & figuræ, B C E, & omnia triangula ęquilatera, B F, & figuræ, B E F; poteſt etiam eſſe omnium quatuor figurarum omnes figuras eſſe ſimiles, vt ſi comparentur omnia quadrata eorundem vel omnes circuli, &c. Patet autem hic demonſtrationem currere quotieſcunque quæ comparantur ſunt eiuſdem generis ſcilicet, vel lineæ, vel ſuperficies, ſi verò contingat magnitudines diuerſi generis comparari, vt ſi compararentur omnes lineæ, AE, & figuræ, B C E, & omnia quadrata, BF, & figuræ, BEF, tunc quia à permutata ratione non poſſumus argumentari, cum lineam ſuperficiei comparare ſit abſurdum, ideò demonſtratio pro his non currit, quapropter aliud Theorema pro hoc ſubiungemus.

P R O P O S. XXVI.

IN eadem antecedentis Prop. figura ſi comparentur magnitudines diuerſi generis, adhuc comparatæ magnitudines erunt proportionales.

Comparentur ex.g. omnes lineæ, AE, regula, CE, ad omnes lineas figurę, BCE, & omnia quadrata, BF, regula, EF, ad omnia quadrata figuræ, BEF, ita vt ducta vtcunque ipſi, CF, parallela, MQ, reperiamus, MO, ad, OI, eſſe vt quadratum, QO, ad quadratum, O P. Dico adhuc omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, eſſe vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, BEF; Ponatur ſeorſim parallelogrammum, AE, ſimul cum figura, BCE, ſed, ne fiat confuſio, ſint ſub ampliori forma, & in ipſis tanquam in baſibus conſtituti intelligantur duo cylindrici recti, F E, nempè in baſi, AE, &, DGE, in baſi figura, BCE, & in eadem altitudine, quorum quod inſiſtit ipſi, A E, eſt parallelepipedum, vt facilè

facilè oſtendetur, intelligatur nũc parallelepipedum, FE, ſecari vtcunque plano ipſi, GE, æquidiſtante, producetur ergo ex hac ſectione in ipſo parallelogrãmum rectangulum, quod ſit, KO, eodem autem plano fiat in cylindrico, DGE, rectangulũ, LO, fiet autem & in hoc cylindrico



rectangulum, quia dictum planum ducitur per latera baſi, BCE, rectè inſiſtentia, cum ducatur æquidiſtanter ipſi, GE, quod ducitur per latera, GC, SE, erit ergo rectangulũ, kO, vnum ex ijs, quæ dicuntur omnia plana parallelepipedi, FE, regula, GE, & rectangulum, LO, erit vnum ex ijs, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, GDE, regula, GE, quæ rectangula erunt æquèalta, ac rectangulum, GE. Omnia igitur plana parallelepipedi, FE, (regula, GE,) ſunt omnia rectangula çquè alta, ac, GE, ipſius parallelogrammi, AE, (regula, CE,) & omnia plana cylindrici, GDE, ſunt omnia rectangula figuræ, BCE, æquiangula, & æquèalta, ac ipſum, GE, regula eadem, CE: Secentur nunc dicti cylindrici planis baſibus æquidiſtantibus, fient ergo cõmunes çorum ſectiones ſimiles, & æquales baſibus, ſit in parallelepipedo, FE, producta, NP, & in cylĩdrico, GDE, producta figura, HQP, erit ergo vt, AE, ad figuram, BCE, ita, NP, ad figuram, HQP, & ita etiam quælibet aliæ figuræ in ipſis per plana æquidiſtanter baſibus eoſdem ſecantia productę, & vt vna ad vnã, ſic omnes ad omnes ideſt, vt AE, ad figuram, *CB*E, ita omnia plana parallelepipedi, FE, regula, AE, ad oĩa plana cylindrici, GDE, regula eadem baſi, ſunt autem omnia plana parallelepipedi, FE, regula, AE, æqualia omnibus eiuſdem planis, regula, GE, quæ ſunt omnia rectangula ipſius, AE, regula, CE, æquèalta, ac ipſum, GE, & omnia plana cylindrici,

Coroll. 6 l. 1.

E. Def. 8. huius.

Corol. 1 l. 1.

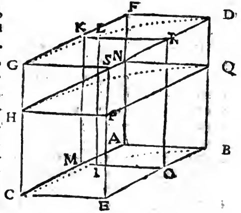
Ex Cor. 4 huius.

Ex Cor. 1 huius.

E. Def. 8. l. 1.

Ex Cor. 1 huius. GDE, regula baſi,CBE, ſunt æqualia omnibus eiuſdem planis,regula, GE, quæ & ipſa ſunt omnia rectangula figuræ, CBE,regula,CE,æquèalta, ac ipſum,GE, ergo omnia rectangula ipſius,AE,regula,CE,ęquèalta,ac ipſum,GE,ad omnia rectangula figuræ,CBE,regula,CE,æquè alta,ac ipſum,GE,
3. huius. erunt vt,AE,ad figuram, BCE, ſcilicet vt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas,BCE,regula,CE,quod ſerua,

Conſpiciatur nunc figura Theorematis anteced. in qua diximus,MO,ad,OI,eſſe vt quadratũ, QO, ad quadratum, OP. Dico omnes lineas,AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, eſſe vt omnia quadrata,BF,ad omnia quadrata figuræ, BEF, quia enim, vt MO,ad,OI, ita (ſumpta quauis communi altitudine,nempè ex. g. altitudine conſtitutorum parallelepipedorum, quæ eſt,SE,)rectangulum ſub, MO,&, SE, ad rectangulum ſub, IO, SE, ideò, vt rectangulum ſub, MO, SE, ad rectangulum ſub, I O, S E, ita erit quadratum, OQ,ad quadratum,OP,ſunt autẽ hę magnitudines eiuſdem
Ex antec. generis, nempè omnes ſuperficies, ergo omnia rectangula ipſius,AE, regula, CE, ęquèalta, ac vnum eorum,nempè,vt rectangulum ſub, CE,ES, ad omnia rectangula figuræ,BCE, regula eadem, CE, æquèalta, ac vnum eorum, vt,GE, erunt vt omnia quadrata,BF,ad omnia quadrata figuræ,BEF,omnia verò rectangula ipſius, AE, æquèalta, ac vnum eorum, vt,GE,ad omnia rectangula figuræ, BCE, æquèalta, ac ipſum,GE, ſunt vt om-
Ex proximè dictis. nes lineæ ipſius, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE. Ergo oẽs lineæ, A E, ad omnes lineas figuræ, BCE, regula, CE, erunt vt omnia quadrata, B F, ad omnia quadrata figuræ, BE F, ſunt ergo proportionales,licet ſint magnitudines diuerſi generis,nempè lineæ,& ſuperficies, quod oſtendere opus erat.



CO

COROLLARIVM I.

HInc igitur primò habetur, ſi fuerint parallelogrãmum, & figura plana in eadem baſi, & altitudine, regula ſumpta baſi, omnia rectangula parallelogrammi ęquè alta ad omnia rectangula illius figuræ æquè alta ac prædicta, eſſe vt dictum parallelogrammum ad dictam figuram, quod patuit, dum oſtenſum eſt omnia rectangula ipſius, AE, altitudinis, S E, ad omnia rectangula figuræ, B C E, altitudinis eiuſdem, SE, eſſe vt, AE, ad figuram, BCE.

COROLLARIVM II.

HAbetur ſecundò cylindricos in eadem altitudine exiſtentes eſſe inter ſe, vt baſes, quod de cæteris, veluti de ſupradictis, FE, GDE, oſtendetur, quamuis aliter etiam id aliundè infra colligetur.

COROLLARIVM III.

HAbetur tertiò, ſi non ſint in ſupradictis duobus Theorematibus expoſita duo parallelogramma, & duæ figuræ, ſed vnum tantum, & vna figura in eadem baſi, & altitudine cum ipſo, cuius baſi poſita pro regula, & ſumpto vtcunque puncto in vno laterum baſi inſiſtentium, perque ipſum baſi ducta parallela, reperiatur eam, quæ intercipitur parallelogrammo ad eam, quæ intercipitur figura, vel figuras ſimiles ab ipſis deſcriptas, tãquam homologis lineis, vel lateribus, eſſe vt vnam ex maximis abſciſſarũ lateris, in quo ſumptum eſt punctum, ad abſciſſam per ductam baſi æquidiſtantem, vel vt iſtas adiuncta quadam recta linea, vel vt iſtarum figuras ſimiles ab ipſis tanquam lineis, vel lateribus homologis deſcriptas, ita vt figuræ deſcriptæ à ſingulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ parallelogrammi, & dictæ figuræ, ſint ſimiles, vt pariter, quæ deſcribuntur à ſingulis earum, quæ dicuntur maximæ abſciſſarum, vel abſciſſæ dictũ lateris; quod adhuc dictę magnitudines collectæ erunt propor-

proportionales: Vt ex. g. ſi in Theorematis antecedentis figura habeamus tantum parallelogrāmum, BF, & in eiuſdē baſi, EF, & eadem altitudine, figuram, BEF, & ſumpto in vno laterum, BE, DF, vtcunque puncto, O, & per, *O*, ducta, *O*Q, parallela ipſi, EF, reperiamus, Q*O*, ad, OP, eſſe vt, EB, ad B*O*, vel figuras ſimiles deſcriptas ab, *O*Q, O P, tanquam lineis, vel lateribus homologis, vt ex.g. quadratum, QO, ad quadratū, *O*P, eſſe vt, *E*B, ad, B*O*, vel vt, *E*B, adiuncta quadā linea ad, B*O*, adiūcta eadē, vel vt ab iſtis deſcriptas ſimiles figuras, D, dico collectas magnitudines, quæ comparantur eſſe proportionales. Nam ſi ipſi, BE, intelligatur applicatum parallelogrāmum AE, cuius baſis ſit, CE, in directum ipſi, EF, conſtituta, &, CE, ęqualis ipſi, EB, tunc omnes lineæ, A*E*, regula, CE, ſunt æquales maximis abſciſſarum, BE, vt probatum eſt, & omnes abſciſſę æquales omnibus line s trianguli, BC*E*, ſi ſit iuncta, BC, (quę ſecet, M*O*, in, X,) vnde vice earum, quę dicuntur maximæ abſciſſarum, vel abſciſſæ ipſius, BE, rectè ſumemus omnes lineas, AE, & trianguli, BC*E*, & ita reperiemus quadratum, Q*O*, ad quadratum, *O*P, ex. g. eſſe vt, M*O*, ad OX, vel vt quadratum, M, O, ad quadratum, OX, vel vt aliæ figurę ſimiles ab ipſis deſcriptę, ſiue ab ipſis ſimplicibus, ſiue ab ipſis adiuncta quadam linea, vnde caſus iſte ad caſum Theorematis præſentis, vel antecedentis deductus erit, & ideò patebit, omnes lineas, AE, ad omnes lineas trianguli, BCE, vel omnes figuras ſimiles, AE, ad omnes figuras ſimiles triāguli, BC*E*, ideſt vel maximas abſciſſarum, B E, ad abſciſſas omnes ipſius, BE, vel earum figuras ſimiles eſſe, vt omnia quadrata, BF, ad omnia quadrata figuræ, B E F. Vocabuntur autem iſtæ; Quatuor ordinum magnitudines collectæ iuxta quatuor magnitudines proportionales vtcunq; inuentas, quæ fuerunt ex. g. prima quadratum, OQ, ſecunda quadratum, OP, tertia, EB, quarta, BO, magnitudines autē collectę iuxta primam ſcilicet ex. g. omnia quadrata, BF, dicentur primi ordinis, collectæ verò iuxta ſecundam ſcilicet omnia quadrata figura, BEF, magnitudines ſecundi ordinis, collectæ verò iuxta tertiam magnitudines tertij ordinis, & tandem collectæ iuxta quartam magnitudines quarti ordinis. Sic igitur appellabimus hos quatuor magnitudinum ordines. In

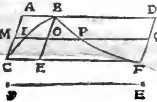
Coroll. 2. 19. huius.

ſupra-

ſupradictis autem quod dicimus de abſciſſis, idem intellige de reſiduis abſciſſarum,& quod de ipſis ſimplicibus, idem de eiſdem adiunctis alijs, ſiue ſint recti, ſiue eiuſdem obliqui tranſitus: Hoc autem Corollarium præ cęteris ſummè animaduertendum eſt,ac memoriæ diligentiſſimè commendandum, ex hoc enim potiſſimas demonſtrationes tanquam ex fonte deriuari ſtudioſus in ſequentium Librorum lectione facilè comprehendet.

XXVIIII.

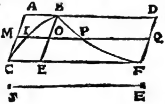
Poterat ſinè his Propoſit. ſufficere Propoſitio 4. in qua quodãmodo iſta dua, vel ſaltem prior virtualiter continetur: verum hæ ſuperaddita fuerunt vt clarè conſpici poſſent quatuor ordines magnitudinum (qui paſſim in dicta Geometria Ind. inuicem cõparantur) in quatuor oblatis figuris aſſumptarum, quarum figurarum duæ ſunt ſemper parallelogramma, & reliqua duæ iiſdem inſcribuntur. Vt in Schemate Propoſitionis 25. quod hic repetimus prima figura eſt parallelogrammum, AE, ſecunda, BCE, eidem inſcripta; tertia parallelogrammum, BF; quarta denique eſt figura, BEF ipſi, BE, inſcripta: & omnes in eiſdem parallelis, hoc eſt in eadem ſunt altitudine. Magnitudines autem comparata poſſunt eſſe vel omnes eiuſdem generis,, vel diuerſi. Vt eiuſdem generis erũt ſi comparentur omnes lineæ earundem quatuor figurarum, vel earum omnes figuræ planæ vt omnia quadrata omnes circuli &c. in his autẽ poteſt contingere quoque varietas ſpecifica, vt ſi prima, & ſecunda figuræ comparentur omnia quadrata, tertia vero, & quarta omnes circuli &c. vel ſi omnium quatuor variæ aſſumantur ſpecies figurarum. & hæc omnia ſpectant ad Propoſitionẽ 25. pendentq; ex Propoſitione 4. eiuſque Corollario. Verum ſi comparata magnitudines fuerint diuerſi generis, vt ſi duarum omnes lineæ comparentur, reliquarum verò duarum ex. g. omnia quadrata; tunc quia in magnitudinibus diuerſi generis non licet arguere à permutata ratione, non enim linea ſuperficiei eſt comparabi-



parabilis; ideò opus fuit etiam Propoſitionem 26. ſuperaddere, qua certi fieri poſſemus etiam hos quatuor magnitudinum datarum quatuor figurarum ordines eſſe proportionales (quotieſcunque quatuor ſingulares magnitudines, eadem linea, vel plani regulæ æquidiſtantis vtcunque ſumpti traiectione effecta, reperiantur proportionales) etiam ſi comparatæ magnitudines ſint diuerſi generis.

XXX.

Corollarium primum Propoſitionis 26. eſt maximè adnotandum, per illud enim nedum intelligimus, ſi fuerint parallelogrãmum, & figura plana in eadẽ baſi & altitudine, regula ſumpta baſi, omnia rectangula parallelogrammi æquè alta ad omnia rectangula dictæ figuræ æquè alta ac prædicta, eſſe vt dictum parallelogrãmum ad dictam figuram: vt aſſumpto denuò Schemate Propoſitionis 25. omnia rectangula ipſius, AE, altitudinis, SE, ad omnia rectangula figuræ, BCE, eiuſdem altitudinis, ES, eſſe vt AE, ad figuram; BCE, ſubindeq; vt omnes lineæ, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE: Verum per hæc quoq; admonemur huiuſmodi doctrinam adeò ſubleuari poſſe: vt & omnes Dignitates ſeu Poteſtates Coſicas attingat. Velut enim in eodem Schemate ſi cõparetur recta, MO, ad rectam, OI, tunc ſumpta alia quacunque pro communi altitudine, vt eadem, MO, rectè inferimus vt, MO, ad OI, ſic eſſe rectangulum ſub MO, MO, hoc eſt quadratũ MO, ad rectangulum ſub, MO, OI; vnde per Propoſitionem 26. concludimus omnes lineas, AE, ad omnes lineas figuræ, BCE, eſſe vt omnia quadrata, AE, ad omnia rectangula ſub AE, & figura BCE: ita ſi ex. gr. primò compararetur quadratum, MO, ad quadratũ, OI, deinde alia quæuis recta vt, MO, ſumeretur tanquam communis altitudo, ſicuti rectè inferremus vt quadratum, MO, ad quadratum, OI, ſic eſſe paralleleppipedum ſub baſi quadrato, MO & altitudine, MO, hoc eſt cubum ipſius, MO, ad paralleleppipedum ſub baſi quadrato, IO, altitudine eadem, MO: non ſecus rectè concluderemus iuxta normam præfatæ Propoſitionis 26. cubos omnium linearũ, AE, ad paralleleppipeda ſub omnibus quadra-



quadratis figuræ, BCE, tanquam baſibus, & altitudinibus omnibus lineis parallelogrammi, AE, eſſe vt omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata figuræ, BCE. Vel ſi pro communi altitudine ſumeretur non linea, MO, ſed quæcunque eiuſdem Dignitas coſſica, vt ex. gr. ſecunda Dignitas, hoc eſt quadratū ipſius, MO, ad inſtar lineæ; ſicuti rectè inferremus, vt quadratum, MO, ad quadratū, OI, ſic eſſe factū ex quadrato, MO, in quadratū, MO, ſ. biquadratū, MO, ad factū ex quadrato, MO in quadratū, IO: ita rectè cōcluderemus oīa biquadrata, AE, (nempè biquadrata omnium linearum, AE, ad inſtar rectangulorum) ad facta ſub omnibus quadratis, AE, in omnia quadrata, BCE, eſſe vt omnia quadrata, AE, ad omnia quadrata, BCE. Et ſic res ſe haberet in alijs quibuſcunque Dignitatibus coſſicis. Hæc vt leuiter hic tacta, fuſius ſuo loco explicabuntur, vbi quoque ad imitationem Propoſitionis 23. eiuſq; Lemmatum, conſiderabimus ſectionem, quæ fit in figuris planis à lineis, nedum quatenus diuidunt omnia quadrata ipſarum figurarum, iuxta propoſitam regulam; vt fit in dicta Propoſitione, ſuiſq; Corollarijs; ſed etiam prout diuidunt earundem figurarum omnes cubos, vel omnia biquadrata, aliaſque ſequentes Dignitates &c. in infinitum progredientes. Vt in ſuperiori Schemate nedum conſiderabimus lineam, BG, quatenus diuidit omnia quadrata, AE, in omnia quadrata trilineorum, ACB, BEC. & in rectangula bis ſub eiſdem trilineis (vt docet nos Sectio, D, Corollarij Prop. 23. ſuperioris) ſed etiam quatenus diuidit omnes cubos, vel omnia biquadrata &c. eiuſdem, AE, in ſua fruſta, quæ erit mirabilis extenſio Doctrinæ Secundi Elementorum.

XXXI.

Abſciſſæ & reſiduæ &c. in Cor. 3. præfatæ Prop. 26. conſideratæ, necnon in Cor. Propoſitionis 24. commutabuntur in omnes lineas triangulorum componentium quadratum, vel rhombum adiacentem lateri, in quo ſumendæ in dictis locis præcipiuntur abſciſſæ, & reſiduæ &c. iuxta monita num. 24. Quapropter quatuor ordines magnitudinū in eodem Cor. 3. expenſi (quorum duo ad abſciſſas & reſiduas &c. reducuntur) intelligentur ſpectare ad quatuor figuras in iiſdem parallelis conſtitutas, nu. 28. explicatas, quarum duæ ſunt ſemper parallelogrāma, & reliquæ

Digitized by Google

duæ conſiſtunt vnaquæq; cum ſuo parallelogrammo in eadem baſi. Ita vt cum traiecta vtcunque linea, vel plano in ipſis figuris regulæ datæ æquidiſtante, emerſerint quatuor ſingulares magnitudines proportionales, ex vi huius Corollarij in ferre poſſimus omnes horum quatuor ordinum magnitudines eſſe proportionales: per quod ſtrata via eſt ad innumerabilia ſolida menſuranda.

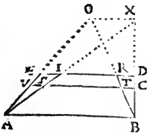
XXXII.

Veluti in planis poſt parallelogramma, & triangula eorumtrapezia in Prop. 20. congruè expenſa fuerunt: ita poſt cylindricos & conicos, eorundem conicorum fruſta conſiderant ſequentes Propoſit. 27. & 28. quas ideò hic pariter adiungimus

PROPOS. XXVII.

SI duo trapezia fuerint in eadem baſi, ſumpto vno laterum æquidiſtantium pro baſi, & regula, & fuerint etiam in eadem altitudine reſpectu illius baſis, & latera baſi parallela fuerint æqualia, trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata erunt æqualia.

Sint duo *trapezia*, AERB, IABD, *in* eadem baſi, AB, quæ ſit ſumpta pro regula, cuique latera, ER, ID, ſint parallela & iter ſe æqualia. Dico trapezia eſſe æqualia, & omnia eorundem quadrata eſſe æqualia. Producãtur, AE, BR, donec ſibi occurrant, vt in O, &, AI, BD, donec ſimul incidãt, vt in, X, & iungatur, OX. Quia ergo, ER, parallela eſt ipſi, AB, erũt triangula, AOB, EOR,



Iux. diff. 1. Sexti Elem. ſimilia, & eadem ratione ſimilia erunt triangula, AXB, IXD, ergo vt AB, ad, ER, vel ad, ID, illi æqualem, ita erit, BO, ad OR, vt

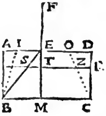
4. Sexti Elem. autem, AB, ad, ID, ita eſt, BX, ad, XD, ergo vt, BO, ad, OR, ita eſt, BX, ad, XD, ergo, OX, parallela eſt ipſi, ED. Ducatur intra trapezia parallela ipſi, AB, vtcunque, VC, ſecans, XA, in, S, &, OB, in, T, ſunt igitur triangula, AOB, VOT, ſimilia, & pari-

& pariter ſunt ſim lia triangula, AXB, SXC, ergo, AB, ad, VT, erit vt, BO, ad, OT, idest vt, BX, ad, XC, (quia, VC, parallela eſt ipſi, AB, & conſequenter ipſi, OX,) ideſt vt, AB, ad, SC, ergo, VT, SC, erunt æquales, & eorum quadrata pariter æqualia. *S*ic autem de cæteris ipſi, AB, parallelis idem oſtendetur, ergo omnes lineæ trapezij, AERB, erunt æquales omnibus lineis trapezij, AIDB, regula, AB, & conſequenter ipſa trapezia erunt æqualia, & oĩa earundem quadrata pariter æqualia, quod oſtendere opus erat.

PROPOS. XXVIII.

SI parallelogrammum, & trapezium habuerint communem baſim vnum æquidiſtantium laterũ trapezij, quod ſit ſumptum pro regula: Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata trapezij erunt, vt quadratum dictæ baſis ad rectangulum ſub parallelis lateribus trapezij, cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ dictorum laterum æquidiſtantium.

Sit parallelogrammum, AC, & trapezium, IBCO, cuius laterum æquidiſtantium alterum, vt, BC, ſit communis baſis ipſi, & trapezio, & regula. Dico ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata trapezij, IBCO, eſſe vt quadratum, BC, ad rectangulum ſub, BC, IO, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ ipſarum, BC, IO. Sumatur in, DA, ipſa, ED, æqualis ipſi, IO, & iungatur, BE, & per, E, ipſis, AB, DC, parallela ducatur, EM: Omnia ergo quadrata trapezij, EBCD, per lineam, EM, diuiduntur in omnia quadrata trianguli, EBM, in omnia quadrata, MD, & in rectãgula ſub triangulo, EBM, &, EC, bis ſumpta, ad horum ergo ſingula comparemus omnia quadrata, AC. Igitur omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, CE, ſunt vt quadratum, BC, ad quadratum, CM, quod ſerua. Inſuper omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata, AM, ſunt vt quadratum, CB, ad quadratum, BM, item omnia quadrata, AM, ſunt tripla omnium



Per D.Coroll. 23. huius.

9. huius.

9 huius.

Digitized by Google

24. huius. nium quadratorum triãguli,EBM,ideſt ſunt ad illa,vt quadratum,BM,ad $\frac{1}{3}$. quadrati,BM,ergo ex æquali,omnia quadrata,AC,ad omnia quadrata trianguli,EBM,erũt vt, BC, ad $\frac{1}{3}$. quadrata, B M, quod pariter ſerua. Tandem omnia 14. huius. quadrata,AC, ad rectangula ſub,AM,MD, erunt vt quadratum,BC,ad rectangulum,BMC,rectãgula verò ſub, AM, MD, ad rectangula ſub triangulo, EBM, & ſub, MD, ſunt Coroll. 1. 26. huius. vt, AM, ad triangulum, EBM,(quia illa ſunt omnia rectangula parallelogrammi, AM, & trianguli, EBM, æquè alta, altitudinis nempè æqualis ipſi, MC, ſumpta regula, BM,) ideſt dupla,ideſt vt rectangulum,BMC,ad eiuſdem dimidiũ. Ergo ex æquali omnia quadrata, A C, ad rectangula ſub triangulo,EBM,& ſub,MD,erunt vt quadratum,BC,ad dimidium rectanguli,BMC, ad eadem verò bis ſumpta erunt, vt quadratum,BC,ad rectãgulum,BMC. Ergo, colligendo, omnia quadrata, A C, ad omnia quadrata, E C, ad omnia quadrata trianguli, EBM, & ad rectangula bis ſub triangulo,EBM,& ſub, EC, erunt vt quadratum,BC,ad quadratũ, C M,cum rectangulo, CMB, & $\frac{1}{3}$. quadrati, BM.Sed rectangulum,BMC, cum quadrato, MC, conficit rectangulũ ſub, B C, C M, ergo omnia quadrata, AC, ad omnia quadrata Per D.Corol. 23.huius. trianguli, EBM, parallelogrammi, MD, & rectangula bis ſub eiſdem, ideſt ad omnia quadrata trapezij, EDCB,ideſt Ex antec. ad omnia quadrata trapezij, IBCO, (quia, IO,ED, ſunt æquales)erunt,vt quadratum, BC, ad rectangulum ſub,BC, CM,ideſt ſub,BC, ED, vel, IO, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, BM, quæ eſt differentia parallelarum,BC,ED,ſiue,BC,IO, ipſius trapezij,IBCO,quod oſtendere opus erat.

XXXIII.

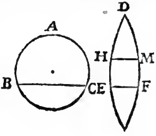
In Propoſitione 28. ſuperiori, & illius Schemate apparet vſus ſectionis, D, Corrollarij Propoſ. 23. dum linea EM, conſideratur ſecare omnia quadrata trapezij, E B C D, in omnia quadrata figurarum, EBM, EMCD, & in rectangula bis ſub iiſdem. Quoniam verò reiectæ ſunt abſciſſæ, & reſidua &c. ideò prætermiſſum eſt Corollarium ipsius Prop 28. Sic relinquuntur & ſequentes Propoſitiones à 29. vſque ad 33. excluſiuè, cum ſuis Corollarijs, quia ſunt Propositiones Lemmaticæ, præſertim pro doctrina

ctrina Libri 3.4. ac 5. quam hic totam extendere nequaquam intendo, ſed tantum è dicta Geometria Ind. huc ea duxi transferenda, quibus priorem Indiuiſibilium methodum Lector ſufficienter edoceri poſſet. Sequuntur nunc duæ Propoſitiones, nẽpè 33 & 34. cum ſuis Corollarijs quarum veritas cum in antecedentibus ſuppoſita fuerit ideò illis præmittendæ ipſæ fuiſſent. ſed ne ordo Libri ſecundi dictæ Geometriæ perucrteretur, ſuo loco relictæ ſunt. De ijs autẽ præmonitus fuit ſtudioſus, ne ob nimiã abſtractionem omnium quadratorum cõſideratarum figurarum, nimis iniucunda eidem euaderet hæc doctrina, illius finem non percipienti. Nunc ergo de præaſſumptis certus fit dum in Prop. 33. eiuſque Corollarijs intelligit in conſideratione omnium quadratorum datarum figurarum ſimul comprehendi & omnes alias ſimiles earundem figuras & omnia ſolida ſimilaria ab eiſdem genita. Sic in Prop. 34. clarè intuetur ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis iuxta regulas baſes eſſe cylindricos, & ex triãgulis eſſe conicos. ſicuti ex trapezijs, eſſe conicorum fruſta, quæ ſupra aſſumebantur.

PROPOS. XXXIII.

EXpoſitis duabus vtcunque figuris planis, & in earum vnaquaque ſumpta vtcunque regula: vt omnia quadrata earumdem figurarum ſumpta iuxta dictas regulas, ita erunt ſolida quæcumque ad inuicem ſimilaria ex eiſdem figuris genita iuxta eaſdem regulas.

Sint duæ vtcunque figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ vtcunque ſint ſumptę regulæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur, vt omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ita eſſe ſolidum ſimilare quodcũque genitum ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, DEF, iuxta regulam, EF. Ducatur in altera dictarum figurarum, vt in, DEF, vt-



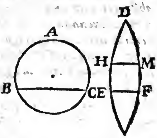
Vide B. Definit. 8. huius.

cumq;

cumque regulæ, EF, parallela, HM, quia ergo quadrata habent inter ſe duplam rationem laterum, à quibus deſcribuntur, ideò quadratum, EF, ad quadratū, HM, habebit duplam rationem eius, quam habet, EF, ad HM, ſed etiam aliæ duæ quæcumq; figuræ planæ ſimiles ab eiſdem, tanquam lineis, vel lateribus homologis earumdem deſcriptæ habent duplam rationem earundem, ergo, vt quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita erit alia quælibet figura plana deſcripta ab, E F, ad ſimilem, ſibi deſcriptam ab, H M, ita vt, E F, H M, ſint earum homologæ, & permutando, quadratum, E F, ad aliam figuram deſcriptam ab, E F, erit vt quadratum, H M, ad figuram prædictæ ſimilem ab, H M, deſcriptam. Sic etiam eſſe oſtendemus quadratum cuiuſcumque in figura, D E F, ductæ ipſi, E F, æquidiſtantis, ergo, vt vnum ad vnū, ſic omnia ad omnia, ideſt vt quadratū, EF, ad figuram aliam quamcumq; deſcriptā ab, EF, ſic erūt omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ad omnes figuras ſimiles eiuſdem figuræ, DEF, regula eadē, EF, ſimiles inquā deſcriptæ ab, EF. Vt autem quadratum, EF, ad figuram deſcriptam ab, EF, ita quadratum, BC, ad figuram, quæ deſcribitur à, BC, ſimilis ei, quæ deſcripta eſt ab EF, ita vt deſcribentes ſint earumdem homologæ, & vt quadratum, BC, ad figuram deſcriptam à, B C, ſic eſſe oſtendemus omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnes figuras ſimiles eiuſdem figuræ, ABC, ſimiles inquam deſcriptæ à, B C, vel ab, EF, eodem modo, quo id oſtendimus in figura, DEF: ergo omnia quadrata figuræ, ABC, ad omnes figuras ſimiles alias quaſcunq; eiuſdem figuræ, ABC, erunt, vt omnia quadrata figuræ, D E F, ad omnes figuras ſimiles prædictis eiuſdem figuræ, D E F, regulis eisdem BC, EF, ergo permutando, vt omnia quadrata figuræ, A B C, ad omnia quadrata figuræ, D E F, ita erunt omnes figuræ ſimiles quæcumque figuræ, A B C, ad omes figuras ſimiles prædictis figuræ, D E F. Quia verò omnes figuræ ſimiles

8. & 15. huius. 15. huius.

Coroll. 4. huius.



les alicuius figuræ planæ regula quadam ſumptæ, ſunt omnia plana ſolidi, quod dicitur ſimilare, & genitum ex tali figura iuxta eandem regulam, ideò, vt omnes figuræ ſimiles quæcunque ipſius figuræ, ABC, regula, BC, ad omnes figuras ſimiles ipſius figuræ, DEF, regula, EF, ſimiles inquam prædictis, ideſt vt omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ita erunt omnia plana ſolidi ſimilaris cuiuſcunque geniti ex figura, A B C, iuxta regulam, BC, ad omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex figura, DEF, iuxta regulam, EF. Vt autem omnia plana duorum ſolidorum ſic & ipſa ſolida, ergo etiam ſolida ſimilaria genita ex figuris, ABC, DEF, (quę ſunt ſimilaria ad inuicem, quia omnes figuræ ſimiles figuræ, A B C, ſunt etiam ſimiles omnibus figuris ſimilibus figuræ, DEF,) iuxta regulas, BC, EF, erunt ad inuicem, vt omnia quadrata earumdem figurarum eiſdem regulis ſumpta, quod erat oſtendendum.

B. diff. 8. huius.
Poſtulatū 2. huius.
3. huius.

COROLLARIVM I.

HInc patet, ſi in figura, A B C, vtcumque regula, BC, deſcripſerit duas quaſcunque figuras, quod vt vna ad aliam, ita erunt omnes figuræ ipſius, A B C, ſimiles vni deſcriptarum, ad omnes figuras eiuſdem ſimiles alteri deſcriptarum, ideſt ita omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex, ABC, iuxta regulam, B C, (ſimilibus exiſtentibus eiuſdem figuris vni deſcriptarum) ad omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex eadem figura iuxta eandem regulam (huius ſimilibus exiſtentibus figuris alteri deſcriptarum) ideſt ita erunt ſolida ſimilaria genita ex eadem figura, ABC, iuxta communem regulam, BC, non tamen ſimilaria ad inuicem, ſed quarum omnia plana ſunt omnes figuræ ſimiles eiuſdem, ABC, ſimiles inquam, quæ ſunt vnius dictorum ſolidorum vni deſcriptarum à, BC, figurarum, & quæ ſunt alterius, ſimiles alteri deſcriptarum figurarum.

CO-

COROLLARIVM II.

VNde ſolida ſimilaria, ſed non ad inuicem,genita ex. g. à figuris,ABC, DEF, iuxta regulas,BC,EF,quæ duas figuras planas diſſimiles deſcripſerint, quibus ſint ſimiles figuræ,quæ dicuntur omnia plana dictorum ſimilarium ſolidorum; erunt ad inuicem, vt ipſæ figuræ diſſimiles deſcriptæ ab ipſis,BC,EF. Nam ſolidũ ſimilare genitũ ex,DEF,iuxta regulam,EF,ad ſibi ſimilare genitum ex figura, ABC, iuxta regulam,BC,erit vt figura deſcripta ab, EF, ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam à, BC, item ſolidum hoc ſimilare genitum ex figura,A*B*C,iuxta regulam,*B*C,ad ſolidum ſimilare, ſed non ſibi, genitum ex eadem figura iuxta eandem regulam,BC, erit vt figura deſcripta à, *B*C, ſimilis deſcriptæ ab, EF, ad figuram ſibi diſſimilem deſcriptam ab eadem, *B* C, (quibus figuris diſſimilibus ſint ſimiles figuræ,quæ dicuntur omnia plana ſolidorum ſimilarium genitorum ex eadem figura,A*B*C,iuxta communem regulã,*B*C,) ergo ex æquali ſolidum ſimilare genitum ex figura, DEF, ad ſolidum ſimilare,ſed non ſibi, genitum ex figura,A*B*C, (genita intellige iuxta regulas,EF,BC,)*erit vt figura deſcripta* ab,EF,cui sũt ſimiles figuręhuius ſolidi, ad figuram deſcriptam à.BC,prędictæ diſſimilem, cui ſunt ſimiles figuræ ſolidi ex, BAC, geniti iuxta regulam, B C.

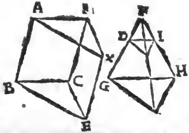
PROPOS. XXXIV.

SOlida ſimilaria genita ex parallelogrammis iuxta regulam vnum eorumdem laterum, ſunt cylindrici. Et ſolida ſimilaria genita ex triangulis iuxta regulam vnum eorundem laterum,ſunt conici; quorum baſes erunt figuræ à regulis deſcriptæ,& latera,eorundem parallelogrammorum, vel triangulorum latera regulis inſiſtentia.

Sit ergo expoſitum quodcumque parallelogrammum, AC,& triangulum, FGH, in quibus pro regulis ſumantur latera,BC,GH Dico ſolidum quodcumque ſimilare genitũ

ex pa-

ex parallelogrammo, AC, (iuxta regulam, BC,) eſſe cylindricum, cuius baſis erit à, BC, deſcripta figura, & latus vtrũuis ipſorum, AB, LC, laterum regulæ, BC, inſiſtentium; Et genitum ex triangulo, FGH, iuxta regulam, GH, eſſe conicum, cuius baſis erit à, GH, deſcripta figura, & latus vtrumuis duorum, FG, FH, regulæ, GH, inſiſtentium. Deſcribantur à regulis, BC, GH, figuræ vtcunque planæ, BCE, GHP, æqualiter inclinatæ planis, AC, FGH, deinde per circuitum figuræ, BCE, feratur latus, AB, cui ſit æquale latus, EX, quodque puncto, A, deſcribat circuitum figuræ, AXL, & per circuitum figuræ, GHP, feratur vtrumuis laterum, FG, FH, indefinitè productum verſus figuram, GHP, cuius portio inter, F, & pũctum, P, ſit, FP, erit ergo ſolidũ, quod clauditur ſuperficie cylindrica, deſcripta latere, AB, & duabus figuris, ALX, B C E, cylindricus; & quod clauditur ſuperficie conica deſcripta altero



Ex def. 3. & 4. l. 1.

laterum, FG, FH, indefinitè producto, & figura, GHP, erit conicus. Dico autem ſolidum ſimilare genitum ex, A C, iuxta regulam, BC, cuius omnia plana ſint omnes figuræ ipſius, A C, ſimiles figuræ, B C E, eſſe hunc cylindricum, ACE, nam quælibet earum, quæ dicuntur omnes figuræ ſimiles parallelogrammi, AC, regula, B C, ſimiles inquam figuræ, BCE, eſt etiam ſimiliter poſita, ac, BCE, deſcripta latere homologo ipſi, BC, igitur eius perimeter erit in ſuperficie cylindrica deſcripta latere, AB, ſi enim aliquid eius eſſet intra, vel extra illam ſuperficiem, aliquid eius eſſet intra, vel extra communem ſectionem talis aſſumptæ figuræ, & ſuperficiei cylindricæ: talis autem communis ſectio eſt perimeter figuræ ſimilis, & ſimiliter poſitæ, ac, BCE, (quia ſi cylindricus plano ſecetur baſi æquidiſtante concepta figura erit ſimilis, & ſimiliter poſita, ac baſis) ergo haberemus duas figuras ab eodem latere homologo deſcriptas, ſimiles æquales, & ſimiliter poſitas, & non congruentes, quod eſt abſurdum,

A. def. 8. huius.

Corol. 12. l. 1.

Corol. 25. l. 1.

K con-

congruent igitur, erit ergo aſſumpta figura, quæ eſt vna earum, quæ dicuntur omnes figuræ parallelogrammi, AC, ſimiles ipſi, BCE, regula, BC, & eſt vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex, AC, iuxta regulam, BC, erit, inquam, aſſumpta figura etiam vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, A C E, regula, BCE, quod etiam de cæteris ſimili modo oſtendetur. Ergo ſolidum ſimilare genitum ex, AC, iuxta regulã, BC, & cylindricus, ACE, habebunt omnia plana (regula, BCE, aſſumpta) communia, ergo ſolidum ſimilare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, erit idem cylindrico, ACE, cuius baſis eſt figura, BCE, & latus alterum laterum, AB, LC. Similiter oſtendemus ſolidum ſimilare genitum ex triangulo, F G H, iuxta regulam, GH, eſſe idem conico, FGHP, cuius latus alterum laterum, FG, FH, & baſis eſt figura, GHP, conſimili via ſupradictæ procedentes, quæ erant demonſtranda.

COROLLARIVM I.

HInc manifeſtum eſt, ſi figuræ deſcriptæ à, BC, GH, ſint circuli, quòd ſolidum ſimilare genitum ex, AC, erit cylindrus, & genitum ex triangulo, FGH, conus, ſiue recti, ſiue ſcaleni; ſi verò deſcriptæ figuræ ſint rectilineæ, genitum ex, AC, erit priſma ex, FGH, autem pyramis, ſiue recta, ſiue ſcalena cætera autem nomine communi vocantur ſolida ſimilaria genita ex eiſdẽ fig. iuxta regulas, intellige, BC, GH.

COROLLARIVM II.

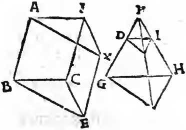
SI intra triangulum, F G H, ducamus ipſi, GH, parallelã vtcunque, quæ ſit, DI, abſcindens à triangulo, FGH, trapezium, DH, oſtendemus eodẽ modo, quo ſupra, ſolidum ſimilare genitum ex trapezio, DH, iuxta regulam, GH, eſſe fruſtum ſolidi ſimilaris geniti ex triangulo, FGH, iuxta eandem regulam, ideſt fruſtum conici, FGHP, ideſt coni, cum figura deſcripta à, GH, eſt circulus, vel fruſtum pyramidis rectæ, ſiue ſcalenæ, cum illa eſt figura rectilinea, quæ facilè oſtendentur.

B. defin. 4. l. 1.

CO-

COROLLARIVM III.

Tandem patet vice verſa, ſi quiuis cylindricus, vel conicus, vel eius fruſtum, intelligatur ſecari per latera, de illo plano ſecante conceptam in ſecto ſolido figuram eſſe genitricem earumdem per deſcriptionem ſimilium figurarũ, & ipſa eſſe ſolida ſimilaria genita ex eiſdem figuris genitricibus iuxta regulas communes ſectiones planorum ſecantium, & baſium, quæ figuræ genitrices in cylindricis erunt parallelogramma, in conicis triangula, & in fruſtis conicis trapezia. Igitur verum eſt quodlibet ſolidum ſimilare genitum ex parallelogrammo iuxta regulam vnum laterum eſſe cylindricum, & genitum ex triangulo iuxta regulam vnum laterum eſſe conicum, & ex trapezio eſſe fruſtũ conicum; & vice verſa, quemlibet cylindrum eſſe ſolidum ſimilare genitum ex parallelogrammo in ipſo producto per planum per latera ductum, genitum inquam iuxta communem ſectionem eius, & baſis cylindrici; & quemlibet conicum eſſe ſolidum ſimilare genitum ex triangulo in eodem producto per traiectionem plani per latera, genitum, inquam iuxta communem ſectionem eius, & baſis dicti conici; & quodlibet fruſtum conicum eſſe ſolidum ſimilare genitum ex trapezio in ipſo producto per traiectionem plani per latera eiuſdem fruſti, genitũ inquam iuxta regulam communem ſectionem eius, & vnius baſium eiuſdem. Siue ergo, expoſito parallelogrammo, & triangulo intellexeris iuxta diff. 8. huius, deſcribi omnes figuras ſimiles eis quæ deſcribuntur à baſibus dicti parallelogrammi, & trianguli, & ſic conceperis effici ſolidum, cuius illæ ſunt omnia plana; ſiue intellexeris latus dicti parallelogrammi, vel trianguli indefinitè productum reuolui per circuitum figurarum à baſibus deſcriptarum, vt habeas ſolidum dicta ſu-



13. l. 1. 2. & Cor. l. 1.

Cor. 6. l. 1. 16. l. 1.

Diff. 3. & 4. l. 1.

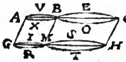
perficie deſcripta, & baſi, vel basibus comprehenſum, idem vtroq; modo tibi obuenit ſolidum. Poteſt autem prior vocari generatio ſolidorum per deſcriptionem figurarum; poſterior autem, generatio ſolidorum per reuolutionem facta, quę maioris dilucidationis gratia hic appoſui, vt ex hac declaratione aliqualiter pateat, in plurimis etiam alijs vtramq; generationem ritè nos imaginari poſſe, vt in ſphæra, ſphæroide, conoidibus, eiuſdem fruſtis, & alijs quamplurimis, vt ſuo loco animaduertetur.

A. COROLLARII IV. GENERALIS SECTIO I.

ET quoniam, vt oſtenſum eſt Prop. 33. huius Libri, vt omnia quadrata duarum figurarū inter ſe ſumpta cum datis regulis, ita ſunt ſolida ſimilaria genita ex eiuſdem figuris iuxta eaſdem regulas: ideò cum in Propoſitionibus huius Libri inuenta eſt ratio omnium quadratorum parallelogrammorum, vel triangulorum, vel trapeziorum, regulis eorum lateribus, eandem rationem comperiemus habere ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, ideſt cylindricos, vel ex triangulis, ideſt conicos, vel ex trapezijs, ideſt fruſta conica, genita inquam iuxta eaſdem regulas, quæ amplius dilucidabimus ſingula, quæ opportuna fuerint, Theoremata denuò aſſumentes.

B. SECTIO II.

IN Prop. 9. igitur expoſita denuò eius figura, intelligantur baſes, GM, MH, deſcribere ſimiles figuras planas, quæ ſint, GIMR, MTHS, vt eorum lineę, vel latera homologa, æquè erectas planis, AM, MC, & in ijs, tanquam in baſibus conſiſtere cylindricos. AM, BH, quorū latera ſint, AG, CH. Erūt igitur hi



Corol. 3. ant. cylindrici ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, AM, MC, iuxta regulas, GM, MH, igitur erūt, vt omnia quadrata corun-

eorundem regulis eiſdem, GM, MH: ſunt autem omnia eorum quadrata, vt quadrata baſium, GM, MH, ergo cylindrici, AM, MC, erunt vt quadrata baſium, GM, MH, idest vt figuræ ſimiles, GIMR, MSHT, igitur cylindrici in eadem altitudine, & ſimilibus baſibus inſiſtentes ſunt, vt ipſæ baſes. 9. huius.

C. SECTIO III.

IN Prop. 10. conſimiliter procedentes colligemus, cylindricos in eadem, vel æqualibus, ac ſimilibus baſibus conſiſtentes eſſe, vt altitudines, vel vt latera æqualiter eorundem baſibus inclinata.

D. SECTIO IV.

IN Propoſ. 11. deducemus cylindricos ſimilibus baſibus inſiſtentes habere inter ſe rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum, vel laterum æqualiter dictis baſibus inclinatorum.

E. SECTIO V.

IN Prop. 12. colligemus cylindricos, quorum ſimiles baſes altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis reciprocè reſpondent, eſſe æquales; & cylindricos æquales, ſimilibus baſibus inſiſtentes, baſes habere altitudinibus, vel lateribus ęqualiter baſibus inclinatis, reciprocas.

F. SECTIO VI.

IN Prop. 13. habebimus ſimiles cylindricos eſſe in tripla ratione laterum homologorum.

G. SECTIO VII.

EX Prop. 14. colligimus ſi prædicti cylindrici inſiſtant baſibus diſſimilibus, adhuc prædictas paſſiones de ipſis verificari; in quibus tamen non numerantur ſimiles cylindrici, cum oporteat eoſdem ſimiles baſes habere.

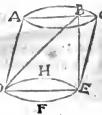
H. SE-

H. SECTIO VIII.

IN Prop. 22. habemus in eius figura, ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, AS, Tβ, iuxta regulas, ES, Zβ, eandem rationem habere ad ſolida ſimilaria genita ex triã-
Ex hac Propoſ. gulis, OES, & Zβ, ideſt cylindricos genitos ex, AS, Tβ, ad conicos genitos ex triangulis, OES, & Zβ, eandem rationem habere, vnde, cum conici ſint partes proportionales cylindricorum in eadem altitudine cum ipſis exiſtentium, quæcunq; de cylindricis in huius Coroll. Sectionibus 2. 3. 4. 5. 6. & 7. collecta ſunt, eadem & pro conicis tamquam collecta recipiemus.

I. SECTIO IX.

IN Prop. 24. habemus quemcumq; cylindricum eſſe triplum conici in eadem baſi, & altitudine cum ipſo. Sit expoſitus quicunq; cylindricus, AE, in baſi, DHEF, in eadem autem baſi, & altitudine ſit conicus, DBE, ſic tamen baſi inſiſtens, vt ducto plano per latera conici, idem tranſeat per latera cylindrici, AE, ſit autem ductum tale planum, quod faciat in conico, DBE, triangulum, DBE, & in cylin-



Coroll.6. drico, AE, parallelogrammum, AE, erũt
& 16. l. 1. igitur, AE, & triangulum, DBE, genitri-
Coroll.3. ces figuræ eorumdem ſolidorum, quæ ſimilaria ad inuicem
34. huius. vocantur, genita iuxta communem regulam, DE, quod ergo
gignitur ex, AE, ad genitum ex triangulo, DBE, erit vt omnia
quadrata, AE, ad omnia quadrata trianguli, DBE, regula,
DE, ideſt triplum. Solidum verò ſimilare genitum ex, AE,
24. huius. iuxta regulam, DE, cuius figuræ ſint ſimiles figuræ, DFEH,
eſt cylindricus, AE, & ſolidum ſimilare genitum ex triangulo, DBE, iuxta regulam, DE, cuius figuræ ſint ſimiles pariter figuræ, DFEH, eſt conicus, DBE, ergo cylindricus, AE, triplus erit conici, DBE, & conſequenter triplus erit cuiuſuis alij in eadem baſi, DFEH, & altitudine, cum conico, DBE, exiſten-

Digitized by Google

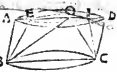
exiſtentis, quoniam, vt oſtenſum eſt, conici in eadem altitudine ſtantes ſunt, vt baſes, vnde cum baſes ſunt æquales, & conici ſunt æquales, verum ergo eſt, quod proponebatur. 34.huius Per B. Corol.27. huius.

K. SECTIO X.

IN Prop.27. habemus ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex trapezijs in eadem baſi (quæ ſit vnum laterum æquidiſtantium) & altitudine conſtitutis, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, genita, inquam, iuxta communem regulam ipſam baſim, ideſt fruſta conicorum quorum oppoſitæ baſes ſunt figuræ deſcriptæ à lateribus dictorum trapeziorum æquidiſtantibus, eſſe æqualia.

L. SECTIO XI.

IN Prop.28. habetur cylindricum in eadem baſi, & altitudine cum fruſto conici conſtitutũ, ad idem, eſſe (ſumptis duabus homologis in oppoſitis fruſti conici baſibus) vt quadratum maioris dictarum homologarum ad rectangulũ ſub dictis homologis vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ earumdem homologarum. Sit cylindricus, AC, in baſi figura quacumque plana, BC, in eadem autem baſi, & altitudine ſit fruſtum conici, EBCI, ſic tamẽ ſe habens, vt ducto plano per latera cylindrici, AC, idem trãſeat per latera



fruſti conici, BEIC, ſit autem ductum tale planum, quod faciat in cylindrico, AC, parallelogrammum, AC, & in fruſto, BEIC, trapezium, BEIC, erunt igitur rectæ, BC, EI, lineæ oppoſitarum baſium fruſti interſe homologæ, & quia cylindricus, AC, eſt ſolidum ſimilare genitum ex, AC, iuxta regulam, BC, & fruſtum, EBCI, eſt ſolidum prædicto ſimilare genitum ex trapezio, EBCI, ſunt autem hæc ſolida ſimilaria, vt omnia eorumdem quadrata, & omnia quadrata, AC, regula, BC, ad omnia quadrata trapezij, EBCI, regula eadem ſunt, vt quadratum, BC, ad rectangulum ſub, BC, EI, vna cũ $\frac{1}{3}$. quadrati differẽtiæ earumdem. Ergo cylindricus, AC, ad Corol.21. l.1. Coroll.3. 34. huius. 33.huius. 27. huius.

fruſtum

K.huius. Cor.gen. fruſtum conicum,EBCI, & ad quoduis aliud in eadem baſi, & altitudine cum hoc conſtitutum, (quoniam exiſtet huic æquale)erit vt quadratum,BC,ad rectangulum ſub,BC,EI, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ earumdem,BC,EI,quæ sūt duarum oppoſitarum baſium, EI, BC, homologæ vtcumq; ſumptæ, nam planum eadem ſolida ſecans ductum eſt vtcumque, dummodo per eorumdem latera tranſeat. Cor. 21. l.1.

M. SECTIO XII.

Hinc patet ſi in eadem baſi, BC, figura, fuerit conicus, & eadem altitudine cum fruſto, ideſt cum cylindrico,AC, qui ſit conicus,BOC,quod hic erit $\frac{1}{3}$. cylindrici, AC, & ideò ad fruſtum, EBCI, erit vt $\frac{1}{3}$. quadrati, BC, ad rectangulum ſub, BC, EI, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati differentiæ, BC, EI, ideſt vt totum quadratum, BC, ad rectangulum ſub, BC, & tripla, EI, vna cum toto quadrato differentiæ earumdem, BC, EI. Vide igitur quam ſit amplior hæc demonſtratio ea, qua alij oſtenderunt cylindrum eſſe triplum coni, & priſma pyramidis in eadem baſi, & altitudine cum ipſo conſtitutæ, nam ad tot varia ſolida hæc ſe extendit, quot ſūt figurarum planarum variationes, quæ nullo aſſignato coarctantur numero, cuiuſmodi demonſtrationis vniuerſalitatem in alijs figuris quoque in poſterum conſiderandis proſequemur, vt amplius infra patebit. I. huius. Cor. gen.

N. SECTIO XIII.

IN Prop.29. & eius Corollario tandem edocemur ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammo, vel triangulo eodem, iuxta duas regulas latera angulum continentia, ideſt cylindricos ab eodem parallelogrammo, & conicos ab eodem triangulo genitos, iuxta dictas regulas, eſſe inter ſe, vt eaſdem regulas.

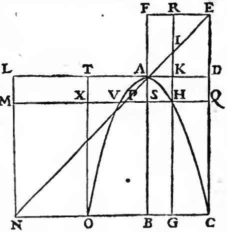
XXXIV.

Per ſupraposita Corollaria fructum huius doctrinæ Indiuiſibilium amplius percipere poteſt Studioſus, etſi eorum maior pars fuerit

fuerit & ſuperius declarata. Sequentes verò Propoſitiones à 35. vſque ad finem dicti Libri ſecundi, cum ſint lemmaticæ ad alios Libros, propterea relinquuntur. Per ea ergo, quæ hic allata ſunt potuit Lector vim prioris methodi Indiuiſibilium experiri, primò in parallelogrammis ſecundò in triangulis, tertiò in eorum trapezijs, quartò in cylindricis, quintò in conicis, ſextò, & vltimò in eorundem conicorum fruſtis. Hæc, puto, ſufficere potuiſſent, vt huius prioris methodi fieret capax, ſed ad maiorẽ eiuſdem intelligentiam, de eadem quoque periculum faciemus in area inueſtiganda alicuius inſignis figuræ planæ, & ſoliditate corporis illuſtris: Vt ad eorum normam percipiat & reliquarum figurarum tam planarum, quam ſolidarum menſuram obtineri poſſe. Inter omnes ergo à me delecta eſt Parabola, & Conoides parabolicum ab eadem genitum, præcipuè cum mihi facilioris captus viſa fuerint. Hæc metitur quoque Liber 4. dictæ Geometriæ, ſed vt pateat quoque exemplum operandi ſine abſciſſis, reſiduis &c. vt ibi fit, propterea iuxta ſequentem rationem earum menſura patefiet.

XXXV.

Sit enim quæcunque Parabola, OAC, cuius vertex, A, baſis, OC, & diameter, AB, ita vt ſit ſemiparabola, ABC. Cum enim, AB, diuidat bifariã omnes ipſi, AC, æquidiſtantes, fit vt omnes lineæ ipſius, AOB, ſint æquales omnibus lineis ipſius, ACB, regula, OC, quare per Prop. 3. AOB, æquatur ipſi, ACB, eſtque, ACB ſemiparabola. Compleantur nunc parallelogramma, ABC, ABO, vt fiant parallelogrammum, TC, ipſi parabolæ, OAC, & BD, BT, ſemiparabolis, ACB, AOB circumſcripta. His ſup-

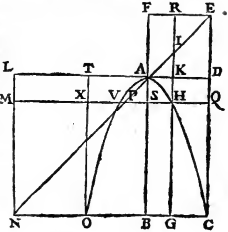


poſitis dico parallelogrammũ, TC, eſſe ipſius parabolæ, OAC, ſexquialterũ. Producatur, BA, in, F, ita vt, AF, ſit æqualis, AD, & cõpleatur parallelogrãmum, FADE, ducaturq; in eo diameter, AE, & intra, CE, BF, agatur earũ alteri, vt ipſi CE, tamquã regulæ quæcumq; parallela, GR, ſecans, BC, in, G, curuã, AC, in, H, AD, in, K, AE, in, I, &, FE, in, R; ſitque per, H, ducta, QS, ipſi, BC, æquidiſtans. Eſt ergo quadratum, CB, ad quadratũ, HS, vt, BA, ad, AS, per Prop. 20. Primi Conicorum, ſiue ex Prop. 38. & Scholio Prop. 40. Libri Primi Geometriæ Ind. Cum verò, BC, æquetur ipſi, AD, ſeu, AF, hoc eſt, RK, &, SH, ipſi, AK, ideſt, KI, (vt enim, AD, eſt ipſi, DE, æqualis, ita, AK, æquatur ipſi, KI,) & GK, ipſi, AB ſicuti, KH, ipſi, AS; ideo vt quadratum, Rk, ad quadratum, KI, ita erit, Gk, ad, kH. Inuenimus ergo quatuor has magnitudines, vtcumq; ſumptas, proportionales, ergo per Cor. 3. Propoſitionis 26 adhibitum ſine abſciſſis &c. iuxta præmonita num. 30. quatuor magnitudinum ordines, iuxta quatuor dictas magnitudines, aſſumptarum in quatuor figuris, quarum prima eſt parallelogrammum, FD ſecunda triangulum, ADE, tertia parallelogrammum, DB, & quarta trilineum, ADC, erunt proportionales. Hoc eſt vt omnia quadrata parallelogrãmi, FD, ad omnia quadrata trianguli, ADE, regula, CE, ita erunt omnes lineæ parallelogrammi, BD, ad omnes lineas trilinei, ADC, regula eadem, CE. Sed omnia quadrata, FD, omnium quadratorum trianguli, ADE, oſtenſa ſunt tripla eſſe in Prop. 24. & demonſtratione directa, num. 26. ſuperiori. Ergo omnes lineæ parallelogrammi, DB, triplæ erunt omniũ linearum trilinei, ADC. Verum vt omnes lineæ ad omnes lineas duarum figurarum, ita ſunt ipſæ figuræ per Prop. 3. Ergo parallelogrãmum, BD, triplum erit ipſius trilinei, ADC, & ſubinde ſexquialterum ſemiparabolæ, ABC; vnde parallelogrammum, TC, ſexquialterum erit parabolæ, OAC, ſunt enim hæc prædictorum dupla. Quod &c.

XXXVI.

Producatur nunc, DT, in, L, ita vt, AL, ſit æqualis ipſi, AB, & compleatur parallelogrammum, ALNB, in quo agatur diameter, AN. Dico omnia quadrata, TC, dupla eſſe omniũ quadratorum parabolæ, OAC, regula, NC. Eſto enim, QS, producta in, M, tanquam vna ex æquidiſtantibus regulæ, NC, ad libitum

aſſum-



aſſūpta, quæ ſecet, AN, in, P, curuam, AO, in, V, TO, in, X, & LN, in, M. Erit ergo rurſus vt quadratum, CB, ad quadratum, HS, nempè vt quadratum, QS, ad quadratū, HS, ita BA, ad, AS, hoc eſt ita, MS, ad, SP, (eſt enim, MS, æqualis ipſi, NB, & ſubinde ipſi, BA, ſicuti, PS, ipſi, SA,) unde hi quatuor ordines magnitudinū erunt proportionales. Nempè vt omnia quadrata parallelogrammi, DB, primi ordinis, ad omnia quadrata ſemiparabolæ, ABC, ſecundi ordinis, ita erunt omnes lineæ parallelogrāmi, LB, tertij ordinis, ad omnes lineas trianguli, ANB, quarti ordinis. Sed omnes lineæ parallelogrammi, LB, duplæ ſunt omnium linearum trianguli, ABN, ſunt enim vt parallelogrammum, LB, ad triangulum, ABN, per Prop. 3. cuius illud eſt duplum per Prop. 19. Ergo omnia quadrata parallelogrammi, DB, dupla sūt omnium quadratorum ſemiparabolæ, ABC; vnde & eorum quadrupla, hoc eſt omnia quadrata parallelogrammi, TC, dupla erunt omnium quadratorum parabolæ, OAC: nam quemadmodum quadratum, XQ, quadruplum eſt quadrati, SQ, & quadratum, VH, quadruplum quadrati, SH, ita per Prop. 4. ſiue per Prop. 25. omnia quadrata, TC, quadrupla ſunt omnium quadratorum, AC, & omnia quadrata parabolæ, OAC, quadrupla omnium quadratorum ſemiparabolæ, ABC. Quod &c.

XXXVII.

Cum verò ex Prop. 33. vt omnia quadrata parallelogrammi, TC, ad omnia quadrata parabolæ, OAC, ita ſint quæcunque ſolida ad inuicem ſimilaria (quæ diffiniuntur in Sectione, C, def. 8.) genita ex parallelogrammo, TC, & ex parabola, OAC, iuxta regulam figuram à baſi, OC, deſcriptam: ideò per demon-

ſtrata ſolum in omnibus quadratis earundem figurarum, illicò iuxta dictam Prop. 33. euidenter perſpicimus infinitū lucrum ex eiſdem feciſſe, nempè in infinitis ſolidis ſimilaribus à dicto parallelogrammo, & parabola genitis: quæ non inutile erit pauliſper contemplari. Conſiderabimus autem primo duo ſolida, quæ nobis ſunt magis familiaria, nempe quorum omnia plana ſunt circuli, ſeu ſolida rotunda. Si ergo figura à baſi, OC, deſcripta fuerit circulus, eiuſq; diameter, OC, quem rectè ſecet planū, TC, innoteſcit ex, TC, fieri cylindricū, immo cylindrum, illumq; rectum ſi, AB, ſit perpēdicularis circulo ipſius, OC, vel ſcalenum, ſi ſit illi inclinata, & hoc per dicta in Cor. pr. Prop. 34: Similiter ex parabola fiet conoides parabolicum circa axem, AB, rectum, vel inclinatum circulo, OC, prout ſe habebit pro dicto cylindro, eius enim omnia plana ſunt circuli per monita in Scholio Prop. 51. Libri Quarti Heo. Ind & per dicta in Prop. 46. 47, Libri primi, quæ à Lectore ſupponi poterunt. Hinc ergo fit manifeſtum cylindrum ex, T C, genitum, conoidis parabolici geniti ex parabola, O A C, iuxta regulam circulum, OC, duplum eſſe, ſiue, AB, ſit ipſi circulo, OC, perpendicularis ſiue non. Hucuſque autem Veteres cum Archimede, & alij poſtea ad hæc vſque tempora progreſſi ſunt.

XXXVIII.

Verum per hanc priorem methodum Ind. poterit Studioſus tam anguſtos limites in infinitum extendere, hoc eſt inuentam proportionem ad infinita ſolida transferendo. Namque ſi circulus, OC, mutetur in quadratum ab eodem, OC, tanquam à latere deſcriptum, cui planum, TC, ſupponatur erectum, vel quomodocunque inclinatum: nihilominus duo ſolida ad inuicem ſimilaria deſcripta à TC, & parabola, OAC, iuxta regulam quadratum ipſius, OC, habebunt eandem rationem duplam. Horum primum erit priſma, ſeu paralleleppipedum rectum, aut ſcalenū ex Coroll. priſmo Prop. 34. ſecundum verò erit ſolidum baſim habens quadratam deficiens verſus, A, iuxta parabolæ, OAC, deficientiam, terminanſq; ad idem, A, in quo parallelis baſi planis vtcumque ſecto, fiant ſemper quadrata deſcripta à lineis in parabola, OAC, ordinatim ductis. Videtur autem hoc ſolidū

ſui

ſui concauo aſſimilari ſemicõchæ, vel ſeminaui, aut potius Textorum ſemiradio. Sic mutato quadrato ipſius, OC, in triangulum, pentagonum, exagonum &c. ſeu in quamcunque figuram rectilineam, aut curuilineam, ſeu mixtilineam, ab eadem, OC, quomodocunque deſcriptam, per dictam Prop. 33. admonemur ſolidum ſimilare ex, TC, genitum (quod erit in rectilineis figuris ſemper priſma, vel in alijs ſaltem cylindricus per Prop. 34.) duplum eſſe ſolidi prædicto ſimilaris geniti ex parabola, OAC, iuxta regulam deſcriptam ab, OC, baſim, quod idcirco infinitis modis variari poteſt.

XXXIX.

Perpendat nunc Studioſus quam fertilis hinc euadat Geometria ſolidorum, & quam latè pateat hic demõſtrandi modus, quem iugiter proſequimur in omnibus figuris planis in dicta Geom. Ind. tamquam ſolidorum genitricibus conſideratis. Hoc eſt Libro 3. expendimus ſolida, quæ oriuntur à circulo, & ellipſi, eiuſque portionibus. Libro 4. quæ gignuntur à Parabola, vt & ab eius portionibus: ac Lib. 5. genita ab Hyperbola, oppoſitis ſectionibus, necnon ſimiliter ab earundem portionibus, conſiderantur: & hoc ſiue diametri figurarum genitricium ſint perpẽdiculares baſibus factorum ſolidorum, ſiue eiſdem inclinatæ. Denique Libro 6. agitur de ſpatijs helicis, aliaque ratione ab Archimedea Libro de Spiralibus, eorum menſura inueſtigatur, prius nempè per Indiuiſibilia, quæ ſunt circulorum omnes peripheriæ eiſdem concentricæ, deinde per circumſcriptionem, & inſcriptionem figurarum, etiam more Veterum: ſuperadduntur que nonnulla Theoremata, ac Problemata ex vniuerſa dicta Geometriæ doctrina emanantia: Eſt autem in Problematibus hoc ſummè notandum, nempè. Dato quocunque ex ſolidis in dicta Geometria conſideratis, inuenire ex quacunque ſpecie ſolidorum nedum dato æquale, ſed etiam quod ad illud aatam rationem habeat. Excipe tamen, quæ ſupponunt circuli aut Hyperbolæ quadraturam, in quibus proximè tantum dicta ratio inuenitur. Ita vt ex his tandem Studioſus animaduertere poſſit quantum vltra Veterum limites per hanc priorem Indiuiſibilium methodum prodierit Geometria.

Denique

Digitized by Google

XXXX.

Denique ex modo, quo num. 35. *&* 36. *oſtendimus ibi propoſita, innoteſcere poteſt, qualiter ſine abſciſſis, residuis &c. operandum ſit. Vbi enim dicendum fuiſſet in eorum Schemate iuxta ſtylum conſuetum in dicta Geometria, omnes lineas*, BD *ad omnes lineas trilinei, ADC, regula communi, EC, eſſe vt quadrata maximarum ipſius, AD, ad eiuſdem quadrata omnium abſciſſarum; hic dictum eſt eſſe vt quadrata omniū linearum, F D, ad quadrata omnium linearum trianguli, ADE, etenim iſtæ eiſdem maximis, & abſciſſis adæquātur. Sic pro omnibus lineis parallelogrammi, LB, & triāguli, ANB, regula communi, NC, adhibendæ fuiſſent maximæ abſciſſarum, AB, eiuſque omnes abſciſſæ. Liberum tamen cuique erit ſi voluerit, etiam ipſas abſciſſas, reſiduas &c. iuxta priorem ſtylum retinere, nullus enim hinc error, niſi illæ perperam accipiantur, emerget.*
Hæc ad intelligentiam prioris methodi Indiuiſibilium ſufficere puto, in ſequenti Exercitatione poſterior quoq; explicabitur, necnon & confirmabitur, quapropter nonnulla è Libro Septimo dictæ Geometriæ Ind. deſumpta, eidem inſerenda erunt.

EXER-

EXERCITATIO SECVNDA.

In qua agitur de Poſteriori Methodo Indiuiſibilium.

HACTENVS innoteſcere potuit Studioſo quæ ſit ratio procedendi iuxta priorem methodum Indiuiſibilium: nunc verò poſteriorem aggredimur in hac Exerc. 2. in qua, ni fallor, habebit, quo ſibi amplius ſatisfaciat, ſi ab infinitate Indiuiſibiliũ abhorreat, collectiuè ſumptorũ. Is .n. in Exerc. ant. nu. 6. addiſcere potuit hic tantũ diſtributiuè eadem Indiuiſibilia comparari. Porrò de hac poſteriori methodo tractat ex profeſſo Geometriæ Ind. Liber 7. quapropter ex eo præcipua illius deſumentur fundamenta, veluti in antecedenti Exerc. nobis opportuna ſuffecit eiuſdem Liber 2. Denuò igitur hic exponetur dicti Libri 7. Prop. prima cum ſubſequentibus Lemmatibus, necnon Propoſ. 2. & 3. reliquo eiuſdem doctrinæ poſtmodum ſummariè tantum explicato. Denique his adiungentur ea, quę præcipuè ad confirmationem dictarum Propoſit. pr. tertię, ac totius Libri 7. à me nuper oſtenſa ſunt. Et vt hæc quoque clariora fiant, vbi congruet interijcientur pariter Notæ, vt in Exerc. ant. conſuetum fuit.

I.

Subſequens Propoſitio eſt præcipuum huius poſterioris methodi Ind. fundamentum: quapropter haud Lectori mirandum erit si per tot, quot adijcientur Lemmata, videbit eandem confirmari. Non ergo perfunctoriè, ſed attentè erit examinanda. Eſt autem huiuſmodi.

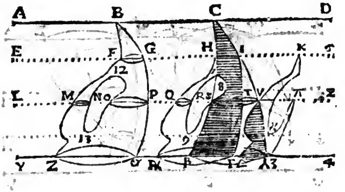
PROPOSITIO I.

Libri Septimi Geometriæ Indiuiſibilium.

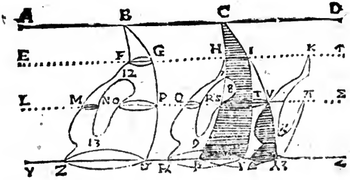
FIguræ planæ quæcunque in eiſdem parallelis conſtitutæ, in quibus, ductis quibuſcunque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcumq; rectæ lineæ portiones ſunt æquales, etiam inter ſe æquales erunt. Et figuræ ſolidæ quæcumq; in eiſdem planis parallelis cõſtitutæ, in quibus, ductis quibuſcunque planis eiſdem planis parallelis æquidiſtantibus, conceptæ cuiuſcunque ſic ducti plani in ipſis ſolidis figuræ planæ ſunt æquales, pariter inter ſe æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipſæ ſolidæ inter ſe comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, ſeu plana parallela, in quibus eſſe ſupponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

Sint quæcunque planæ figuræ, BZ&, CβΛ, in eiſdem parallelis, AD, Y4, conſtitutæ, ductis autem ipſis, AD, Y4, quibuſcunque parallelis, E6, LΣ, portiones ex. g. ipſius, E6, in figuris conceptæ, nempè, FG, HI, inter ſe ſint æquales, necnon ipſius, LΣ, portiones, MN, OP, ſimul ſumptæ (ſit enim figura, BZ&, ex. g. intus caua ſecundum ambitum, 12, N, 13, O,) ipſi, SV, ſint pariter æquales, & hoc contingat in quibuſcunque alijs ipſi, AD, æquidiſtantibus. Dico figuras, BZ&, CβΛ, inter ſe æquales eſſe. Aſſumpta ergo alterutra figurarum, BZ&, CβΛ, vt ipſa, BZ&, cum parallelarum, AD, Y4, portionibus ipſi conterminantibus, nempè cum, AB, Y&, ſuperponatur reliquæ figuræ, CβΛ, ita tamen vt ipſæ, AB, Y&, cadant ſuper, BD, & 4: vel ergo tota, BZ&, congruit

Digitized by Google



gruit toti, Cβλ,& ita cum ſibi congruant æquales erunt,vel non ; aliqua tamen pars eſto quod congruerit alicui parti, vt, CIrβ587,pars figuræ,BZ&,ipſi,CIrβ587, parti figuræ, Cβλ. Manifeſtum eſt autem ſuperpoſitione figurarum taliter effecta, vt portiones parallelarum, AD,Y4, ipſis figuris conterminantes ſint inuicem ſuperpoſitæ, quod quæcumq; rectæ lineæ in figuris conceptæ erant ſibi in directum,manēt etiam ſibi in directum. Vt ex. g. cum,MN,OP,eſſent in directum ipſi, SV, dicta ſuperpoſitione facta, manent etiam ſibi in directum,nempè, QR, ST, in directum ipſi, SV, eſt enim diſtantia ipſarum,MN,OP,ab,AD,æqualis diſtantiæ, S V, ab eadem, AD;vnde quotieſcunque,AB, extendatur ſuper, BD,vbicunque hoc fiat, ſemper, MN,OP, manebunt in directum ipſi,SV,quod & de cæteris quibuſcunque ipſi, AD, parallelis in vtraque figura liquidò apparet. Quod verò pars vnius figuræ, vt, BZ&, congruat neceſſariò parti figuræ,Cβλ, & non toti, dum fit ſuperpoſitio tali lege, quali dicti eſt, ſic demonſtrabitur. Cum enim ductis quibuſcunq; ipſi, AD, parallelis,conceptæ in figuris ipſarum portiones, quæ erant ſibi in directum,adhuc poſt ſuperpoſitionem maneant ſibi in directum,illę verò ante ſuperpoſitionem eſſent ex hypoteſi æquales, ergo poſt ſuperpoſitionem portiones parallelarum ipſi, AD, in figuris ſuperpoſitis cóceptæ,erunt pariter æquales,vt ex.g. QR, ST, ſimul ſumptæ, æquabun-



tur ipſi, SV, ergo niſi vtræque, QR, ST, congruant toti, SV, congruente parte alicui parti, vt, ST, ipſi, ST, erit, QR, æqualis ipſi, TV, &, QR, quidem erit in reſiduo figuræ, BZ&, ſuperpoſitæ: TV, verò in reſiduo figuræ, CβΛ, cui fit ſuperpoſitio. Eodem modo oſtendemus cuicunq; parallelæ ipſi, AD, conceptæ in reſiduo figuræ, BZ&, ſuperpoſitæ, quod ſit, H℞. 597, reſpondere in directum æqualem rectam lineam, quæ erit in reſiduo figuræ, CβΛ, cui fit ſuperpoſitio. Ergo ſuperpoſitione hac lege facta, cum ſupereſt aliquid de figura ſuperpoſita, quod non cadat ſuper figuram, cui fit ſuperpoſitio, neceſſe eſt reliquæ figuræ aliquid etiā ſupereſſe, ſuper quod nihil ſit ſuperpoſitum. Cum autem vnicuiq; rectæ lineæ parallelæ, AD, conceptæ in reſiduo, vel reſiduis (quia poſſunt eſſe plures figuræ reſiduæ) figuræ, BZ&, ſiue, C℞Γ, ſuperpoſitæ, reſpondeat in directum in reſiduo, vel reſiduis figuræ, CβΛ, alia recta linea, manifeſtum eſt has reſiduas figuras, ſiue reſiduarū aggregata, eſſe in eiſdem parallelis. Cum ergo reſidua figura, H℞ 597, ſit in parallelis, E 6, Y 4, etiam reſidua figura, vel reſiduarum aggregatū, ipſius, CβΛ, (quod ſit ipſa fruſta, IΓΛ, 785,) erit in eiſdem parallelis; E6, Y4: ſi enim non pertingeret hinc inde ad parallelas, E6, Y4, vt ex. g. ſi pertingeret quidem vſque ad, E6, non tamen vſque ad, Y4, ſed tātum vſque ad, LΣ, conceptis rectis lineis in fruſto,

QR859R, ipſi, AD, parallelis non reſponderent in reſiduo figuræ, C8λ, ſeu ex reſiduis aggregato, aliæ rectæ lineæ, vt ſuperius neceſſe eſſe probatum eſt. Sunt ergo hæc reſidua, vel reſiduorum aggregata in eiſdem parallelis, & in illis conceptæ parallelarũ ipſis, AD, Y4, portiones inter ſe ſunt æquales, vt ſupra oſtendimus: ergo reſidua, ſeu reſiduorum aggregata, ſunt eius conditionis, cuius ipſas, BZ&, C8λ, figuras iam eſſe ſuppoſitum fuit, id eſt æqualiter analoga. Fiat ergo denuò reſiduorum ſuperpoſitio, ita tamen vt parallelę, GH, & 8, ſuper parallelas, Hk, 84, ſint cõſtitutę, & congruat pars, VΔλ, fruſti, HR597, parti, VΔλ, fruſti, IΓλ, oſtendemus ergo vt ſupra, dum vnius habetur reſiduum, haberi etiam alterius, & hæc reſidua, ſiue reſiduorum aggregata, eſſe in eiſdem parallelis. Sit autem ad figuram, BZ&, ſpectans reſiduum, kVλ3ΠX; ad figuram autem, C8λ, ſint pertinentia reſidua, IΓΔV, 785, quorum aggregatum eſt in eiſdem parallelis cum reſiduo, kVλ3ΠX, nempè in parallelis, E6, Y4. Si ergo horum reſiduorum fiat denuò ſuperpoſitio, ita tamen vt parallelæ, in quibus exiſtunt, ſint ſemper ad inuicem ſuperpoſitæ, & hoc ſemper fieri intelligatur, donec tota figura, BZ&, fuerit ſuperpoſita, dico totam debere ipſi, C8λ, congruere; alioquin ſi eſſet aliquod reſiduum vt figuræ, C8λ, cui nihil eſſet ſuperpoſitum, eſſet etiam aliquod reſiduum figuræ, BZ&, quod non eſſet ſuperpoſitum, vt ſupra oſtendimus neceſſe eſſe: ponitur autem totam, BZ&, eſſe ſuperpoſitam ipſi, C8λ, ergo ita ſunt ad inuicem ſuperpoſitæ, vt neutrius reſidua habeantur, ergo ita ſunt ſuperpositæ, vt ſibi congruant. Ergo figurę, BZ&, C8λ, inter ſe ſunt æquales.

Sint nunc in eodem ſchemate duæ figuræ ſolidæ quæcũque, BZ&, C8λ, in eiſdem planis parallelis, AD, Y4, conſtitutæ; ductis autem quibuſcunque planis, E6, IΞ, prædictis æquidiſtantibus, ſint conceptæ in ſolidis figuræ, quæ iacent in eodem plano, ſemper inter ſe æquales, vt, EG, æqualis, HI, &, MN, OP, ſimul ſumptæ (ſit enim ſolida figura ex.g. BZ&, intus vtcunque caua ſecundum ſuperficiem, 12, N, 13, O,) ęquales ipſi, SV. Dico eaſdem ſolidas figuras ęquales eſſe. Si enim ſolidum, BZ&, cum portionibus, AB, Y&, planorum, AD, Y4, ipſi conterminantibus, ſolido, C8λ, ita ſu-

perpoſuerimus, vt planum, AB, ſit in plano, AD, &, Y&, in plano, Y4, oſtendemus (vt fecimus ſuperius circa parallelarum ipſi, AD, conceptas in figuris planis, BZ&, Cβλ, portiones) figuras in ſolidis, BZ&, Cβλ, conceptas, quę erant in eodem plano, etiam poſt ſuperpoſitionem manere in eodem plano, & ideò adhuc æquales eſſe figuras in ſuperpoſitis ſolidis conceptas, & ipſis, AD, Y4, parallelas. Niſi ergo totum ſolidum toti congruat in prima ſuperpoſitione, relinquentur reſidua ſolida, vel ex reſiduis compoſita in vtroq; ſolido, quæ non erunt ad inuicem ſuperpoſita, cum enim ex.g. figurę, QR, ST, ęquentur figuræ, SV, dempta communi figura, ST, reliqua, QR, ęquabitur reliquę, TV, hocque continget in quouis alio plano ipſi, A D, parallelo occurrente ſolidis, C℞Γ, Cβλ. Ergo ſemper habentes reſiduum vnius ſolidi, habebimus etiam reſiduum alterius, & patebit, iuxta methodum adhibitam in priori parte huius Propoſitionis circa figuras planas, reſidua ſolida, vel reſiduorum aggregata ſemper eſſe in eiſdem parallelis planis, vt reſidua, H℞597, IΓλ, 785, eſſe in planis parellelis, E6, Y4, ac æqualiter analoga. Si ergo hęc reſidua adhuc ſuperponantur, ita vt planum, EH, locetur in plano, H6, & Yβ, in, β4, & hoc ſemper fieri intelligatur, donec quod ſuperponitur, vt, BZ&, totum fuerit aſſumptum, tandem ipſum totum, BZ&, congruet toti, CλA, niſi enim toto ſolido, BZ&, ipsi, Cβλ, ſuperpoſito, ipſa ſibi congruerent, eſſet aliquod reſiduum vnius, vt ſolidi, Cβλ, ergo etiam eſſet aliquod reſiduum ſolidi, C℞Γ, ſeu, BZ&, illudque non eſſet ſuperpoſitum, quod eſt abſurdum, ponitur enim iam totum ſolidum, BZ&, eſſe ipſi, Cβλ, ſuperpoſitum. Non ergo erit aliquod reſiduum in ipſis ſolidis, ergo ſibi congruent, ergo dictę figuræ ſolidæ, BZ&, Cβλ, inter ſe ęquales erunt, quæ fuerunt demonſtranda. Prędictę autem figurę, vt ſupra innuimus, dicātur æqualiter analogę, & ſi opus erit, iuxta regulas lineas parallelas, ſeu plana parallela, AD, Y4.

SCHO-

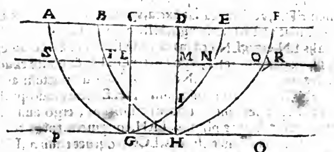
SCHOLIVM.

CVm antecedens Propoſ. maximi ſit momenti, vt in ſequentibus apparebit, aliuſque modus priorem partem demonſtrandi, ſtylo Archimedeo haud abſimilis, menti ſuccurrerit, idipſum ne pereat in Lemmata diſtributum hic ſubiungere placuit.

LEMMA PRIMVM.

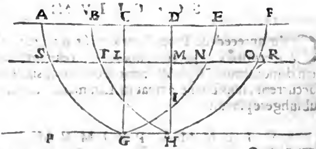
SI in eadem, vel æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis figuræ planæ æqualiter analogę iuxta eaſdem baſes fuerint conſtitutę, ita tamen vt quæcunque æquidiſtantium baſibus linearum portiones in eiſdem conceptæ figuris integræ ſint, ac eidem baſi, vel baſibus æquales, ipſæ pariter figuræ inter ſe æquales erunt.

Sint eadem baſi, GH, ſeu in ęqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis, AF, PQ, figurę planæ, AGHB, EGHF, ęqualiter analogæ iuxta eandem baſem, GH, ſeu baſes æquales iā dictas: extenſa verò quacunq; ipſis, PQ, AF, pa-



rallela, SR, eiuſdē portiones captę in prętatis figuris, vt, ST, NO, integræ ſint, ac æquales baſi, GH, ſeu dictis ęqualibus baſibus. Dico etiam præfatas figuras inter ſe æquales eſſe.

In ca-



In eadem enim baſi, G H; ſeu in altera dictarum ęqualium baſium, ſit conſtitutum, & in eiſdẽ parallelis, AF, PQ, quodcunque parallelogrammum, C H, in quo portio concepta ipſius, SR, ſit, LM, quæ erit ęqualis ipſi, GH, & conſequenter ipſi, NO, vnde addita communi, MN, fiet, LN, ęqualis, MO. Eodem modo autem oſtendemus, CE, eſſe æqualem, DF, & reliquas huiuſmodi ſimiliter adęquari. Nunc aſſumpto trilineo, ECG, & poſito, C, in, D, & CG, in, DH, cadet, G, in, H, quia, CG, DH, ſunt æquales, cadente verò trilineo, ECG, ſuper, FDH, extendetur, CE, ſuper, DF, cum angulus, FDH, exterior ſit æqualis interiori, ECG, parallelarum, DH, CG, & punctum, E, erit in, F, ambituſque, ENG, cadet ſuper ambitum, FOH, ſi enim non, eſto quod aliquod punctum ambitus, ENG: non cadat ſuper, FOH, cadet ergo vel extra trilineũ, FDH, vel ĩtra, cadat extra, vt in, R, ita vt ambitus, ENGH, cadat vt, FRH, erit ergo, MR, maior, MO, ſed, MR, eſt æqualis, LN, ergo, LN, erit maior, MO, ſed eſt etiã æqualis eidẽ M O, ex demonſtratis, ergo eſſet æqualis, & maior eadem, MO, quod eſt abſurdum. Non ergo aliquod punctum ambitus, ENG, cadit extra trilineum, FDH. Eodem modo probabitur, nec cadere intra eundem trilineum, ergo ambitus, ENG, cadet ſuper ambitum, FRH, congruens totus toti, & conſequenter etiam trilineus, ECG, cõgruet trilineo, FDH, & illi æqualis erit, vnde ablato communi trilineo, DIE, &, addito communi trilineo, GIH, fiet, EGHF, figura æqualis parallelogrammo, CH. Eodem modo oſtendemus figuram, AGHB,

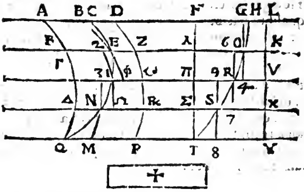
AGHB, æquari eidem,CH,ergo figuræ, AGHB, EGHF, inter ſe æquales erunt. Cum autem dictæ figuræ fuerint in æqualibus basibus, tunc conſtituentes ſuper vnamquamq; parallelogrãmum in eiſdem parallelis cum iiſdem poſitum, concludemus etiam dictas figuras æquales eſſe, probantes eodẽ modo deſcriptis parallelogrãmis adæquari, quę quidẽ inter ſe erunt æqualia, quod demõſtrare opus erat. Hęc autẽ vocẽtur parallelogrãma curuilinea,cũ, AG,BH,EG,FH, fuerint curuę lineę, cum verò fuerint rectæ lineę, parallelogrãma rectilinea ad illorũ differẽtiã eãdẽ appellabimus, ſed vtraq; in genere,ſi libuerit, nomine parallelogrãmi tantum etiam nuncupabimus.

LEMMA II.

SI in æqualibus rectis lineis, tamquam in baſibus, & in eiſdem parallelis, fuerint quæcunque planæ figuræ, æqualiter analogæ iuxta dictas baſes; portiones autem æquidiſtantium quotcunque ipſis baſibus linearum in figuris conceptæ integræ fuerint, ac in altera dictarum figurarum ſic ſe habentes, vt quęlibet propinquior baſi ſit maior remotiori: dictæ figuræ inter ſe æquales erunt.

Sint in æqualibus rectis lineis,QP,TY, tamquam in baſibus,& in eiſdem parallalis,AL, QY, quæcunq; planæ figuræ, CQPD, HTYL, ęqualiter analogæ iuxta dictas baſes, QP, TY, ductis autem quotcunque baſibus parallelis, vt, ΔX, ΓV, βk, earum in figuris conceptæ portiones integrę ſint,ac in altera figurarum propinquior baſi maior remotiori. Vt ſi conceptę in,CQPD,ſint,N℞,I&, EZ, & in,HTYL, pſę,SX,RV,Ok, iſtę quidem integrę ſint,necnon ex. g.in figura,CQPD,N℞,maior, I&; I&,maior,EZ, & ſic in cęteris (erit enim etiam, SX, maior,RV, & RV,maior, Ok, & ſic in

cæteris



cæteris, cum ſint æqualiter analogæ iuxta baſes, QP, TY,) dico figuras, CQPD, HTYL, inter ſe æquales eſſe: Si enim non ſint æquales, altera earum maior erit, ſit maior, HTYL, ipſa, CQPD, ſpatio, ✠, tunc minoris figuræ baſis, QP, moueatur verſus, AD, ſemper ipſi, AD, æquidiſtanter, ac manente iugiter puncto, P, in linea, PD, donec congruat ipſi, AD, igitur punctum, Q, deſcribet lineam, QΓA, &, QP, deſcribet parallelogrammum, AP, rectilineum, ſeu curuilineum, prout, AQ, DP, fuerint rectæ, vel curuæ: erit autem, QΓA, tota extra figuram, CQPD, cum parallelæ, QP, in figura, CQPD, ipſi, QP, propinquiores remotioribus ſint ſemper maiores (quo pacto data baſi, & curua linea, tota in eodem plano cum ipſa baſi, ac vni extremorum eiuſdem cōterminante, parallelogrammum curuilineum, ab eiſdem apprehenſum, deſcribere docemur) ſimiliter compleatur parallelogrammum, FY, ducaturque, ΓV, parallela, QY, biſariam diuidēs altitudinē figurarū, CQPD, HTYL, reſpectu, QY, ſumptā, ſecanſq; AQ, in, Γ, CQ, in, I, DP, in, &, FT, in, Π, HT, in, R, & LY, in V. Per, ΓV, igitur diuidetur parallelo-

Elicit. ex ant. Lem.

grāmū, AP, in æqualia parallelogrāma, A&, & Q: Rurſus autem per alias ipſi, QY, parallelas diuidantur dictæ altitudines portiones biſariam, & ſic ſemper fiat (ſectis inſimul conſtitutis parallelogrammis, quæ idcircò etiam biſariam diui-

diuidentur)donec ad parallelogrammum, vt ad, ℞Q, deueniatur minus ſpatio, ✠, ſit igitur ſectum, AP, in parallelogramma æquè alta, AZ, ϐ&, Γ℞, ΔP, per æquidiſtãtes lineas, ϐK, ΓV, ΔX, quæ ſecent lineas, AQ in punctis, ϐ, Γ, Δ, CQ, in, E, I, N, DP, in, Z, &, ℞, FT, in, ΑΠΣ, HT, in, O, R, S, & tãdem, LY, in, k, V, X, compleanturq; parallelogramma, BZ, 2 &, 3 ℞, ΔP, iuxta deſcriptionem ſuperius traditam, erunt enim lineæ, BE, 2 I, 3 N, ΔQ, extra figuram, CQPD, quod patebit, veluti, AQ, extra, CQPD, ſimiliter cadere oſtenſa eſt. & cõſequenter figura ex parallelogrammis, BZ, 2&, 3 ℞, ΔP, compoſita comprehendet ſpatium, CQPD. Sint autem etiam completa parallelogramma, E&, I ℞ NP, quorum deſcriptæ lineæ, EΦ, IΩ, NM, intra figuram, CQPD, quidem cadere oſtendemus ex eadem ratione, quod dictæ parallelæ ipſi, PQ, propinquiores remotioribus ſint ſemper maiores, & ſubindepatebit figuram ex parallelogrammis, E&, I℞, NP, compoſitam comprehendi à figura, CQPD. Tandem compleantur parallelogramma quoque, Gk, 6V, 9X, ΣY, ex quibus compoſitam figuram ſpatium, HTYL, eadem methodo comprehendere demonſtrabimus. Cum ergo figura comprehendens ſpatium, CQPD, ſuperet ab eo comprehenſam parallelogrammis, BZ, 2Φ, 3Ω, ΔM, hoc eſt parallelogrammo, ΔP, quod eſt minus ſpatio, ✠, dicta comprehendens figura ſuperabit, CQPD, multò minori ſpatio, quam ſit, ✠, ſed, HTYL, ſuperat, CQPD, ex hypoteſi ſpatio, ✠, ergo figura comprehendens, CQPD, minor eſt, HTYL, & multò minor figura ipſum, HTYL, comprehendente, quæ iam, deſcripta fuit. Hoc autem eſt abſurdum, cum enim parallelogrãmum, BZ, æquetur ipſi, Gk, 2&, ipſi, 6V, 3 ℞, ipſi, 9X, &, ΔP, ipſi, ΣY, tota toti adæquatur contra prædemonſtrata, non ergo figura, HTYL, maior eſt, CQP.

1. Decimi Elem.

Ex antec. Lem.

Sit nunc eadem minor, ſi poſſibile eſt, eodem ſpatio, ✠, igitur deſcriptis circa, CQPD, eiſdem figuris, ita vt comprehendens, CQPD, ſuperet ab eo comprehenſam minori ſpatio, quam ſit, ✠, compleantur parallelogramma, OV, RX, SY, ex quibus compoſitam figuram, vt ſupra à ſpatio, HTYL, comprehendi oſtendemus. Igitur ſi comprehendens, CQPD, ſuperat figuram comprehenſam minori ſpa-

tio, quam ſit, ✠, ipſum ſpatinm, CQPD, ſuperabit ab eo comprehenſam figuram multò minori ſpatio, quam ſit, ✠, idem autem ſuperat, HTYL, ſpatio, ✠, ergo figura comprecenſa à ſpatio, CQPD, maior erit ſpatio, HTYL, & multò maior erit figura iam deſcripta, ab eodem ſpatio, HTYL, comprehēſa, quod eſt abſurdum. Cum enim parallelogrammum, E&, æquetur, OV, I℞, ipſi, RX, necnon, NP, ipſi, SY, tota toti adequatur contra prædemonſtrata, nec ergo figura, HTYL, minor eſſe poteſt figura, CQPD, ſed neque eadem maior, vt oſtenſum eſt, ergo eidem æqualis erit, quod demonſtrare oportebat. Vnamquamque autem dictarum figurarum, CQPD, HTYL, præfatas conditiones habentium, figuram in alteram partem deficientem appellabimus, regula baſi, ſeu quacunque illi æquidiſtante.

Ex antec. Lem.

LEMMA III.

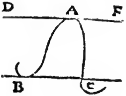
SI curua linea quæcunque tota ſit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis, aut rectis lineis, vel in recta, & puncto, poterimus aliam rectam lineam præfatæ æquidiſtantem ducere, quæ tangat portionem curuæ lineæ inter duos prædictos occurſus continuatam.

DEFINITIO. ✠

TAngere autem dico rectam lineam aliam quamcunq; curuam totam in eodem plano cum ea exiſtentem, cum ipſa recta linea ſiue in puncto, ſiue in recta linea, curuæ occurrente, eadem curua vel tota eſt ad eandem partem, vel illius nihil eſt ad alteram partem illi occurrētis rectæ lineę.

Sit curua linea, BAC, tota in eodem exiſtens plano, cui recta, BC, occurrat in duobus punctis, ſeu rectis lineis, vel in recta, & puncto, B, C. Dico nos aliam rectam ipſi, BC, æquidiſtan-

diſtantem ducere poſſe,quę tangat portionem curuæ lineæ inter duos occurſus,B,C,cōtinuatam. Quoniam ergo recta eſt, BC,& curua, BAC, ideò inter ſe ſpatium comprehendent, figuramque,vt,BAC,conſtituent,ergo poſſibile erit figuræ,BAC,re- ù.lib.1.



ſpectu rectæ, B C, verticem inuenire, ſit is punctum, A,per quod ducatur,DF,parallela,BC, *igitur*, BF, tanget figuram, BAC,ergo totus ambitus,BAC,eſt ad eandem partem rectę, DF,vel nihil eſt ſaltē ad alterā partem, ſi enim aliqua illius portio eſſet ad alteram partem rectæ,DF,iam recta, DF, ſecaret figuram,BAC,quod eſt abſurdum,ergo recta,DF,tangit curuam, BAC, *igitur* poſſibile eſt, &c.

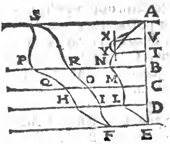
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt quomodo ducenda ſit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea exiſtentem contingens, quæ quidem datæ rectæ lineę ſit æquidiſtans.

LEMMA IV.

Si propoſita quæcumque figura plana vni regulæ parallelis quotcumque lineis ita ſecari poſſit,vt conceptæ in figura rectæ lineæ integrę ſemper exiſtant: Ipſa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, ſeu ex figuris in alteram partem deficiētibus, regula eadem, componetur.

Sit quæcumque figura plana,SPFR, talis tamen,vt ſecta quotcumque vni regulæ,vt, FE, parallelis,conceptæ in ipſa rectæ lineæ integræ ſint. Dico ipſam vel ex parallelogrāmis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram par-



tem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint.n. (1 lib. 2.) ductæ, SA, FE, oppoſitæ tãgentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumque recta linea, AE, moueatur autem, FE, verſus, SA, ſemper æquidiſtanter eidem, SA, donec illi congruat, interim verò punctum, E, ita in ipſa feratur, vt deſcribat lineam, ENA, cum, AE, figuram, A N E, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, ſit æqualiter analoga iuxta regulam, F E; in eadem integris exiſtentibus parallelis ipſi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rurſus feratur recta linea, A E, verſus ambitum, A N E, ſemper ipſi, A E, æquidiſtanter, donec totam pertranſierit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ ſic decurrentis in ambitu, ANE, vel enim tanget in linea, aut lineis, vel in punctis, & lineis, vel tantum in punctis, eſto quod fiat contactus in recta, LM, & in puncto, N, tranſeantq; per puncta, L, M, N, rectæ lineæ regulæ, FE, parallelæ, HD, QC, PB, ſecantes ambitum figuræ, SPFR, in punctis, P, Q, H, I, O, R, & rectam, AE, in punctis, B, C, D, nullusq; alius factus fuerit contactus in ambitu, ANMLE. Quoniam ergo à puncto, N, ad, A, nullus datur contactus, erit, ANB, figura in alteram partem, nempè verſus, A, deficiens, hoc eſt quælibet in figura, A *N* B, parallela, N B, erit maior remotiori, ſi enim non, eſto quod aliqua, vt, YT, non ſit maior remotiori, XV, ad ambitum terminata, vel ergo erit illi æqualis, vel eadem maior, ſit illi æqualis, & iũgatur, YX, hæc ergo erit parallela, A E, & occurrit ambitui in duobus punctis, Y, X, ergo poſſibile erit ducere rectam lineam ipſi, YX, ſeu, AE, parallelam, tangentem portionem curuæ lineę, (Ex antec. Lem.) hoc eſt ambitus, AN, inter duos occurſus, Y, X, cõtinuatam; quod eſt contra ſuppoſitum. Quod ſi dicatur, YT, eſſe minorem, XV, multò magis conuincetur præfatum abſurdum, ergo, YT, erit maior, XV, & quælibet, NB, propinquior remotiore maior, ergo figura, A N B, erit in alteram partem deficiens:

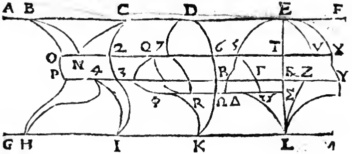
Digitized by Google

ciens. Eodem modo autem oſtēdemus etiam, NMCB, LED, eſſe figuras in alteram partem deficientes, L M C D, autem manifeſtum eſt eſſe parallelogrammum rectilineum, ergo in figura, S P F R, ipſa, SPR, quæ eſt æqualiter analoga ipſi, ANB, erit figura in alteram partem deficiens, ſic etiā, FQOR, HFI, QHIO, verò erit parallelogrammum rectilineum, ſeu curuilineum, prout, QH, OI, rectæ, vel curuæ, eſſe poſſunt ergo figura, SPFR, componitur ex figuris in alteram partem deficientibus, ac ex parallelogrammo rectilineo, ſeu curuilineo, regula, FE, quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM.

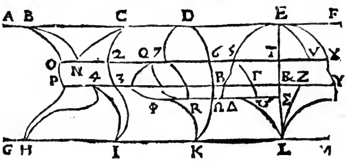
HInc habetur figuram, SPFR, ipſi, ANE, æqualem eſſe, & vniuerſaliter figuras planas æqualiter analogas, in quibus earum regulæ æquidiſtantium quotcunq; linearū conceptæ portiones integræ ſunt, inter ſe æquales eſſe.

PRopoſitio antecedens, aliter, quoad priorem partem, oſtenſa.



Sint quæcumq; figuræ planę ęqualiter analogæ iuxta regulam, GM, ipſæ, BHIC, DQk, quarum oppoſitæ tangentes, AF, GM, regula pariter, GM, parallelarum autem ipſi, GM, quotcumque portiones in vnaquaque dictarum figurarum integræ ſint, ſiue non. Dico eaſdem æquales eſſe. Incidat ergo parallelis, A F, G M, quomodocumque recta

linea,



linea, EL, in eiſdem terminata, moueatur autem, GM, verſus, AF, ſemper eidem, AF, æquidiſtanter donec illi congruerit, interim autem vnum punctum moueatur in eadem, GM, ſic mota, deſcribens ambitum, LØE, figuræ æqualiter analogæ ipſi, DQk, & aliud punctum in eadem motum ad aliam partem, EL, deſcribat ambitum figuræ, EYL, æqualiter analogæ ipſi, BHIC, in quibus quidem ſic deſcriptis figuris conceptæ ipſi, GM, parallelarum portiones quęcumque integrę ſint. Erit ergo figura, EØL, ęqualis figuræ, EYL, eſto autem quod in figura, DQk, conceptæ portiones parallelarum ipſi, GM, non omnes ſint integræ, ſed aliquę fractæ per interiorem ambitum, nempè, quę intercipiuntur parallelis, Q6, ΦΩ, in quibus habeantur duo figurę fruſta, 67 RΩ, QΦ R, in quorum tamen vnoquoque dictæ parallelarum portiones integræ habeantur, ſit autem in motu, G M, à quodam puncto deſcripta linea, & r5, nempè ambitus figurę, 5 & ΞT, eodem modo, quo deſcripti fuerunt ambitus, EØL, EYL, figurę inquam, 5 & ΞT, æqualiter analogę fruſto, 7RΩ6; erit ergo reliqua figura, 5 Δ&, æqualiter analoga fruſto, QΦR, cum tota, TSΔΞ, ſit toti compoſito ex fruſtis, QΦR, 7RΩ6, æqualiter analoga, & ſunt portiones ipſi, G M, parallelarum in vnaquaque figura, 5 Δ&, 5 & ΞT, integræ omnes, ſicut cõtingere ſuppoſuimus in fruſtis, QΦR, 7RΩ6, ergo cum QΦR, 5 Δ &, ſint figurę etiam æqualiter analogę, inter ſe æquales erunt: Ex antec. Lem. Eadem ratione patebit fruſtũ, 7RΩ6, æquari figurę, S&ΞT,

Digitized by Google

ergo fruſta, QΦR, 7RΩ6, ſimul ſumpta æquabuntur figuræ T5βΔΣ, ſed & figuram, 76D, ipſi, EST, ædequari, necnon, ΦkΩ, ipſi, ΔLΣ, pariter adæquari manifeſtum eſt, cum ſint figuræ æqualiter analogæ, & portiones parallelarũ ipſi, GM, in eiſdem conceptarum integræ ſint, ergo tota figura DQk, toti, EβL, æqualis erit. Conſimili modo in figura, BHIC, ducentes rectas lineas ipſi, GM, parallelas, nempè O2, P3, quibus ipſa diſtinguatur in fruſta, capientia dictas parallelarum portiones integras, ſcilicet in fruſta, BON, CN2, PH4, 4I3, OP32, PH4, 4I3, eaſdem, O2, P3, producentes vt ſecent ambitum figuræ, EYL, velut in, T, X, ℞, Y, deſcriptiſq; lineis, EV, ZL, vt fuit deſcripta, 5T&, vt conſtituatur figura, ETV, æqualiter analoga fruſto, CN2, (ex quo remanet, EVX, æqualiter analoga ipſi, BON,) & figura, Z℞L, æqualiter analoga ipſi, 4I3, (ex quo, ZLY, remanet etiam æqualiter analoga ipſi, PH4,) cum in his captæ parallelarum dictæ portiones integræ ſint, manifeſtum erit fig. ETV, æquari ipſi, CN2, EVX, ipſi, BON, Z℞L, ipſi, 4I3, ZLY, ipſi, PH4, & tandem, XT℞Y, ipſi, OP32, ex quo concludemus figurã, BHIC, æquari ipſi, EYL, hoc eſt ipſi, EβL, ſed eidem, EβL, oſtenſa eſt æqualis etiam, DQk, ergo figuræ, BHIC, DQk, inter ſe æquales erunt, igitur quæcumque planæ figuræ æqualiter analogæ inter ſe æquales erunt, quod oſtendendum erat. Per hæc autem priori parti Propoſ. 1. huius iam ſatisfactum eſſe manifeſtum eſt.

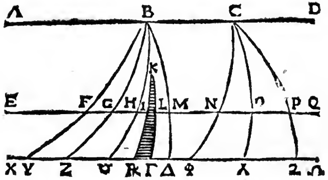
Ex antec. Lem.

Ex antec. Lem.

PROPOSITIO II.

Figuræ planæ quæcumque in eiſdem parallelis conſtitutæ, in quibus, ductis quibuſcumque eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcumque rectæ lineæ portiones ſunt inter ſe, vt cuiuslibet alterius in eiſdem figuris conceptæ portiones (homologis tamen in eadem figura ſemper exiſtentibus) eandem inter ſe proportionem habebunt, quam dictæ portiones. Dicantur autem proportionaliter analogæ, ac etiam, ſi libuerit, iuxta regulas ipſas parallelas, in quibus exiſtunt.

Sint



Sint duæ quælibet figuræ planæ,B&℞ kΓΔ, CΦλ,inter parallelas,AD,XΩ,conſtitutæ,ducta verò vtcumque,EQ,prædictis parallela,eiuſdem portiones in figura,B&Δ,conceptæ, quæ ſint,HI, LM,ſimul ſumptæ ſint ad eam,ſeu ad eas, quæ concipiuntur in figura, CΦλ, vt aliæ quælibet ſimiliter ſumptæ,nempè ex.g.vt,& ℞ΓΔ,ad,Φλ. Dico figuram,B&℞ kΓΔ ad figuram,CΦλ,eſſe vt, HI, LM,ad,NO, vel vt,& ℞, ΓΔ,ad Φλ, vel vt quęlibet aliæ ſimiliter ſumptæ. Accipiantur in, Φλ,producta verſus, λ, quotcumque eidem, Φλ, æquales, vt, λ2,ſimiliter quælibet linearum figuræ,CΦλ,producatur,& in ipſa intelligantur tot aſſumptæ æquales vnicuique productarum,quot aſſumptæ ſunt æquales ipſi,Φλ,ex.g.vnica tantum,& per omnium terminos ex parte,2,trãſeat linea, CP2, ſimiliter in alia figura,B&Δ, ſumantur quotcumque in ipſa, Δ&,producta verſus,&, æquales ipſis,& ℞, ΓΔ,ſimul ſumptis, & productis reliquis in fig. B & Δ, ipſi, & Δ, parallelis, aliæ tot æquales ſuis productis in directum capiantur, per quorum omnium terminos tranſeant lineæ, B G Z, B F Y. Quoniam ergo figuræ,BFYZG,BGZ&H, B& ℞KΓΔ, ſunt in eiſdem parallelis, A D, X Ω; & ductis in eiſdem quomodocumq; ipſis,AD, XΩ,parallelis, interceptæ in figuris portiones ſunt æquales, ideò ipſę figurę, B Y Z, BZ&, B&℞KΓΔ, ęqualiter analogæ, & ſubinde ęquales, erunt: Quo pacto Per ant. etiam oſtendemus figuras, ΦCλ, λC2, ęquales eſſe: Quotuplex

plex ergo eſt aggregatum ex, Y ℞, ΓΔ, aggregati ex, & ℞ ΓΔ, totuplex erit aggregatum ex figuris, BYZ, BZ&, B& ℞KΓΔ, ſeu figura, BY ℞KΓΔ, figuræ, B& ℞KΓΔ: ſimiliter quotuplex erit, Φ2, ipſius, ΦΛ, totuplex erit, aggregatum ex figuris, CΦΛ, CΛ2, hoc eſt figura, CΦ2, ipſius figuræ, CΦΛ. Habemus ergo æquè multiplices primæ, & tertiæ vtcumque aſſumptas, ſimiliter, & æquè multiplices ſecundæ, & quartæ. Quoniam verò ex. g. Y℞, ΓΔ; FI, LM, ſunt æquè multiplices ipſarum, & ℞, ΓΔ; HI, LM; ſimiliter, 2Φ, PN, ſunt æquè multiplices ipſarũ, ΦΛ, NO, ipſæ verò, & ℞, ΓΔ, HI, LM; ΦΛ, NO, ſunt proportionales, ideò ſi aggregatum ex, Y℞, ΓΔ, adæquabitur ipſi, Φ2, etiam aggregatum ex, FI, LM, adæquabitur ipſi, NP, vt & reliquæ omnes ſimiliter ſumptæ, & conſequenter etiam figura, BY℞KΓΔ, adæquabitur figuræ, CΦ: ſi verò aggregatum ex, Y ℞, ΓΔ, ſuperet, Φ2, eodem modo patebit figuram, BI℞KΓΔ, ſuperare figuram, CΦ2; vel ſuperari ab eadem, ſi, Y℞, ΓΔ, ſuperetur à, Φ2. Ergo prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam, ſcilicet figura, B&℞KΓΔ, ad figuram, CΦΛ, erit, vt aggregatum ex, & ℞, ΓΔ; ad, ΦΛ, vel vt aggregatum ex, HI, LM, ad, NO, ſeu vt quælibet aliæ duæ ſimiliter ſumptæ, quod erat oſtendendum. Dicantur autem dictæ figuræ proportionaliter analogæ iuxta regulam, AD, vel, XΩ. Ex ant.

PROPOSITIO III.

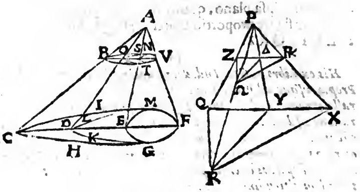
Figuræ ſolidæ quæcumque in eiſdem planis parallelis conſtitutæ, in quibus ductis quibuſcumque planis dictis parallelis æquidiſtantibus, conceptæ cuiuſcumque ſic ducti plani in ipſis ſolidis figuræ planæ ſunt inter ſe, vt eiuſmodi cuiuslibet alterius plani in eiſdem ſolis conceptæ figuræ (homologis tamen in eodem ſolido ſemper exiſtentibus) eandem inter ſe, quam dictæ iam conceptæ cuiuſcumq; plani figuræ, rationem habebunt. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas ipſa plana parallela, in quibus exiſtunt.

Sint duæ quælibet fig. ſolidæ, AMEGF, PQRY, in eiſdem planis parallelis conſtitutæ; ductis verò quibuſcumq; pla-

nis præfatis parallelis ęquidiſtantibus, eorum conceptæ in ſolidis figuræ ſint vnius plani ex.g.figuræ, NSTV, ZΩΔ, alterius autem, MEGF, QRY, vel contingat has eſſe ſolidorum baſes, ac in altero planorum parallelorum, ſolida, AMEGF,PQRY, contingentium, ſit verò figura,MEGF,ad figuram,QRY, vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, homologis nempè in eodem ſolido exiſtentibus. Dico ſolidum, AMEGF, ad ſolidum, PQRY, eſſe vt, NSTV, figura, ad figuram, ZΩΔ, vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur enim in figura, MEGF, vtcumque recta, EF, ad illius ambitũ terminata,cui ducta parallela,SV,in figura, NSTV, producãtur ambæ indefinitè verſus pũcta, S,E,in quibus ſumantur vtcumq; æquè earũ multiplices, BS,CE.Similiter in eiſdem figuris ductis alijs eiſdem, SV, EF, æquidiſtantibus, ſumantur earum pariter æquè multiplices iuxta prædictarum multiplicitatem,& omnium termini ſint in lineis,NBT, MICHG, ſicut ipſarum partium termini ſint in lineis, NST, NOT,NBT,MEG,MDG,MCG: traductis verò alijs quotcumq; planis præfatis parallelis, ac ipſa ſolida ſecantibus, hoc idem fiat circa ipſorum figuras in ipſis ſolidis conceptas,omniũ verò ita reſultantiũ figurarũ termini ſint in ſuperficiebus, AMCG,AMDG, AMEG. Similiter in alio ſolido eſto quod plana, quæ produxerunt in ſolido, AMEGF, figuras, MEGF, NSTV, genuerint figuras, QRY, ZΔΩ, ad quas illæ habeãt eandem rationem: ductis autẽ, vel aſſumptis rectis, QY, ZΔ, inter ſe parallelis, illæ producantur verſus eandem partem, ΔY, in ijſq; productis accipiantur quæcumque æquè multiplices, vel æquales, YX, ΔR, & idẽ fiat in ceteris ipſis parallelis in figuris,QRY,ZΩΔ,ſic productis, & omnium termini ſint in lineis, YXR, ΔRΩ,hę verò lineæ, ſicut,& reliquarum figurarum eodem modo producibilium, ſint in ſuperficiebus, PYR, PYXR. Manifeſtum eſt autem figuras,MEGF, MDGE, MCGD,eſſe æqualiter analogas, & ideò inter ſe æquales; ſicut etiam figurę, NSTV, NOTS, NBTO, pariter inter ſe ſunt æquales, & quæcunque alię ſunt in eodem plano: ex quo habemus etiã ſolida, AMEGF, AMDGE, AMCGD, eſſe ęqualiter analoga, & ideò inter ſe ęqualia. Eodẽ modo oſtendemus ſolida, PQRY,PRXY,

Ex antec.

pariter



pariter inter ſe ęqualia eſſe. Quotuplex eſt ergo ſolidũ AM CGF, ex tribus, AMCGD, AMDGE, AMEGF, cõpoſitũ ſolidi, AMEGF, totuplex eſt figura, MCGF, ex tribus, MC GD, MDGE, MEGF, cõpoſita, figurę, MEGF. Similiter quotuplex eſt ſolidum, PQRX, ex duobus, PQRY, PYRX, compoſitum ipſius, PQRY, totuplex eſt baſis, QRX, ex duabus, QRY, YRX, compoſita, fig. QRϒ; ita vt habeamus ęquè multiplices primæ, & tertię, necnon ſecundæ, & quartæ magnitudinis. Cum autem figuræ, FMG, VNBT, ſint æquè multiplices figurarum, MEGF, NSTV, & pariter figuræ, QRX, ZΩ℞, ſint æquè multiplices figurarum, QRϒ, ZΩΔ, ipſæ verò figuræ, MEGF, QRϒ, NSTV, ZΩΔ, ſint proportionales, & homologæ, MEGF, NSTV: ideò ſi figura, MCGF, fuerit æqualis figurę, QRX, etiam ſignra, NBTV, erit ęqualis figurę, ZΩ℞, & quęlibet alia in ſolido, AMCGF, ſibi reſpondenti in alio ſolido, PQRX, vnde & ſolidum, AMCGF, æquabitur ſolido, PQRX. Et ſi figura, MCGF, ſuperauerit figuram, QRX, eodem modo oſtendemus, quod ſolidum, AMCGF, ſuperabit ſolidum, PQRX, & ſi illa ſuperabitur, etiam hoc ſuperabitur. Ergo prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam, hoc eſt ſolidum, AMEGF, ad ſolidum, PQRY, erit vt figura, MEGF, ad figuram, QRϒ, vel vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, vel vt alia quælibet eiuſmodi in ſolido, AMEGF, ad ſibi reſpon-

Conuerſ. Defin. 5. Qui Elem.

Ex 1. huius.

Defin. 5. Qui Elem.

 dentem

dentem in alio ſolido, PQRY, hoc eſt ad exiſtentem in eodem cum ipſa plano, quod oſtendere opus erat. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas, MEGF, QRr.

II.

His ex Libro 7. Geo. Ind. deprumptis, ibidem poſtmodum à Prop. 4. vſque ad Prop. 9. excluſiuè recoluntur oſtenſa circa parallelogramma, & triangula Libro 2. probanturque hac noua ratione eiſdem conuenire communia ſymptomata, quæ ipſis inesse iuxta priorem methodum in Exerc. ant. dicebantur, ac numero 21. ennumerata fuere. Hoc autem deducitur hic ex Prop. 3. ſuperius oſtenſa; parallelogramma enim, & triangula in eadem altitudine exiſtentia probantur eſſe inter ſe vt baſes, quia ſunt figuræ proportionaliter analogæ: & ex hoc reliqua ſymptomata inferuntur via geometrica conſueta, ac transferuntur ad triangula, quia hæc ſunt dimidia parallelogrammorum ſub duobus quibuſcunque eorum lateribus completorum. Non diſſimili ratione infertur ex eadem Prop. 3. cylindricos & cònicos in eadem altitudine exiſtentes eſſe inter ſe vt baſes (quod & hic aliter infra probabimus) quapropter oſtenſo priſma triãgulare eſſe triplum pyramidis in eadem altitudine, & baſi cum eo exiſtentis, (quod & aliter oſtenſum eſt in Exercit. ant. numero, 27.) concluditur vniuerſaliter omnem cylindricum triplum eſſe conici in eadem altitudine, & baſi cum eo ſtantis. Hinc ſubinfertur cõmunia ſymptomata cylindricorũ in Exerc. ant. num. 22. ennumerata, etiam ipſis conicis conuenire.

III.

A Propoſitione 9. vſque ad 11. excluſiuè agitur de fruſtis conicis, vt præcipuè demonſtretur Prop. 28. Libri 2. tranſlata ad cylindricos, & conicorum fruſta. Hæc autem deducitur ex præoſtenſis in eodem Libro 7.

IV.

Cum ante Propoſitionem 11. ſolidorum examen aggreſſi iuxta hanc poſteriorem methodum, cylindricos, conicos, & eorum fruſta ſolum attigerimus, orientia ex parallelogrammis, triangulis, & trapezijs, vt pararetur aditus iuxta eandem ad alia quoq-

quoque ſolida, neceſſe fuit aliā ab adhibita in Lib. 2. rationem inſtituere. Manifeſtum eſt illi, qui attentè Libri ſecundi Geometriæ Ind. doctrinam perluſtrarit, vt plurimum ibi conſiderari omnia quadrata talium, & talium figurarum iuxta datas regulas, eorumque ad inuicem proportionem. Id verò non ab re factum eſſe intelliget Philogeometra: cum enim, habita ratione omnium quadratorum datarum planarum figurarū iuxta propoſitam regulam, illicò habeatur ratio quarumcumque ſimilium figurarum à datis figuris iuxta eandem regulam deſcriptarum, & conſequenter ſolidorum ſimilarium ab eiſdem figuris iuxta eādem regulam genitorum, vt probatur in Exerc. ant. Prop. 33. ideò operæpretium fuit prius examinare proportionem omnium quadratorum datarum figurarum, iuxta earum aſſumptam regulam, vt inde lucraremur eandem pro alijs quibuſcumque ſimilibus figuris, & ſolidis ſimilaribus ab eiſdem genitis iuxta eādem regulam. Similis ratio currit in hac poſteriori methodo, habita enim ratione inter ea, quæ æquiualent dictis omnibus quadratis, illicò huiuſmodi infiniti lucri nobis ſit acceſſio. Equiualens verò omnibus quadratis tale adinuenimus, quod facilè intelliget, qui doctrinam numeri 17. Exercitationis ant. non fuerit oblitus. Aſſumatur in exemplum, maioris intelligentiæ gratia, quæcumque figura plana, vt ex. gr. parallelogrammum, ſicuti fit in eodem numero 17. ſupponamuſq; regulā baſim, & ab ea deſcribi quadratum, rectum, vel inclinatum plano eiuſdem parallelogrammi, hocque quadratum ſit ducendorum planorum quoque regula. Rurſus ab omnibus lineis dicti parallelogrammi regula baſi intelligātur deſcribi quadrata, baſis quadrato parallela: ſcimus ergo iuxta priorem methodum hæc vocari omnia quadrata dicti parallelogrammi, regula baſi. Concipiamus nunc ſolidum quoddam adiacens præfato parallelogrammo in baſi eodem quadrato ab illius baſi iam deſcripto, in quo, ſi ſecetur regulæ parallelis quotcumque planis, gignantur ſemper quadrata, deſcripta à lineis parallelogrammi eius baſi parallelis. Nulli ergo dubium erit (ſi quotcumque plana duci poſſunt aſſumi ſupponantur) hæc coincidere cum dictis omnibus quadratis ipſius parallelogrammi, & eadem eſſe omnia plana dicti ſolidi, quod erit paralleleppipedum. Quapropter illud voco, Quadratum ſolidum dicti parallelogrammi, regula quadrato

drato illius baſis, vnde conceptui omnium quadratorum ſubſtituo conceptum ſoliditatis dicti paralleleppipedi, ſeu Quadrati ſolidi, quo hac ratione vtor. Hoc eſt ſi proponantur ex. gr. duo parallelogramma in eiſdem parallelis, quorum baſes deſcribant quadrata ad eandem partem eiſdem erecta, ſeu æquè inclinata, vbi iuxta priorem methodum quærenda eſſet proportio inter omnia quadrata eorundem; potius inueſtigo rationem quadratorum ſolidorum eorūdem parallelogrammorum, regula eadem; & hoc traiectis quomodocumq; planis regulæ equidiſtantibus, & collato quolibet quadrato vnius ſolidi cum ſibi reſpondente quadrato in alio ſolido: vbi enim inuenero inter ea ſingillatim comparata vnam, & eandem eſſe rationem, nempè quam habent quadrata baſium, illicò pronūciabo iuxta Prop. 3. ſuperiorē hæc eſſe ſolida proportionaliter analoga, & ideò habere eandem rationem, quam earum baſes.

V.

Quando ergo propoſita figura eſt parallelogrammum, eiuſque regula tam baſis quam ab ea deſcriptum quadratum, iam intelligimus quale nam ſit, quod vocamus quadratum ſolidum eiuſdem parallelogrammi & conſequēter dictis in præfato num. 17. Exercit. ant. appellamus quoque genitum ex eodem parallelogrammo tamquam ex ſua genitrice figura, eſtq; eiuſdē ſolidum ſimilare, vt patet ex B, Definitionis 8. tradita in Exercit. ant. ſi modo pro omnibus figuris ſimilibus ſubſtituantur quotcumque in eo conceptibiles. Quod ſi mutetur figura genitrix, quæ fuit parallelogrammum in triangulum, trapezium, & vniuerſaliter in aliam quācumque figuram planam, in qua ſit aſſumpta qualibet regula, & ab ea ſit deſcriptum quadratum rectum, vel inclinatum plano dictæ genitricis figuræ, nunc, puto, facile intelligi poterit quale nam ſit illius quadratum ſolidum, & quomodo inter quarumcumque genitricium figurarum quadrata ſolida ſit ratio quærenda, illaque inuenta ad alia quæcumque ſimilaria ſolida ab eiſdem genita figuris, transferatur. Sciendum tamen eſt à lineis, quæ pro regulis aſſumuntur, vice quadratorum poſſe deſcribi rectangula altera parte longiora, & conſequenter his parallela plana tunc nō eſſe quadrata, ſed rectangula

Digitized by Google

gula præfatis æqualia, & ſimilia, ac ſimiliter deſcripta in eoque caſu pro quadrato ſolido nos ipſum appellare rectangulum ſolidum. Vtraque autem poſſumus hac generali deffinitione comprehendere.

DEFINITIO RECTANGVLORVM SOLIDORVM.

SI propoſitum quodcumque ſolidum parallelis quotcumque planis ita ſecari poſſit, vt concepta ex ſecantibus planis in eo figuræ ſint ſemper parallelegramma rectangula; latera verò eadem deſcribantia ſint omnia vni cuidam lateri, vt regulæ æquidiſtantia: dicantur ea communi nomine Rectangula ſolida. Verum ſi dicta rectãgula fuerint quadrata, dicantur ſpeciali nomine Quadrata ſolida; & Rectangula ſolida, cum illa non fuerint Quadrata.

VI.

Porrò iſtorum ſolidorum quædam proprietates in eodem Libro 7. demonſtratur. Vt in Prop. 11. oſtenditur eadem ſemper ſuperficiebus cylindraceis (hoc eſt quæ ſunt portiones ſuperficierum cylindricorum) comprehendi. Ex quo ſuppoſito illicò intelligimus ad minus 4, & ad ſummum 6, ſuperficiebus illa circumdari poſſe. Quatuor inquam erunt, deſinentibus rectangulis ad duo oppoſita puncta; quinque, ſi ex vna parte terminentur ad pũctum, & ex alia ad rectangulum; ſex tãdem, quãdo vtrinque limites erunt ambo rectangula. Sicuti verò quodcumque rectãgulum etsi habeat in ſuo ambitu quatuor latera, dicitur nihilominus contineri tantum ſub duobus angulum rectum in eo co ſtituentibus, juxta Def. pr. Lib. 2. Elementorum, quia oppoſita eiſdem duo latera ſunt ſemper ipsis æqualia: ita quodcumque ex dictis ſolidis etsi quatuor ſuperficiebus adminus contineatur, in quibus iacent ſemper latera deſcriptorum rectangulorum, congruenter tamen dictæ Definitioni Euclidianæ ipſum dicimus quoque comprehendi ſub duabus tantum ſuperficiebus, capientibus duo latera rectangulorum inuicem perpendicularia, quia alia duæ prædictis oppoſitæ exhibent & ipſæ præfatis æqualia latera. Aliqua tamen hic intereſt cum Euclidiana Def. differentia, etsi enim infinita latera reperiri

poſſint

poſſint illis duobus æqualia, ſub quibus rectangula.. contineri, quæ ad angulum rectum componi poſſunt, & ipſum rectangulum continere, illa tamen ſunt ſemper rectæ lineæ. A pro iſtis ſolidis infinita quidem ſuperficies reperiri poſſunt exhibentes æqualia latera ijs, quæ iacent in illis duabus, ſub quibus rectangulum ſolidum continetur (vt oſtenditur in eodem Lib. 7. Prop. 11, 12.) quas omnes propterea inuicem homologas voco: verum non omnes poterunt in ambitu dicti ſolidi reperiri, ita vt quodammodo potentia, non actu ipſa ſolida continere æquius dicerentur. Hocque oritur ex varietate homologarum ſuperficierum, quæ non omnes ſunt planæ ſed & curuæ, & illæ infinitis modis variabiles. Quæ cum ita ſint, fit vt illæ tamen in ambitu aliorum ſolidorum reperiri poſſint, illaque actu continere, vnde & infinita ſolida ſub ſuperficiebus homologis contenta, dari poſſint, quoad ambientem quidem ſuperficiem diuerſa, ſed quoad ſoliditatem omnia inuicem æqualia: quod oſtendit Propoſitio 12. dicti Lib. 7. media Prop. prima; hoc tamen & infra aliter demonſtrabitur.

VII.

In Prop. 13. eiuſdem probatur quoque quadratum, vel rectãgulum ſolidum ſub parallelogrammo, & alia quacunque figura eiuſdem cum eo altitudinis, contentum; regulis duabus rectis, quarum vna ſit baſis parallelogrammi, fore cylindricum, eiuſq; baſim dictam figuram. Quod ſi præfata figura fuerit & ipſa parallelogrammum, regulaque eius baſis, tale ſolidum erit parallelepipedum. Hinc infertur in Corollario primo eiuſdẽ, ſi fuerint duo rectãgula ſolida communiter ſub dato parallelogrãmo, & ſingillatim ſub duabus figuris contenta, regulis &c. ea, cum ſint æquè alti cylindrici, in baſibus dictis figuris, ideò fore vt dictæ baſes. Similiter in Prop. 14. oſtenditur, ſi figuræ continentes fuerint triangula in eiſdem parallelis, & verticibus ad eandem partem conſtitutis, contenta ſub eiſdem ſolida rectangula, regulis baſibus eorundem, fore pyramides, rectangulas baſes habentes; & contenta ſub trapezijs, pyramidum fruſta.

VIII.

Sequitur ibidem Propoſitio 15. ſimilis Propoſitioni 23. Lib. 2. eiuſdem Geometriæ Ind. quapropter in ea primò probatur, ſi fuerint

Digitized by Google

fuerint duæ qualibet plana figuræ in eiſdem parallelis, quarum altera ſit regula, ſupponaturq; altera dictarũ figurarũ īdiuiſa, & reliqua diuiſa, prout dicitur in præcitata Prop. 23: rectãgulũ ſolidũ ſub indiuiſa, & diuiſa tãquã integra, æqua ri rectangulis ſolidis ſub indiuiſa, & ſub partibus diuiſæ. Hoc verò demõſtrato facile inferiuntur ijs ſimilia, quæ in Coroll. præfatæ Prop. 23. colliguntur, hoc eſt ſi ea iuxta hanc methodum adaptam ſupponantur. De his tamen in ſequentibus pariter agemus.

IX.

His demonſtratis probantur denuò per hæc noua fundamẽta Prop. 30, 31, 32, quæ cum ſint in gratiam doctrinæ reliquorum Librorum dictæ Geometriæ, quam hic totã proſequi neutiquam intendimus, propterea & in Exerc. ant. prætermiſſæ ſunt, & hic quoque relinquuntur; vt & reliqua ex Libro 3, 4, 5, eiuſdẽ Geometriæ, reſtaurata iuxta hanc poſteriorem methodum.

X.

Vt verò colligi poſſet fructus, quem ex conſideratione ſolidorum rectangulorum ſub datis figuris pendere ſuperius diximus, neceſſe fuit adhuc oſtendere vt Quadrata, vel rectãgula ſolida ſub duabus quibuſcumque figuris iuxta datas regulas, ita eſſe quæcunq; ſolida ſimilaria genita ab eiſdem figuris iuxta eaſdem regulas. Hoc autem probat Prop. 22. dicti Libri 7. ſimili demõſtratione ei, quæ allata eſt ad oſtendendam Propoſ. 33. Libri 2. quam attulimus in Exercit. ant.

XI.

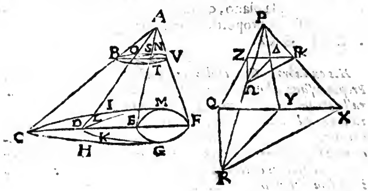
Denique vt modus procedendi iuxta hanc poſteriorem methodum in omnibus alijs figuris aliqualiter appareat, eadem exempla afferemus, quæ in fine Exerc. ant. num. 35, 36, circa Parabolam, & ab ea genita ſolida iam allata ſunt. Aſſumpta igitur denuò figura eiuſdem num. 35, prius & hic oſtendemus parallelogrammum, TC, ſexquialterum eſſe parabolæ, O A C, tali ratione. Suppoſitis iiſdem ibi conſtructis, manifeſtum eſt, vt ibi probabatur, GK, ad, KH, eſſe vt quadratum, Rk ad quadratum, KI: ſed vt GK, ad kH, ita ſumpta communi altitudine, GK, eſt quadratum, GK, ad rectãgulum, GKH; ergo quadratum,

P　　　　Gk, ad

nis præfatis parallelis ęquidiſtantibus, eorum conceptæ in ſolidis figuræ ſint vnius plani ex.g.figuræ, NSTV, ZΩΔ, alterius autem, MEGF, QRY, vel contingat has eſſe ſolidorum baſes, ac in altero planorum parallelorum, ſolida, AMEGF, PQRY, contingentium, ſit verò figura, MEGF, ad figuram, QRY, vt figura, NSTV, ad figuram, ZΩΔ, homologis nempè in eodem ſolido exiſtentibus. Dico ſolidum, AMEGF, ad ſolidum, PQRY, eſſe vt, NSTV, figura, ad figuram, ZΩΔ, vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur enim in figura, MEGF, vtcumque recta, EF, ad illius ambitū terminata, cui ducta parallela, SV, in figura, NSTV, producãtur ambæ indefinitè verſus pūcta, S, E, in quibus ſumantur vtcumq; æquè earū multiplices, BS, CE. Similiter in eiſdem figuris ductis alijs eiſdem, SV, EF, æquidiſtantibus, ſumantur earum pariter æquè multiplices iuxta prædictarum multiplicitatem, & omnium termini ſint in lineis, NBT, MICHG, ſicut ipſarum partium termini ſint in lineis, NST, NOT, NBT, MEG, MDG, MCG: traductis verò alijs quotcumq; planis præfatis parallelis, ac ipſa ſolida ſecantibus, hoc idem fiat circa ipſorum figuras in ipſis ſolidis conceptas, omniū verò ita reſultantiū figurarū termini ſint in ſuperficiebus, AMCG, AMDG, AMEG. Similiter in alio ſolido eſto quod plana, quæ produxerunt in ſolido, AMEGF, figuras, MEGF, NSTV, genuerint figuras, QRY, ZΔΩ, ad quas illæ habeãt eandem rationem: ductis autē, vel aſſumptis rectis, QY, ZΔ, inter ſe parallelis, illæ producantur verſus eandem partem, ΔY, in ijſq; productis accipiantur quæcumque æquè multiplices, vel æquales, YX, Δ℞, & idē fiat in cęteris ipſis parallelis in figuris, QRY, ZΩΔ, ſic productis, & omnium termini ſint in lineis, YXR, Δ℞Ω, hę verò lineæ, ſicut & reliquarum figurarum eodem modo producibilium, ſint in ſuperficiebus, PYR, PYXR. Manifeſtum eſt autem figuras, MEGF, MDGE, MCGD, eſſe æqualiter analogas, & ideò inter ſe æquales; ſicut etiam figurę, NSTV, NOTS, NBTO, pariter inter ſe ſunt æquales, & quæcunque alię ſunt in eodem plano: ex quo habemus etiā ſolida, AMEGF, AMDGE, AMCGD, eſſe ęqualiter analoga, & ideò inter ſe ęqualia. Eodē modo oſtendemus ſolida, PQRY, PRXY,

Ex antec.

pariter



pariter inter ſe ęqualia eſſe. Quotuplex eſt ergo ſolidũ AM CGF, ex tribus,AMCGD, AMDGE ,AMEGF, cõpoſitũ ſolidi,AMEGF,totuplex eſt figura, MCGF, ex tribus, MC GD,MDGE,MEGF,cõpoſita,figurę,MEGF.Similiter quotuplex eſt ſolidum,PQRX, ex duobus,PQRY,PYRX,compoſitum ipſius, PQRY,totuplex eſt baſis, QRX,ex duabus, QRY , YRX , compoſita, fig. QR *Y* ; ita vt habeamus ęquè multiplices primæ,& tertię,necnon ſecundæ,& quartæ magnitudinis. Cum autem figuræ , FMG , VNBT , ſint æquè multiplices figurarum , MEGF , NSTV , & pariter figuræ, QRX , ZΩR, ſint æquè multiplices figuraram, QR*Y*, *Z*ΩΔ, ipſæ verò figuræ, MEGF, QR*Y*, NSTV, *Z*ΩΔ,ſint proportionales , & homologæ , M E G F , N S T V : ideò ſi figura, MCGF, fuerit æqualis figurę, QRX, etiam fignra , NBTV, erit ęqualis figurę,ZΩR,& quęlibet alia in ſolido,AMCGF, ſibi reſpondenti in alio ſolido , PQRX , vnde & ſolidum , AMCGF,æquabitur ſolido,PQRX. Et ſi figura , MCGF, ſuperauerit figuram,QRX, eodem modo oſtendemus,quod ſolidum, AMCGF, ſuperabit ſolidum, PQRX, & ſi illa ſuperabitur, etiam hoc ſuperabitur. Ergo prima ad ſecundam erit , vt tertia ad quartam , hoc eſt ſolidum , A M E G F, ad ſolidum , P Q R Y , erit vt figura, M E G F , ad figuram, Q R *Y* , vel vt figura, N S T V, ad figuram , ZΩΔ,vel vt alia quælibet eiuſmodi in ſolido , A M E G F , ad ſibi reſpondentem

Conuerſ. Defin.5. Qui Elem.

Ex 1. huius.

Defin. 5. Qui Elem.

dentem in alio ſolido, PQRY, hoc eſt ad exiſtentem in eodem cum ipſa plano, quod oſtendere opus erat. Dicantur autem figurę proportionaliter analogę, iuxta regulas, MEGF, QRY.

II.

His ex Libro 7. Geo. Ind. deprumptis, ibidem poſtmodum à Prop. 4. vſque ad Prop. 9. excluſiuè recoluntur oſtenſa circa parallelogramma, & triangula Libro 2. probanturque hac noua ratione eiſdem conuenire communia ſymptomata, quæ ipſis inesse iuxta priorem methodum in Exerc. ant. dicebantur, ac numero 21. ennumerata fuere. Hoc autem deducitur hic ex Prop. 3. ſuperius oſtenſa; parallelogramma enim, & triangula in eadem altitudine exiſtentia probantur eſſe inter ſe vt baſes, quia ſunt figuræ proportionaliter analogæ: & ex hoc reliqua ſymptomata inferuntur via geometrica conſueta, ac transferuntur ad triangula, quia hæc ſunt dimidia parallelogrammorum ſub duobus quibuſcunque eorum lateribus completorum. Non diſſimili ratione infertur ex eadem Prop. 3. cylindricos & conicos in eadem altitudine exiſtentes eſſe inter ſe vt baſes (quod & hîc aliter infra probabimus) quapropter oſtenſo priſma triãgulare eſſe triplum pyramidis in eadem altitudine, & baſi cum eo exiſtentis, (quod & aliter oſtenſum eſt in Exercit. ant. numero, 27.) concluditur vniuerſaliter omnem cylindricum triplum eſſe conici in eadem altitudine, & baſi cum eo ſtantis. Hinc ſubinfertur cõmunia ſymptomata cylindricorũ in Exerc. ant. num. 22. ennumerata, etiam ipſis conicis conuenire.

III.

A Propoſitione 9. vſque ad 11. excluſiuè agitur de fruſtis conicis, vt præcipuè demonſtretur Prop. 28. Libri 2. tranſlata ad cylindricos, & conicorum fruſta. Hæc autem deducitur ex præoſtenſis in eodem Libro 7.

IV.

Cum ante Propoſitionem 11. ſolidorum examen aggreſſi iuxta hanc poſteriorem methodum, cylindricos, conicos, & eorum fruſta ſolum attigerimus, orientia ex parallelogrammis, triangulis, & trapezijs, vt pararetur aditus iuxta eandem ad alia

quoq-

Digitized by Google

quoque ſolida, neceſſe fuit aliā ab adhibita in Lib. 2. rationem inſtituere. Manifeſtum eſt illi, qui attentè Libri ſecundi Geometriæ Ind. doctrinam perluſtrarit, vt plurimum ibi conſiderari omnia quadrata talium, & talium figurarum iuxta datas regulas, eorumque ad inuicem proportionem. Id verò non ab re factum eſſe intelliget Philogeometra: cum enim, habita ratione omnium quadratorum datarum planarum figurarū iuxta propoſitam regulam, illicò habeatur ratio quarumcumque ſimilium figurarum à datis figuris iuxta eandem regulam deſcriptarum, & conſequenter ſolidorum ſimilarium ab eiſdem figuris iuxta eādem regulam genitorum, vt probatur in Exerc. ant. Prop. 33. ideò operæpretium fuit prius examinare proportionem omnium quadratorum datarum figurarum, iuxta earum aſſumptam regulam, vt inde lucraremur eandem pro alijs quibuſcumque ſimilibus figuris, & ſolidis ſimilaribus ab eiſdem genitis iuxta eādem regulam. Similis ratio currit in hac poſteriori methodo, habita enim ratione inter ea, quæ æquiualent dictis omnibus quadratis, illicò huiuſmodi infiniti lucri nobis fit acceſſio. Equiualens verò omnibus quadratis tale adinuenimus, quod facilè intelliget, qui doctrinam numeri 17. Exercitationis ant. non fuerit oblitus. Aſſumatur in exemplum, maioris intelligentiæ gratia, quæcumque figura plana, vt ex. gr. parallelogrammum, ſicuti fit in eodem numero 17. ſupponamuſq; regulā baſim, & ab ea deſcribi quadratum, rectum, vel inclinatum plano eiuſdem parallelogrammi, hocque quadratum ſit ducendorum planorum quoque regula. Rurſus ab omnibus lineis dicti parallelogrammi regula baſi intelligātur deſcribi quadrata, baſis quadrato parallela: ſcimus ergo iuxta priorem methodum hæc vocari omnia quadrata dicti parallelogrammi, regula baſi. Concipiamus nunc ſolidum quoddam adiacens præfato parallelogrammo in baſi eodem quadrato ab illius baſi iam deſcripto, in quo, ſi ſecetur regula parallelis quotcumque planis, gignantur ſemper quadrata, deſcripta à lineis parallelogrammi eius baſi parallelis. Nulli ergo dubium erit (ſi quotcumque plana duci poſſunt aſſumi ſupponantur) hæc coincidere cum dictis omnibus quadratis ipſius parallelogrammi, & eadem eſſe omnia plana dicti ſolidi, quod erit paralleleppipedum. Quapropter illud voco, Quadratum ſolidum dicti parallelogrammi, regula qua-

drato

Digitized by Google

drato illius baſis, vnde conceptui omnium quadratorum ſubſtituo conceptum ſoliditatis dicti parallelepipedi, ſeu Quadrati ſolidi, quo hac ratione vtor. Hoc eſt ſi proponantur ex. gr. duo parallelogramma in eiſdem parallelis, quorum baſes deſcribant quadrata ad eandem partem eiſdem erecta, ſeu æquè inclinata, vbi iuxta priorem methodum quærenda eſſet proportio inter omnia quadrata eorundem; potius inueſtigo rationem quadratorum ſolidorum eorũdem parallelogrammorum, regula eadem; & hoc traiectis quomodocumq; planis regulæ æquidiſtantibus, & collato quolibet quadrato vnius ſolidi cum ſibi reſpondente quadrato in alio ſolido: vbi enim inuenero inter ea ſingillatim comparata vnam, & eandem eſſe rationem, nempè quam habent quadrata baſium, illicò pronũciabo iuxta Prop. 3. ſuperiorẽ hæc eſſe ſolida proportionaliter analoga, & ideò habere eandem rationem, quam earum baſes.

V.

Quando ergo propoſita figura eſt parallelogrammum, eiuſque regula tam baſis, quam ab ea deſcriptum quadratum, iam intelligimus quale nam ſit, quod vocamus quadratum ſolidum eiuſdem parallelogrammi & conſequẽter dictis in præfato num. 17. Exercit. ant. appellamus quoque genitum ex eodem parallelogrammo tamquam ex ſua genitrice figura, eſtq; eiuſdẽ ſolidum ſimilare, vt patet ex B, Definitionis 8. traditæ in Exercit. ant. ſi modo pro omnibus figuris ſimilibus ſubſtituantur quotcumque in eo conceptibiles. Quod ſi mutetur figura genitrix, quæ fuit parallelogrammum in triangulum, trapezium, & vniuerſaliter in aliam quãcumque figuram planam, in qua ſit aſſumpta quælibet regula, & ab ea ſit deſcriptum quadratum rectum, vel inclinatum plano dictæ genitricis figuræ, nunc, puto, facile intelligi poterit quale nam ſit illius quadratum ſolidum, & quomodo inter quarumcumque genitricium figurarum quadrata ſolida ſit ratio quærenda, illaque inuenta ad alia quæcumque ſimilaria ſolida ab eiſdem genitâ figuris, transferatur. Sciendum tamen eſt à lineis, quæ pro regulis aſſumuntur, vice quadratorum poſſe deſcribi rectangula altera parte longiora, & conſequenter his parallela plana tunc nõ eſſe quadrata, ſed rectangula

Digitized by Google

gula præfatis æqualia, & ſimilia, ac ſimiliter deſcripta. in eoque caſu pro quadrato ſolido nos ipſum appellare rectangulum ſolidum. Vtraque autem poſſumus hac generali deffinitione comprehendere.

DEFINITIO RECTANGVLORVM SOLIDORVM.

SI propoſitum quodcumque ſolidum parallelis quotcumque planis ita ſecari poſſit, vt concepta ex ſecantibus planis in eo figura ſint ſemper parallelogramma rectangula; latera verò eadem deſcribantia ſint omnia vni cuidam lateri, vt regulæ æquidiſtantia: dicantur ea communi nomine Rectangula ſolida. Verum ſi dicta rectãgula fuerint quadrata, dicantur ſpeciali nomine Quadrata ſolida; & Rectangula ſolida, cum illa non fuerint Quadrata.

VI.

Porrò iſtorum ſolidorum quædam proprietates in eodem Libro 7. demonſtratur. Vt in Prop. 11. oſtenditur eadem ſemper ſuperficiebus cylindraceis (hoc eſt quæ ſunt portiones ſuperficierum cylindricorum) comprehendi. Ex quo ſuppoſito illicò intelligimus ad minus 4, & ad ſummum 6, ſuperficiebus illa circumdari poſſe. Quatuor inquam erunt, deſinentibus rectangulis ad duo oppoſita puncta; quinque, ſi ex vna parte terminentur ad pũctum, & ex alia ad rectangulum; ſex tãdem, quãdo vtrinque limites erunt ambo rectangula. Sicuti verò quodcumque rectãgulum etsi habeat in ſuo ambitu quatuor latera, dicitur nihilominus contineri tantum ſub duobus angulum rectum in eo co ſtituentibus, iuxta Def. pr. Lib. 2. Elementorum, quia oppoſita eiſdem duo latera ſunt ſemper ipſis æqualia: ita quodcumque ex dictis ſolidis etsi quatuor ſuperficiebus adminus contineatur, in quibus iacent ſemper latera deſcriptorum rectangulorum, congruenter tamen dictæ Definitioni Euclidianæ ipſum dicimus quoque comprehendi ſub duabus tantum ſuperficiebus, capientibus duo latera rectangulorum inuicem perpendicularia, quia aliæ duæ prædictis oppoſitæ exhibent & ipſæ præfatis æqualia latera. Aliqua tamen hic intereſt cum Euclidiana Def. differentia, etsi enim infinita latera reperiri

poſſint

Digitized by Google

fuerint dua qualibet plana figura in eiſdem parallelis, quarum altera ſit regula, ſupponaturq; altera dictarũ figurarũ ĩdiuiſa, & reliqua diuiſa, prout dicitur in præcitata Prop. 23: rectãgulũ ſolidũ ſub indiuiſa, & diuiſa tãquã integra, æqua ri rectangulis ſolidis ſub indiuiſa, & ſub partibus diuiſæ. Hoc verò demoſtrato facilè inferiuntur ijs, ſimilia, quæ in Coroll. præfatæ Prop. 23. colliguntur, hoc eſt ſi eæ iuxta hanc methodum adaptam ſupponantur. De his tamen in ſequentibus pariter agemus.

IX.

His demonſtratis probantur denuò per hæc noua fundamẽta Prop. 30, 31, 32, quæ cum ſint in gratiam doctrinæ reliquorum Librorum dictæ Geometriæ, quam hic totã proſequi neutiquam intendimus, propterea & in Exerc. ant. prætermiſſa ſunt, & hic quoque relinquuntur; vt & reliqua ex Libro 3, 4, 5, eiuſdẽ Geometriæ, reſtaurata iuxta hanc poſteriorem methodum.

X.

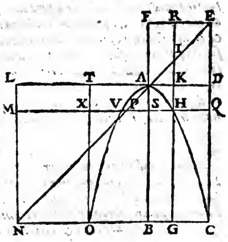
Vt verò colligi poſſet fructus, quem ex conſideratione ſolidorum rectangulorum ſub datis figuris pendere ſuperius diximus, neceſſe fuit adhuc oſtendere vt Quadrata, vel rectãgula ſolida ſub duabus quibuſcumque figuris iuxta datas regulas, ita eſſe quæcunq; ſolida ſimilaria genita ab eiſdem figuris iuxta eaſdem regulas. Hoc autem probat Prop. 22. dicti Libri 7. ſimili demõſtratione ei, quæ allata eſt ad oſtendendam Propoſ. 33. Libri 2. quam attulimus in Exercit. ant.

XI.

Denique vt modus procedendi iuxta hanc poſteriorem methodum in omnibus alijs figuris aliqualiter appareat, eadem exempla afferemus, quæ in fine Exerc. ant. num. 35, 36, circa Parabolam, & ab ea genita ſolida iam allata ſunt. Aſſumpta igitur denuò figura eiuſdem num. 35, prius & hic oſtendemus parallelogrammum, TC, ſexquialterum eſſe parabolæ, OAC, tali ratione. Suppoſitis iiſdem ibi conſtructis, manifeſtum eſt, vt ibi probabatur, GK, ad, KH, eſſe vt quadratum, Rk ad quadratum, KI; ſed vt GK, ad kH, ita ſumpta communi altitudine, GK, eſt quadratum, GK, ad rectãgulum, GKH; ergo quadratum,

 Gk, ad

G K, ad rectangulum, G K H, erit vt quadratum, Rk, ad quadratum, K I; & permutãdo quadratum, GK, ad quadratum, kR, hoc eſt quadratum, CD, ad quadratũ, DE, erit vt rectangulũ, GKH, ad quadratum, K I. Erunt ergo tam quadrata ſolida, B D, DF, regula, CE, inter ſe, quam rectãgulum ſolidũ ſub, BD, & trilineo, ADC, ac quadratum ſolidum trianguli, A D E,



regula eadem, inter ſe proportionaliter analoga: quapropter per Prop. 3. erunt vtraque vt quadrata, CD, D E, & conſequenter in eadem ratione inter ſe. Sic ergo quadratum ſolidum, B D, ad rectangulum ſolidum, ſub, BD, & trilineo, ADC; erit vt quadratum ſolidum, F D, ad quadratum ſolidum trianguli, ADE. Sed quadratum ſolidum, FD, triplum eſt quadrati ſolidi trianguli, ADE, per dicta num. 2. ſuperiori (etenim quadratum ſolidum, FD, eſt cylindricus, & quadratum ſolidum, ADE, eſt conicus, iuxta admonita num. 7. ſuperiori) ergo & quadratum ſolidum, BD, triplum erit rectanguli ſolidi ſub, BD, & trilineo, ADC. Verum vt quadratum ſolidum, B D, ad rectangulum ſolidum ſub, BD, & trilineo, ADC, ita eſt, BD, ad trillineum, ADC, per tradita eodem num. 7. ſuperiori: ergo parallelogrammum, B D, ipſius trilinei, ADC, triplum erit, & conſequenter ſemiparabolæ, A B C, ſexquialterum. Igitur & parallelogrammum, T C, parabola, O AC, ſexquialterum erit, vt loco ſupracitato per priorem methodum pariter oſtendebatur.

XII.

Sit nunc in eadem figura probandum quadratum ſolidum, TC, duplum eſſe quadrati ſolidi parabolæ, OAC, regula, OC. Suppoſitis ergo iiſdem conſtructis num. 36. Exerc. ant. conſtat, BA, ad, A S,

ad AS, ſeu, MS, ad, SP, eſſe vt quadratum, BC, vel, QS, ad quadratum, SH: vnde, ſumpta communi altitudine, MS, erit quadratum, MS, ad rectangulum, MSP, vt quadratum, QS, ad quadratum, SH. Quapropter vt ſupra, tam quadratum ſolidum, LB, concludetur eſſe proportionaliter analogum quadrato ſolido, DB, quam rectangulum ſolidum ſub, LB, & triangulo, ABN, quadrato ſolido ſemiparabolæ, CAB, & ſubinde hæc quatuor ſolida eſſe proportionalia. Sic igitur quadratum ſolidum, LB, ad rectangulum ſolidum ſub, LB, & triangulo, ABN, erit vt quadratum ſolidum, DB, ad quadratū ſolidum ſemiparabolæ, ACB. Sed quadratum ſolidum, LB, ad rectangulum ſolidum ſub, LB, & triangulo, ABN, eſt vt, LB, ad triangulū, ABN, per numerum 7. ſuperiorem, hoc eſt duplum. Ergo quadratum ſolidum, DB, quadrati ſolidi ſemiparabolæ, ACB, duplum erit; & conſequenter etiam quadratum ſolidum, TC, duplum erit quadrati ſolidi parabolæ, OAC: ſunt enim illa horum quadrupla. Nam per D. Sectionis 4. Propoſ. 23. Exerc. ant. huic ſtylo adaptata, iuxta ſuperius dicta nu. 8. quadratum ſolidum TC, æquatur quadratis ſolidis, TB, BD, & duobus rectangulis ſolidis ſub, TB, BD, hoc eſt quatuor quadratis ſolidis ipſius, TB. Qua ratione pariter conſtat quadratum ſolidum parabolæ, OAC, quadruplum eſſe quadrati ſolidi ſemiparabolæ, ACB. Porrò ex dictis num. 10. ſuperiori manifeſtum eſt hanc eandem rationem reperiri inter quæcumque alia ſolida genita ex parallelogrammo, TC, & parabola, OAC, iuxta eandem regulam, OC, quod probat dicti Lib. 7. Prop. 22. ad normam Propoſ. 33. Lib. 2. allatæ in Exerc. ant. & examinatæ num. 37. 38.

XIII.

Ex iam dictis ergo ſatis credo percipi poſſe omnibus quadratis datarum figurarum iuxta quandam regulam, rectè ſubſtitui earumdem quadrata ſolida iuxta eandem regulam: vt & omnibus rectangulis ſub duabus figuris iuxta datas regulas, rectangula ſolida ſub eiſdem iuxta eaſdem regulas. Hac enim, collatis inuicem diſtributiuè eorundem Indiuiſibilibus, facilè enucleatur quā rationem habeant. Etenim habentūr ſemper & hic quatuor ſolida proportionaliter, analogaq; quorū duo ſunt genita ex parallelogrāmis æquealtis, reliqua verò ex figuris eiſdē in

ſcriptis, regulis baſibus: & hæc ſunt æquiualentia quatuor magnitudinum ordinibus in Exerc. ant. num. 29. conſideratis. Patet ergo ratio procedendi per hanc quoque poſteriorem methodum.

XIV.

Quoniam verò Prop. 1. 2. & 3. ſuperius tradita totius huiuſce methodi ſunt fundamenta, ideò ad earum veritatem confirmandam in ſolidis, non diſsimili ratione ei, quam poſt eandem Prop. pr. immediatè adhibuimus ſuperius in planis, hæc quæ ſubſequuntur nuper oſtenſa, duxi ſuperaddenda. Ea tamen is præterire poterit, qui iã demoſtratis acquieſcat: quæ cum ſint in gratiam præcipuè dictarum Propoſitionum, inſeruiant tamen & toti doctrinæ Libri 7. dictæ Geo. Ind. propterea ſub titulo Lemmatum exhibentur.

XV.

Antequam verò ad hæc Lemmata accedamus, quoniam paſſim nomen cylindrici, eiuſque nonnullæ proprietates in ijs vſurpantur, vt multoties fit & pro ipſis, & pro conicis in ſuperioribus, etſi putem non obſcurè hucuſque hæc intelligi potuiſſe, dum dictum eſt cylindricos eſſe corpora columnaria, & conicos pyramidalia, attamen vt eorum ſingulas conditiones exactè percipiat ſtudioſus, omniſq; circa hæc ab eo tollatur ambiguitas, eorum definitiones Libro primo Geo. Ind. traditas hic conſultò repetere volui.

XVI.

Definitio Cylindrici, quæ eſt tertia Libri Primi Geo. Ind.

Expoſita quacunq; figura plana, & in eiuſdem ambitu ſumpto vtcunque puncto, ab eoque ad alteram eiuſdem partium ducta quadam recta linea terminata, & ſuper planum propoſitæ figuræ eleuata, ſi hæc per ambitum talis figuræ ſemper æquidiſtanter cuidam rectæ lineæ moueri intelligatur, donec omnem percurrerit ambitum: alterum eiuſdem extremum punctum quod non fertur per ambitum propoſitæ figuræ, deſcribet circuitum planæ figuræ ipſi propoſitæ æquidiſtãtis, vt probabitur. Solidum ergo, quod comprehenditur vtriſque figuris iam dictis, & ſu-

& ſuperficie linea, quæ reuoluitur, deſcripta dicetur, Cylindricus. Superficies in reuolutione deſcripta, necnon quodlibet illius fruſtum, ſuperficies cylindracea. Cylindrici oppoſita baſes, dictæ figuræ plana inter ſe æquidiſtantes. Latus autem cylindrici, quæuis recta in ſuperficie cylindracea oppoſitas baſes pertingens, cui congruit in reuolutione ipſa linea reuoluta. Et tandem regula lateris cylindrici dicetur illa, cui reuoluta ſemper manet æquidiſtans.

XVII.

Definitio Conici, quæ eſt quarta Libri Primi Geo. Ind.

EXpoſita plana quacunq; figura, extra cuius planum ad vtramuis eiuſdem partium quodcumque ſit aſſumptum punctum; ſi ab eo ad quoduis punctum illius ambitus recta linea ducatur, quæ indefinitè quoque ſit producta; & hæc per eiuſdem ambitum moueatur donec ipſum totum percurrerit ambitum; ſumptum punctum erit vertex ſolidi, quod comprehenditur ſuperficie deſcripta à linea, quæ reuoluitur, inter ambitum propoſitæ figuræ, & ſumptum punctum clauſa, vertex inquam, ſumptus reſpectu propoſitæ figuræ, vt probabitur. Tale ſolidum autem dicatur, Conicus, cuius baſis propoſita figura, & vertex dictum punctum. Superficies deſcripta à linea, quæ reuoluitur, & iacet inter ambitum propoſitæ figuræ, ac dictum punctum, & quodlibet illius fructum dicatur, Superficies Conicularis. Illæ verò rectæ lineæ, quæ in eadē reperiuntur, & quibus congruit reuoluta inter verticem, & ambitum baſis concluſa, vocentur; Latera eiuſdem Conici.

XVIII.

Proprietates quædam Cylindricorum demonſtratæ eodem Libro Primo Geo. Ind.

SI à quocunque puncto baſis cylindrici, per quam ſit reuolutio, verſus cylindricum ducta fuerit recta linea, parallela regulæ lateris cylindrici: hæc erit latus cylindrici in tali baſi conſtituti. Prop. 5. eiuſdem.

In cy-

Digitized by Google

In cylindrico, traiecto per eiuſdem latera quomodocunque plano creatur in ipſo parallelogrammum, vel parallelogramma. Corollarium Prop. 6.

Concurſus planorum per latera cylindrici tranſeuntium, fit in recta parallela eiuſdem cylindrici lateri. Prop. 7.

Traiectis per latera cylindrici quotcunque parallelis planis ipſum ſecantibus, fiunt in eo parallelogramma æquiangula. Propoſ. 8.

Et ſi plano per latera ducto æquidiſtet planum, cylindricum tangens: fiet contactus in recta, vel rectis, quæ erunt latera cylindrici; vel in parallelogrammis, æquiangulis per latera ducto. Prop. 9.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto, diuiditur in cylindricos. At ſi ſecetur parallelis planis, omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus, comprehenſa ab illis, & incluſa ſuperficie cylindracea, ſolida erunt pariter cylindrici. Propoſ. 10.

Cuiuſuis cylindrici oppoſitæ baſes ſunt ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitæ. Prop. 11.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto, eiuſdem oppoſitæ baſes ſecantur quoque in figuras ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitas. At ſi ſecetur parallelis planis, omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus, conceptæ in eo figuræ erunt pariter ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitæ. Prop. 12.

Secto cylindrico quomodocunque plano per latera ducto, necnon planis oppoſitis eiuſdem baſibus parallelis: eorum communes ſectiones erunt lineæ homologæ ſimilium figurarum ex tali parallelor. oppoſitis baſibus planorũ ſectione orientiũ. Prop. 13.

Si duæ figuræ planæ, non exiſtentes in eodem plano, fuerint ſimiles æquales, & ſimiliter poſitæ: illæ erunt cuiuſdam cylindrici oppoſitæ baſes.

XIX.
Proprietates quædam Conicorum ibidem oſtenſæ.

Punctum manens, cui in reuolutione inititur latus conici, eſt illius vertex reſpectu eiuſdem baſis. Prop. 15.

Si conicus ſecetur vtcunq; per verticẽ ducto plano, fiet in eo triãgulus, vel triangula. Prop. 16.

Secto

Secto conico per verticẽ ducto plano, diuiditur is in conicos. At eo ſecto plano omnibus eiuſdem lateribus coincidente, abſciſſum ab eo verſus verticem ſolidum erit conicus, eiuſque baſis abſcindens figura. Prop. 17.

Si per verticem conici, & rectam tangentem eius baſim extẽdatur planum; hoc tanget ipſum conicum in recta, vel rectis lineis, quæ erunt latera eiuſdem conici; vel in plano, aut planis, quæ erunt triangula. Prop. 18.

Si conicus ſecetur quomodocunq; plano baſi æquidiſtante, fiet in eo figura ſimilis eidem baſi, & ſimiliter poſita. Prop 19.

Si conicus ſecetur quomodocunque parallelis planis, omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus: concepta in ipſo figuræ erunt ſimiles & ſimiliter poſitæ. Prop. 20.

Secto conico per verticem ducto plano, vel aliquo ipſum tangente in plano, vel planis; ſi deinde ſecetur alijs planis vtcunq; parallelis: communes dictorum planorum ſectiones erunt lineæ homologæ figurarum, quæ ab ipſis æquidiſtantibus planis in eo producuntur. Prop. 21.

Si duæ figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ, inæquales tamen, non extiterint in eodem plano: illæ erunt cuiuſdam fruſti conici oppoſitæ baſes. Prop. 22.

Quoniam verò hic, vt & in ſuperioribus ſæpè fit mentiò ſimilium planarum figurarum, vt Lector nedum has intelligat iuxta particulares definitiones de ſimilibus figuris ab alijs traditas, ſed ẽt iuxta meã definitionẽ generalẽ cui particulares cõcordare in eodẽ Lib. 1. oſtẽdi, ideò hanc quoq; hic ſubiungendam duxi.

XX.
Definitio generalis ſimilium planarum figurarum, quæ eſt decima eiuſdem Libri primi.

Similes figuræ planæ in vniuersũ vocẽtur, in quarũ ſingulis oppoſitæ tãgẽtes ita duci põt & in eaſdẽ tãgẽtes ita incidere ad eundẽ angulũ, ex eadẽ parte, rectæ lineæ in illis terminatæ, vt ſi intra dictas oppoſitas tãgẽtes, eiſdẽ æquidiſtãte, vtcumq; ductæ fuerint rectæ lineæ, eas, quæ incidunt dictis tangentibus (quæ uocantur earum Incidentes) ſimiliter ad eandem partem ſecantes; reperiamus harum parallelarum, necnon & oppoſi-

oppoſitarum tangentium eas portiones, quæ inter dictas incidentes, & circuitus figurarum ad eandem partem sitæ ſunt, eodem ordine ſumptas, eandem inter ſe rationem habere, quam rectæ lineæ, quæ dictis tangentibus inciderunt & in eaſdem terminantur. Iſtæ autem dicuntur lineæ homologæ dictarum figurarum.

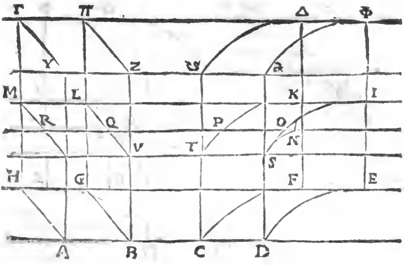
Cum verò duæ similes figuræ planæ in eodem plano, vel in æquidiſtantibus planis ita poſitæ fuerint, vt earum incidentes vel sint inuicem ſuperpoſitæ, vel æquidiſtantes, homologis lineis dictarum figurarũ, & homologis partibus ipſarum incidentium ad eandem partem conſtitutis: ipſæ dicentur similiter positæ, vel à ſuis lineis aut lateribus similiter deſcriptæ.

His verò præmiſſis nunc ad ipſa Lemmata accedamus.

LEMMA I.

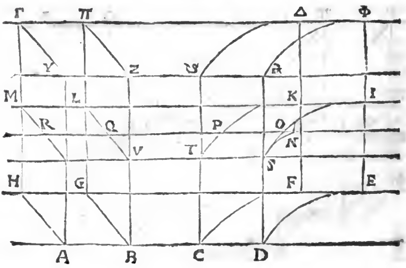
CYlindrici æquealti, & in baſibus parallelogrã-mis æqualiter analogis iuxtà regulas baſes (quorum vnum ſaltem ſit rectilineum) in ijſdemq; parallelis planis per parallelogrammorum baſes tranſeuntibus concluſi, inter ſe ſunt æquales.

Sint duæ quęcumque inter ſe parallelę rectę lineę, vt, HE, AD; & in ijs duo quęlibet parallelogramma ęqualiter analoga, HABG, FCDE, iuxtà regulam, AD, quorum alterum ſaltem, vt, HABG, ſit rectilineum; extendantur autem per, HE, AD, duo indefinita plana parallela ambo recta, vel inclinata ad planum per, HE, AD, tranſiens; quę tangant duos cylindricos ΓB, & E, ęquealtos, & in baſibus ipſis, HB, CE, conſtitutos, exiſtente cõtactu in planis, YB, ℞C, vnius, & alterius in planis, ΓG, DE, ipſis, AB, CD, HG, FE, inſiſtentibus. Dico prędictos cylindricos inter ſe ęquales eſſe. Quoniam ergò oppoſitę baſes, ΓZ, Δ℞, ſunt in eodem plano (cum cylindrici ſupponantur ęquealti) ideò dictũ planum extendatur indefinitè, & concurrat cum planis parallęlis tangentibus, in rectis, ΓΠΔΦ, YZ & ℞. Manifeſtum eſt ergò paral-



parallelogrammorum , HB , CE, baſes, AB, CD, vt & oppoſitas, H G, FE , inter ſe, necnon prędictis ęquales eſſe,per definitionem figurarum ęqualiter analogarum traditam in Prop.pr. Lib. 7. Geometrię Indiuiſibilium . Et per eam quę tradita eſt ad finem demonſtrationis Lẽmatis primi , ibidem ſubſequentis pro parallelogrammis , tam rectilineis , quam curuilineis . Erunt inſuper contactuũ plana, YB, & D , ΓG, ΔE,parallelogramma,per Prop.9.Lib.Primi eiuſdem, & reliqua plana,ΓA, ΓZ, ZG , pariter parallelogrãma, ΓZ,quidem per Prop. 11.eiuſdem primi,& reliqua ex reuolutione lateris cylindrici,vno extremo per rectam, HA, ſeu,GB,properãte, quod idcircò cogitur deſcribere parallelogrãmum . Ex quo patet,ΓB,eſſe parallelepipedum . Sicuti etiam erit, ΔD, ſi, ΓCDE , ſupponatur pariter eſſe parallelogrammum rectilineum . Quoniam ergò, AB, æquatur ipſi,CD,appoſita cõmuni,BC,erit, AC, æqualis ipſi , BD; eadem ratione oſtendemus,HF, æquari ipſi, GE. Si ergò mente intellexerimus ſolidum,quod cõprehenditur ſuperficiebus, FHAC, ΔΓY&, &YAC, ΔΓHF , ΓHAY, Δ&CF , ſuperponi ſolido comprehenſo ſuperficiebus, EGBD, ΦΠZ℞, ℞ZBD,ΦΠGE, ΠGBZ,

Q Φ℞DE,



Φ℞DE,ità vt punctum,H, ponatur in,G, recta verò,HF,extendatur ſuper,GE,punctum, F,erit in,E,quia,HF, GE, ſunt æquales. Quod ſi figura, FHAC, cadat ſuper figuram, EGBD,linea,HA, erit in GB, propter æqualitatem angulorum, AHF, BGE,& punctum,A,in,B,quia,HA,GB,ſunt æquales. Similiter ex æqualitate angulorum,HAC, GBD,& linearũ, AC, BD, concludemus, AC, cadere ſuper,BD,& punctum, C,in,D. Vlterius cum ſint æquales anguli,AHΓ, BCΠ,inter ſe,vt &, ΓHF, ΠGE,in ſuperpoſitione ſolidorum, extendetur,FΓ,in,CΠ,& punctum,Γ,erit in,Π,vt &,ΓΔ,in, ΠΦ, &, Δ, in,Φ; & ſimili ratione, ΓY, congruet ipſi, ΠZ, AY,ipſi, BZ,& planum, Γ A, ipſi, Π B. Iiſdem modis oſtendemus planum, ΔΓY&,congruere plano, ΦΠZ℞&, ΓHFΔ, ipſi, ΠGFΦ; ſicut & Y&CA, ipſi, Z℞DB. Remanet ſolum probandum ſuperficiem,Δ&CF,congruere ſuperficiei, Φ℞DE. Si ergò, CE, ponitur eſſe parallelogrammum rectilineum, erunt rectæ, CF, DF, & Δ, ℞Φ, & quia probatum eſt punctum,Δ, eſſe in, Φ,&,in,℞,C,in,D,&,F,in,E, ideò & rectæ rectis, & planum plano congruent. Ex quibus concludetur ſolidum, ΓACF, ſolido, ΠBDF, congruere, & ſubindè illi æquale eſſe, vndè

ſublato

ſublato communi ſolido, Π&GBCF, remanebit parallelepippedum,ΓB,æquale parallelepippedo, ΔD: Si verò, FD, fuerit parallelogrammum curuilineum, & dictæ lineæ curuę erunt,tuncq; ſuperficiem,ΔC,congruere ipſi,ΦD,ſic probabimus. Niſi enim congruant, aliquod ſaltem punctum in ſuperpoſitione cadet extrà, vel intrà ſolidum: cadat prius extrà, & ſit, ex. gr. punctum, N, per quod traiecto plano ipſi ſubiecto plano æquidiſtante, illud ſecet plana cylindricos tangentia, & erecta, vel inclinata eidem ſubiecto plano, in rectis, MLkI, XVTS, per quod creabuntur in parallelepippedo, ΓB, parallelogrammum, MV,& in cylindrico,ΔD,parallelogrammum curuilineum, KS, per Cor. Prop. 12. Lib.Primi Geo. Indiuiſibilium. Rurſus in plano parallelarum,MI, XS,per punctum,N, extendatur indefinitè,NOPQR, parallela ipſis, MI,XS, cuius pars concepta in, MV, ſit,RQ, & in,KS, ipſa, PO, quæ erunt inuicem æquales,& ſubindè,addita communi,QP,erunt ipſæ,RP,QO, pariter æquales,ſed,RP,eadem eſt ipſi,QN,quæ venit in ſuperpoſitione ex hypoteſi,ergò,QO,QN,hoc eſt pars toti æqualis erit, quod eſt abſurdum. Non ergò, N, ſeu vllum punctum ſuperficiei,Δ&CF,cadet extrà ſuperficiem,Φ&DE. Eodem modo oſtendemus nullum cadere intrà, ergò multò magis nihil ſuperficiei, ΔC, cadet extrà, vel intra ſuperficiem, ΦD,quapropter tota, ΔC, toti, ΦD, congruet, & totum ſolidum,ΓACF,toti,ΠBDE,pariter cõgruet, ac ideò illi æquale erit. Sublato ergò communi ſolido, Π&GBCF, remanebit parallelepippedum, ΓB, æquale cylindrico, ΔD. Quod oſtendere opus erat.

COROLLARIVM I.

EX hoc patet ſi parallelogramma,HB, FD,fuiſſent in eadem baſi; vel ſi pro duobus vnum tantum eſſet parallelogrammum, in quo tanquam in communi baſi exiſtere ſuppoſiti fuiſſent prædicti cylindrici, quod nihilominus eadem ratione æquales oſtenſi fuiſſent. Vndè ſiuè ſint in eadem, ſiuè in æqualibus baſibus, habentes reliquas condi-

tiones ſuperius dictas, ſemper æquales erunt. Caſum autem aſſumpſi æqualium baſium, vt minus Schema confunderetur.

COROLLARIVM II.

Vlterius ſi in baſi, FCDE, & in eadem altitudine cum parallelepippedo, ΓB, concipiamus eſſe parallelepippedum, ſeu cylindricum, qui quomodocunque protendatur extrà plana, YD, ΓE, habebit ipſe duas facies, veluti ſũt, & D, ΔE, quæ erunt parallelogramma inſiſtentia ipſis, C D, FE, vt de eiſdem, & D, ΔE, probabatur. Si ergò eorum plana, velut & plana, AΓ, BП, cum plano per, ΥR, Γ+, tranſeũte ad partem ſuppoſiti cylindrici indefinitè extendantur, orietur figura ſimilis propoſito ſchemati. Nempè habebimus alia duo plana parallela per, AD, HE, tranſeuntia, & inclinata ſubiecto plano, HEDA, ſed inclinatione diuerſa ab ea, quæ in planis, YD, ΓE, ſuppoſita fuit, tangentia nouum cylindricum, baſi, F D, pariter inſiſtentem. Inter eadem verò erit, & parallelepippedum (ſi compleatur) baſi, HB, inſiſtens, quod tangetur ab eiſdem duobus parallelis planis. Vndè nouus ille cylindricus erit æqualis nouo huic parallelepippedo per ipſum Lemma. Sed per idem Lemma, nouum illud parallelepippedum, cum ſit in eadem baſi, HB, parallelepippedi, ΓB, eademque altitudine, tangaturque à duobus parallelis planis, nempè planis, AΓ, BП, indefinitè extenſis, erit æquale ipſi, ΓB. Ergò nouus cylindricus baſi, FD, inſiſtens ſub diuerſa tamen inclinatione erit æqualis primo propoſito, ΔD, & conſequenter ipſi, Γ B. Quicunque ergò cylindricus in baſi, FD, & in eadem altitudine cum, ΓB, qualitercunque ſit inclinatus, erit eidem, ΓB, æqualis. Hoc verò de quouis alio ſic diſpoſito eodem modo probabitur.

Ergò vniuerſaliter colligemus, omnes cylindricos æquealtos, & in eiſdem, vel æqualibus baſibus conſtitutos (quæ ſint parallelogramma, ſiuè rectilinea, ſiue curuilinea ijſdem incluſa parallelis) inter ſe æquales eſſe.

LEM-

LEMMA II.

CYlindrici æquealti, & in baſibus conſtituti, quæ ſint parallelogramma, ſiuè rectilinea, ſiuè curuilinea, proportionaliter analoga iuxtà eorũ baſes; erunt inter ſe, vt ipſæ baſes.

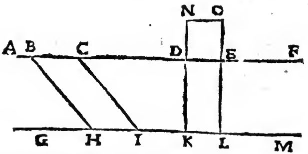
Quæ ſint figuræ planæ proportionaliter analogæ explicatur in Prop. Secunda Lib. Septimi Geometriæ Indiuiſibilium. Ex definitione verò ibidem allata colligitur, ſi dictæ figuræ ſint parallelogramma, & regulæ eorum baſes; ipſa neceſſariò in eiſdem parallelis eſſe conſtituta, vt conſideráti facilè innoteſcet. Quapropter baſes prædictorum cylindricorum erunt in eiſdem parallelis. Supponamus ergò in Schemate Lemmatis antecedentis talia eſſe parallelogramma, HB, FD, nempè eſſe non æqualiter, ſed proportionaliter analoga iuxtà baſes, AB, CD, in quibus parallelogrammis inſiſtant cylindrici æquealti, ΓB, ΔD, ſeu alius quomodocunque inclinatus. Dico hos eſſe inter ſe, vt baſes, HB, FD. Hoc verò eadem ratione demonſtrabitur, qua fit Prop. 25. Vndecimi Elementorum, hoc eſt per æque multiplicia baſium, H B, F D, & cylindricorum eiſdem inſiſtentium, quæ habebuntur ſumptis in, AD, hinc indè indefinitè producta, quotcunque æqualibus ipſi, AB, & alijs quotcunque æqualibus ipſi, CD, completiſque parallelogrammis, ſiuè rectilineis, ſiuè curuilineis, iuxtà modum deſcribendi parallelogramma curuilinea traditum in Lemmate 2. Propoſ. Primæ eiuſdem Lib. Septimi. Complebuntur verò vlterius & cylindrici, iuxtà ipſorum definitionem poſitam Lib. Primo dictæ Geometriæ. Tandem enim oſtendetur, ſi multiplex primæ ęqualis erit multiplici ſecundæ (nempè ſi duo cylindrici compoſiti ex deſcriptis cylindricis fuerint æquales) etiam multiplicem tertiæ fore æqualem multiplici quartæ: hoc eſt eorum baſes fore æquales per Lemma ant. etſi minor minorem, & maior maiorem, &c. ex quibus, vt in dicta Propoſitione

tione ſit, tandem concludemus, Γ B, Δ D, ſeu quemcunque alium diuerſimodè inclinatum, ſed in eadem baſi, FD, & altitudine cum, Γ B, eſſe vt baſes, H B, F D. Vndè patet propoſitum. Similis modus habetur quoque inferius in Lemmate 8.

LEMMA III.

SOlida parallelepippeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus, & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia.

Hoc oſtenditur ab Euclide Lib. Vndecimo Elem. Prop. 31. ſed & nos ex prædemonſtratis illud ſic colligemus. Sint parallelogramma æqualia, BHIC, NKLO, quæ ſi eſſent in



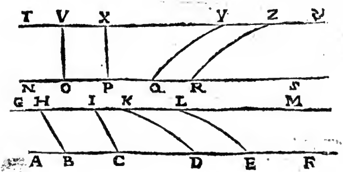
eiſdem parallelis, per Corollarium 2. Lemmatis primi, cylindrici, ſeu parallelepippeda æquealta eiſdē quomodocunq; inſiſtentia, eſſent æqualia. Non ſint ergò ambo in eiſdem parallelis, ſed, BI, in parallelis, AF, GM, &, NL, protendatur extrà ipſas, exiſtente tamen baſi, KL, in recta, GM, & ſecante, AF, parallelogrammum, NL, in recta, DE, vt fiat, DL, aliud parallelogrammum. Si ergò in tribus parallelogrammis, B I, D L, N L, tria parallelepippeda recta, vel inclinata inſiſtere intelligantur, erit quod ſtat in, BI, ad illud, quod ſtat in, DL, vt, BI, ad, DL. ex Lemmate antecedenti, quia, BI, DL,

Digitized by Google

BI, DL, ſunt parallelogramma proportionaliter analoga iuxtà baſes, HI, kL, vt facilè oſtendi poteſt, cum ſint in eiſdem parallelis, AF, GM. Eadem ratione quod ſtat in baſi, NL, ad illud, quod eſt in, DL, erit vt, NL, ad, DL, per idem Lemma, quia, NL, DL, ſunt in eiſdem parallelis, NK, OL. Sed, BI, ad, DL, eſt vt, NL, ad, DL, quia, BI, NL, ponuntur ſpatia æqualia; ergò parallelepippeda baſium, BI, NL, eandem habebunt rationem ad illud, quod eſt in baſi, DL. Ergò erunt inter ſe æqualia. Quod ſi, KL, non eſſet in recta, GM, nihilominus propoſitum eodem modo concluderetur, quia ab eo per duas parallelas æqualis diſtantiæ cum ea, quæ eſt inter, AF, GM, parallelogrammum, quale eſt, DL, abſcindi poſſet. Vndè patet propoſitum.

LEMMA IV.

Cylindrici æquealti, & in baſibus parallelogrammis, ſiuè rectilineis, ſiuè curuilineis æqualibus, inter ſe ſunt æquales.



Intelligantur cylindrici æquealti in baſibus, kE, YR, parallelogrammis quibuſcunque æqualibus. Dico eoſdem æquales eſſe. Si ergò baſes fuerint in eiſdem parallelis, vel ſi non in eiſdem, ſaltem in parallelis æqualis diſtantiæ; id manife-

manifeſtum erit ex Corollario 2. Lẽmatis primi. At ſi non in iiſdem, ſeu æqualis diſtantiæ parallelis fuerint, vt ex. gr. KE, YR, quæ ſint in parallelis, GM, AF, T&, NS, quarum diſtantiæ inter ſe ſint inæquales: itidem illud tali ratione oſtendetur. Sumptis enim, OP, æquali ipſi, QR, &, BC, æquali ipſi, DE, conſtituemus in parallelis, T&, NS, parallelogrammum rectilineum, VP, quod erit æquale, YR, vt elici poteſt ex Lemm. 1. Lib. 7. Geo. Ind. & in parallelis, G M, A F, ipſum, H C, quod erit æquale ipſi, KE. Intelligemus autẽ in baſibus, VP, H C, conſtituta parallelepippeda eiuſdem altitudinis cum ijs cylindricis, qui in baſibus, YR, KE, eſſe ſupponuntur. Erit ergo per dictum Cor. 2. Lemmatis primi cylindricus, YR, æqualis parallelepippedo, VP: vt & cylindricus, KE, parallelepippedo, HC. Sunt verò parallelepippeda, V P, H C, inter ſe æqualia per Lemma ant. igitur & cylindrici, YR, kE, inter ſe æquales erunt. Cylindrici ergò æquealti, &c. inter ſe ſunt æquales. Quod, &c.

COROLLARIVM.

MAnifeſtum eſt iuxtà modum adhibitum in Lemmate ſecundo, quo dictum eſt oſtendi Prop. 25. Vndecimi, poſſe pariter demonſtrari cylindricos æquealtos, & in baſibus quibuſcunque parallelogrammis conſtitutos, eſſe inter ſe vt baſes. Nempè per ſumptionem æquè multiplicium, &c. Hoc ergo tanquã hic demonſtratum aſſumemus.

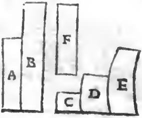
LEMMA V.

CYlindrici æquealti, & in baſibus, quæ ſint parallelogrammorum quorumcunque aggregata, conſtituti, inter ſe ſunt, vt dicta baſium aggregata.

Sint in baſibus parallelogrammorum, A, B, & aliorum C, D, E, aggregatis conſtituti æquè alti cylindrici. Dico

cos

eos eſſe, vt dicta aggregata, &c. Exponatur .n. parallelogrammum quodcunque, F, in quo intelligatur cylindricus eiuſdē cum prædictis altitudinis conſtitutus. Et quoniam cylindricus, AB, componitur ex cylindricis, A, B, (ſicut cylindricus, CDE, ex cylindricis, C, D, E,)



eſt autem vt cylindricus, A, ad cylindricum, F, ità baſis, A, ad baſim, F, per Cor. Lemmatis antecedentis; & eadem ratione cylindricus, B, ad cylindricum, F, eſt vt baſis, B, ad baſim, F, ideò per Prop. 24. Quinti Elem. erit cylindricus, AB, ad cylindricum, F, vt, AB, baſis ad baſim, F. Rurſus cylindricus, F, ad cylindricus, C, erit vt baſis, F, ad baſim, C; & ſic cylindricus, F, ad, D, vt baſis, F, ad baſim, D; vt & cylindricus, F, ad, E, erit vt baſis, F, ad baſim, E. Ideoque per definitionem 13. Primi Geo. Ind. colligendo, cylindricus, F, ad cylindricum, CDE, erit vt baſis, F, ad baſim, CDE. Ergò ex æquali cylindricus, A B, ad cylindricum, CDE, erit vt baſis, A B, ad, baſim, CDE. Igitur cylindrici æquealti, & in baſibus, quæ ſint parallelogrammorum quorumcunque aggregata, conſtituta, inter ſe ſunt, vt dicta baſium aggregata. Quod oſtendere propoſitum erat.

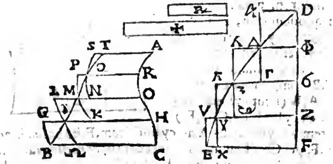
COROLLARIVM.

EX hoc patet, ſi comparetur aggregatum ex parallelogrammis cum parallelogrammo, vel è contrà: cylindricos æquealtos in ipſis ſtātes eſſe pariter, vt ipſas baſes.

LEMMA VI.

CYlindrici æquealti, & in baſibus figuris planis æqualibus, & in alteram partem abſolutè deficientibus conſtituti; inter ſe ſunt æquales.

R Sint



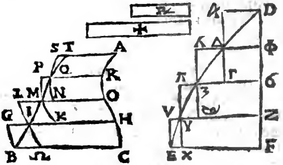
Sint duæ planæ figuræ æquales, ATBC, DEF, in baſibus rectis, BC, EF, quibus tanquam communibus regulis parallelæ quotcunque ducibiles in eiſdem figuris ità ſe habeant, vt integræ ſint, & earum quælibet baſi propinquior ſit maior remotiore. Has hic voco figuras in alteram partem abſolutè deficientes, etſi in Lemmate 2. Lib. Septimi Geo. Ind. ibi conſideratas figuras (habentes vlterius hanc conditionem, quod ſint iuxtà ſuas baſes, tanquam regulas, æqualiter analogæ) pariter appellauerim in alteram partem deficientes. Vndè iſtæ hic nunc vſurpatæ liberiores ſunt, cum ab ea lege ſolutæ ſint. Intelligantur verò in dictis figuris, ATBC, DEF, tanquam baſibus æquealti cylindrici, quomodocunq; conſtituti. Dico hos æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, eorum alter erit maior. Sit maior cylindricus, ATBC, (hoc eſt, qui eſt in baſi, TBCA, vt breuius loquamur) & ſuperet ipſum, DEF, cylindrico eiuſdem cum illis altitudinis, cuius baſis ſit parallelogrammum, ✠, ſeorſim poſitum. Quemadmodum ergò in dicto Lēmate 2. Lib.7. Geo. Ind. figuræ, CQPD, in alteram partem deficiēti (quæcumque eſſent lineæ, DP, CQ,) circumſcripta, & inſcripta eſt figura ex parallelogrammis compoſita, quarum differentia minor eſſet, oblato ibi ſpatio, ✠ ità circà figuram, ATBC, hic faciemus, hæc enim tota per parallelogrammorum æquealtorum deſcriptionem ibi traditā expeditur. Eſto quod hoc ſit factum, & quidem circumſcripta ſit compoſita ex parallelogrammis, SR, PO, LH, GC, & inſcripta

ex pa-

Digitized by Google

ex parallelogrammis, NR, KO, ΩH, quam illa ſuperet minori ſpatio, quam ſit, ✠, Et intelligantur in dictis parallelogrammis circumſcriptam, & inſcriptam figuram componentibus, conſtituti cylindrici eiuſdem cum cylindricis, ATBC, DEF, altitudinis, & quorum latera ipſorum lateribus congruant, vel ſint parallela: hinc enim fiet, vt cylindricus ex illis compoſitus, qui inſiſtunt parallelogrammis figuræ circumſcriptæ, comprehendat cylindricum, T B C A, quemadmodum baſis baſim continet: ſicuti cylindricus inſiſtens figuræ inſcriptæ à cylindrico, ATBC, pariter comprehendetur. Quod facilè oſtendi poteſt. Cylindricus ergò figuræ circumſcriptæ ſuperabit cylindricum inſcriptæ, cylindricis, qui inſiſtunt ſpatijs, SR, PN, Lk, GΩ, quæ cum ſint parallelogramma, eorumque aggregatum ſit minus expoſito parallelogrammo, ✠, ideò aggregatum ex cylindricis inſiſtentibus ſpatijs, SR, PN, Lk, GΩ, hoc eſt exceſſus cylindrici figuræ circumſcriptæ ſuper cylindricum inſcriptæ, minor erit cylindrico, ✠, per Lemma 5. antecedẽs, hoc eſt minor exceſſu cylindrici, ATBC, ſuper cylindricũ, DEF. Cum ergò cylindricus figuræ circumſcriptæ ſuperet cylindricum inſcriptæ minori exceſſu, quam cylindricus, ATBC, ſuperat cylindricum, DEF, ſequitur cylindricum, ATBC, (cum ſit minor cylindrico figuræ circumſcriptæ, quippè qui ab ea comprehenditur, vt ſuprà dicebatur) ſuperare cylindricum figuræ inſcriptæ multò minori exceſſu quam idem cylindricus, ATBC, ſuperat cylindricũ, DEF, Ergò cylindricus figuræ inſcriptæ ipſi, A T B C, maior erit cylindrico, DEF, quod tamẽ abſurdum eſſe ſic euincemus: Sit enim eo maior cylindrico in baſe parallelogrammo, ℞, æqualis cum prædictis cylindricis altitudinis. Et rũrſus vt factum eſt in figura, A T B C, ſic fiat circà figuram, D E F, nempè circumſcribatur, & inſcribatur illi figura ex parallelogrammis æquealtis compoſita, ità vt circumſcripta ſuperet inſcriptam ſpatio minori, quam ſit, ℞. Sit autem circũſcripta, quæ componitur ex parallelogrammis, 4Φ, λ6, πZ, VF, & inſcripta quæ componitur ex parallelogrammis, Δ6, 3Z, YF; quibus inſiſtãt cylindrici eiuſdem cum cylindrico, DEF, altitudinis, & quorum latera eiuſdem lateribus, vel

R 2 con-



congruant, vel ſint parallela: hinc enim fiet, vt cylindricus circumſcriptæ comprehendat cylindricum, DEF, & cylindricus inſcriptæ ab eo comprehendatur. Quoniam ergò cylindricus circumſcriptæ ſuperat cylindricum inſcriptæ, cylindricis inſiſtentibus parallelogrammis, 4♦, λΓ, π&, VX, quæ baſes ſunt minores baſi, ℞, ideò circumſcriptus cylindricus ſuperabit inſcriptum minori exceſſu, quam ſit cylindricus, ℞, ex Lemmate ant. hoc eſt quam cylindricus figuræ inſcriptæ ipſi, A T B C, ſuperat cylindricum, DEF. Ergò circumſcriptus ipſi, D E F, cylindricus ipſum cylindricum, DEF, minori exceſſu ſuperabit, quam cylindricus figuræ inſcriptæ ipſi, ATBC, ſuperat cylindricum eundem, DEF. Ex quo concludemus cylindricum figuræ inſcriptæ ipſi, ATBC, maiorem eſſe cylindrico figuræ ipſi, D E F, circumſcriptæ; ergò ex Lemmate ant. figura ipſi, ATBC, inſcripta maior erit circumſcripta ipſi, DEF, & multò maior erit ipſa figura, A T B C, circumſcripta ipſi, D E F. Sed talis circumſcripta hac quoque maior eſt, cum circumſcripta comprehendat ipſam, D E F. Igitur tandem euincemus figuram, A T B C, maiorem eſſe ipſa, DEF, quod eſt abſurdum, cum ponantur æquales. Non ergò cylindricus, A T B C, poteſt eſſe maior cylindrico, D E F. Sed neque minor, poneretur enim eſſe maior, D E F, vnde incipiendo circumſcriptionem, & inſcriptionem à figura, D E F, vt fecimus circà, ATBC, & poſtmodum aliam perficiendo circà, ATBC, quam fecimus

circà,

circà, DEF, eodem modo idem abſurdum aduerſario obtruderemus. Cum ergò neuter cylindricorum, A T B C, D E F, altero maior eſſe poſſit, ſupereſt vt ſint æquales. Quod, &c.

COROLLARIVM.

EX præfata demonſtratione innoteſcit, quod ſi altera datarum baſium, vt, ATBC, ſupponeretur eſſe parallelogrammum quodcunque æquale figuræ, D E F, facilius oſtenderetur cylindricos æquealtos, & in ipſis tanquam in baſibus conſtitutos, fore inter ſe æquales. Si enim ponatur cylindricus, ATBC, maior cylindrico, DEF, ſitque ex. gr. maior cylindrico, cuius baſis parallelogrammum, ℞, eiuſdem cum ipſis altitudinis, tunc cylindricum circumſcribentes, & inſcribentes cylindrico, DEF, vt ſupra factum eſt, ità vt circumſcriptus ſuperet inſcriptum minori exceſſu, quam ſit cylindricus, ℞, concludemus circumſcriptum ſuperare cylindricum, D E F, multò minori exceſſu, quam ſit ipſe cylindricus, ℞, ideſt, quam ſuperet cylindricus, ATBC, cylindricum, DEF: & ideò cylindricum, ATBC, maiorem eſſe cylindrico circumſcripto. Vndè & ſuppoſitum parallelogrammum, ATBC, maius eſſet figura ipſi, DEF, circumſcripta per Cor. Lemmatis antecedentis, & conſequenter, A T B C, figura maior eſſet figura, DEF, quod eſt abſurdum, cum ponantur æquales. Quapropter non poteſt cylindricus, A T B C, maior eſſe cylindrico, DEF. Quod ſi dicatur eſſe minor, erit maior, DEF, vndè circumſcripto, & inſcripto cylindrico ipſi, DEF, ità vt ille hunc ſuperet minori exceſſu, quam, D E F, ſuperet, ATBC, oſtenderetur, cylindricum, DEF, multò minor, exceſſu ſuperare cylindricum inſcriptũ, quam cylindricum, ATBC, & ideò inſcriptum cylindricum maiorem eſſe cylindrico, ATBC, ac ſubindè inſcriptam ipſi, DEF, figurã maiorem eſſe figura, ATBC, per Cor. Lemmatis ant. (quia inſcripta figura eſt ex parallelogrãmis compoſita, &, ATBC, ponitur eſſe parallelogrammum) & multò maiorem eſſe figuram, D E F, ipſa, ATBC, quod eſt abſurdum, cum ponantur æquales. Neque ergò minor eſſe poteſt, ſed nec maior;

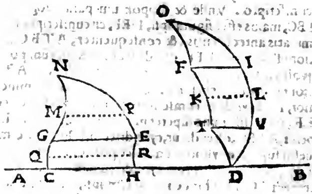
ergò

ergò illi æqualis erit. Siue ergò ambæ ſint figuræ in alteram partem abſolutè deficiẽtes inter ſe æquales, ſiuè earum altera ſit parallelogrammum, colligimus eorum æquealtos cylindricos æquales eſſe.

LEMMA VII.

CYlindrici æquealti, & in baſibus figuris planis æqualibus quibuſcunque conſtituti, quarum vnaquæq; vni regulæ parallelis quotcunque lineis, ità ſecari poſsit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ ſemper exiſtant: inter ſe ſunt æquales.

Sint in duabus quibuſcunque æqualibus planis figuris, NGCHE, OTDV, tanquam in baſibus conſtituti cylindrici æquealti. Sumpta autem pro vnaquaque baſium pro regula quadam rectâ linea (ſiuè duæ diuerſæ regulæ illis ſeruiant, ſiuè vna) vt, AB, vtriſque communis: ductæ.



in eiſdem figuris quotcunque parallelæ in ipſis conceptæ integræ ſint, Dico præfatos cylindricos, NGCHE, OTDV, inter ſe æquales eſſe. Quoniam ergò hanc habent conditionem, qualem quoq; poſtulat Lemma 4. Lib. Septimi Geo.

Ind.

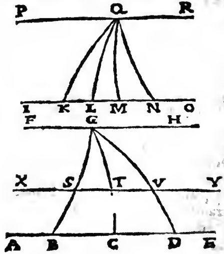
Ind. ideò per ipſummet Lēma poterit,tam figura,NGCHE, quam, O T D V, per æquidiſtantes ipſi, AB,ſcindi in fruſta, quæ ſint vel parallelogramma, vel figuræ in alteram partem abſolutè deficientes (etſi non opus ſit hic dicere abſolutè, vel non abſolutè deficientes, quia loquimur hic de figura ſolitaria,& non alteri comparata)vt ibi probatur. Eſto quod figura,CNH,per GE,parallelā ipſi, AB, ſit ſecta in figuras, GNE, GCHE, quarum, GNE, ſit in alteram partem deficiens, & , GCHE, parallelogrammum curuilineum. Similiter, OTDV, per parallelas, FI, TV, ipſi, A B, ſit diuiſa in fruſta, FOI, TDV, in alteram partem deficientia,&, FTVI, parallelogrammum curuilineum. Ponatur autem, N G E, eſſe maiorem, F O I, & ducatur, M P, parallela, AB, quam ſupponamus abſcindere figuram, M N P, æqualem ipſi, FOI; ſimiliter ſi, FTVI, non ſit æqualis, ſed maior, GMPE, ducatur, K L, æquidiſtans, A B, quæ pariter abſcindere ſupponatur, KFIL, æqualem ipſi, GMPE; & tandem agatur, QR, parallela, A B, conſtituens ſpatium, G QR E, æquale ſpatio, K T V L, vnde QCHR, erit æquale ſpatio, TDV. Erunt ergò quinq; ſpatia, NMP, MGEP, GQRE, QCHR, æqualia quinque ſpatijs, OFI, FkLI, K T V L, TDV, ſingula ſingulis ſibi reſpondentibus,& eorum ſpatiorum quodlibet eſt parallelogrammum, vel figura in alteram partem deficiens. Ergò ſi per rectas, Q R, G E, M P, T V, K L, F I, intelligantur extenſa plana per latera cylindricorum, NCH, OTDV, tranſeuntia, ſcindentur per ea dicti cylindrici in cylindricos prædictis decem figurarum fruſtis inſiſtentes per Prop. 10. Lib. Primi Geo. Ind. & per Lemma ant.cum ſuo Corollario,erunt cylindrici, NMP, OFI, inter ſe æquales, cum & baſis, NMP, pars figuræ, N G E, in alteram partem deficientis, ſit & ipſa in alteram partem deficiens. Et eadem ratione cylindricus, MGEP, ipſi, FkLI; GQRE, ipſi, kTVL, &,QCHR, ipſi, T D V, ac tandem totus cylindricus, N C H, toti cylindrico, OTDV, æqualis erit. Ergò cylindrici ęquealti,&c. quod oſtendere opus erat.

LEM-

LEMMA VIII.

CYlindrici æquealti, & in baſibus figuris planis quibuſcunque conſtituti, quarum vnaquęq; vni regulæ parallelis quotcunque lineis, ità ſecari poſsit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ ſemper exiſtant: inter ſe ſunt, vt baſes.

Sint in quibuſcunque figuris planis, GBC, QkL, tanquā in baſibus æquealti cylindrici conſtituti, & baſes ſint eiuſ. modi, vt ſumptis ex. gr. regulis, A E, I O, iiſdem parallelæ ductæ in ipſis baſibus integræ ſint. Dico prædictos cylindricos eſſe inter ſe, vt ipſæ baſes, GBC, QkL. Extendantur autem, FH, P R, parallelæ ipſis, A E, I O, tangentes ipſas figuras. Deindè ſumptis in, BE, quotcunque æqualibus ipſi, B C, (aduerte ſi figuræ deſinerent ad, AE, IO, in pūcta, quod tūc pro ipſis, AE, IO, opus eſſet extēdere inter oppoſitas tangētes, FH, AE; PR, IO, duas rectas ipſis parallelas, & in illis perficere, quod in his nunc præſtabimus) vt, CD, æquali, BC; & in, kO, alijs quot cunque æqualibus



ipſi, kL, vt, LM, MN, intelligamus, CE, ferri verſus, FH, ſemper æquidiſtanter ipſi, FH, ac, decurrente puncto, C, lineam, CG, interim aliud punctum diſcedere à, C, verſus, E, per rectam, C E, & abſcindere à quacumque in, BC, conci-

piatur ipſi, AE, parallela, rectam æqualem. Vt, ducta ipſi, AE, parallela, XY, cuius portio, ST, ſit concepta in figura, GBC; punctum illud ſit in ſitu, V, abſcindẽs, TV, æqualem ipſi, TS, & hoc vbique fieri intelligatur, ſicuti in diſcuſſione Lemmatis 4. Prop. Primæ Lib. Septimi Geo. Ind. ſuprà dictum eſt pro deſcriptione figuræ, ANE, æqualiter analogæ ipſi, SPFR. Et hoc vt punctum ſic fluens deſignet lineam, GVD, quæ cum, GTC, &, CD, terminet figuram, GCD, æqualiter analogam ipſi, GBC. Vel, vt ſuper has deſcriptiones dubitanti omnis tollatur ambigendi locus, ſupponatur tanquam facta figura, GCD, æqualiter analoga ipſi, GBC, iuxtà regulam, AE, cum hoc nullam inuoluat repugnantiã. Eademque ratione vel fiant, vel factæ ſupponantur figuræ, LQM, MQN, æqualiter analogæ ipſi, QKL, iuxtà regulam, IO. Et per ambitum figuræ, G C D, decurrente latere cylindrici, quod deſcripſit ſuperficiem cylindrici, G B C, ſemper æquidiſtanter regulæ lateris cylindrici, GBC, fiat cylindricus, G C D, eiuſdem cum cylindrico, GBC, altitudinis. Eademq; ratione fiant cylindrici, QLM, QMN, decurrẽte eorum ambitum eodem latere, quod deſcripſit ſuperficiem cylindrici, QKL, ſemper eiuſdem regulæ æquidiſtanter: & ſint eiuſdem altitudinis cum cylindrico, QKL. Quoniam ergò æquealti cylindrici ſtant in æqualibus baſibus, GBC, G C D, figuris, quales poſtulat Lemma antecedens, ideò æquales erunt. Eadem ratione cylindrici, Q K L, Q L M, Q M N, erunt æquales. Quotuplex ergò erit baſis, D G B, baſis, G B C, totuplex erit cylindricus, D G B, cylindrici, G B C. Et ità quotuplex erit baſis, QKN, baſis, QkL, totuplex erit cylindricus, QkN, cylindrici QKL. Habemus ergò, G B D, baſim, & cylindricum, æquè multiplices primæ, & tertiæ nempè baſis, & cylindrici, GBC. Similiter baſis, & cylindricus, QkN, ſunt æquè multiplices ſecũdæ, & quartæ, hoc eſt baſis, & cylindrici, QKL. Et quia ſi baſis, GBD, multiplex primæ, eſt æqualis baſi, Q K N, multiplici ſecundæ, etiam multiplex tertiæ, cylindricus, GBD, eſt æqualis multiplici quartæ, cylindrico, QKN; quia ſunt æquealti cylindrici in baſibus, quales poſtulat Lemma antecedẽs, per conſtructionem enim quæcumque ipſis, A E, I O, parallelæ, in

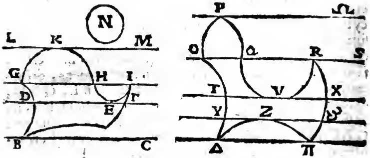
S figuris,

figuris, G B D, Q k N, conceptæ integræ ſunt. Et ſi illa maior, vel minor eſt, &c. etiã cylindricus cylindrico maior, vel minor eſt, &c. ideò prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam. Nempè vt baſes, GBC, QKL, ità erunt ipſi cylindrici, GBC, QKL, Cylindrici ergò æquealti, & in huiuſmodi baſibus conſtituti, inter ſe ſunt vt baſes. Quod demonſtrare opus erat.

LEMMA IX.

CYlindrici æquealti, & in baſibus quibuſcunq; planis figuris conſtituti, inter ſe ſunt vt baſes.

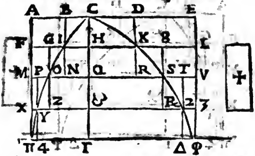
Sint duę quæcunque planæ figuræ, KBI, PΔΠR, in quibus tanquam in baſibus ęquealti cylindrici quomodocunq; intelligantur conſtituti. Dico eoſdem inter ſe eſſe, vt dictas baſes. Tangant eaſdem figuras planas rectæ, A B C, ΔΠ,



quæ,tanquam regulæ ſumantur, quibus concipiantur ductæ parallelæ quæcunque partem ambitus earumdem tangere poſſunt, vt in figura, kBI, rectæ, DEΓ, GHI, L k M, & in figura, PΔΠR, rectæ, YZ&, TVX, OQRS, PΩ, per quas ſcindentur in fruſta, in quibus ductæ quæcunq; ipſis regulis, AC, ΔΠ, parallelæ integræ erunt. Si enim aliqua non eſſet integra, bis ſaltem poſſet ambitui figuræ interius occurrere, vndè poſſet duci tangens portionem ambitus illis duobus occurſibus interceptam, per Lemma 3. Prop. Primæ Lib. Septimi

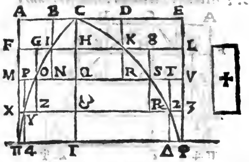
ptimi

ptimi Geo. Ind. ponuntur autem ductæ quæcunque ſunt vt ſic ducibiles, ergò non alia duci poteſt, & reliquæ in fruſtis ductæ integræ erunt. Eſtò igitur quod figura, *K*BI, in talia fruſta quatuor ſecta fuerit, quæ ſint, *K* G H, G D E H, IEΓ, DBΓ: & figura, PΔΠR, in fruſta ſex, nempè, POQ, OTVQ, RVX, TYZ&X, YΔZ, ZΠ&. Traiectis ergò planis per rectas, DΓ, GI, TZ&, TVX, O Q R S, & per latera cylindricorum, *K* B I, PΔΠR, ſecabuntur & ipſi cylindrici in cylindricos prædictis fruſtis, tanquam baſibus, inſiſtentes. Exponatur verò ſeorſim figura plana quæcumque, N, ſed talis conditionis, qualem poſtulat Lemma antecedens: in qua cylindricus eiuſdem altitudinis cum prædictis conſtitutus intelligatur. Ergò per lemma antecedens cylindricus, *K*GH, ad cylindricum, N, erit, vt baſis, *K*GH, ad, N. Similiter cylindricus, G D E H, ad, N, erit, vt, GDEH, ad, N. Et eadem ratione oſtendemus cylindricum, I E Γ, ad, N, eſſe, vt, IEΓ, ad, N; vt & cylindricum, DBΓ, ad, N, eſſe, vt, DBΓ, ad, N. Vndè per 24. Quinti Elem. concludemus hos quatuor cylindricos, hoc eſt cylindricum, k B I, ad cylindricum, N, eſſe vt baſim, KBI, ad, N. Erit verò cylindricus, N, ad cylindricum, O P Q, vt baſis, N, ad baſim, O P Q; & idem ad cylindricum, O T V Q, vt eadem baſis, N, ad baſim, O T V Q, & ſic conferendo cylindricum, & baſim, N, cum reliquis cylindricis, ac eorum baſibus, quæ ſunt reliqua fruſta figuræ, P Δ ΠR, nempè, R V X, T Y Z & X, Y Δ Z, *Z* Π &, tandem concludemus cylindricum, N, ad hos omnes cylindricos, ſeu ad integrum cylindricum, PΔΠR, eſſe, vt, N, ad figuram, P Δ Π R. *S*ed & cylindricus, KBI, ad cylindricum, N, oſtenſus eſt eſſe, vt figura, *K*BI, ad figuram, N. Ergò ex æquali cylindricus, KBI, ad cylindricum, PΔΠR, erit, vt baſis, *K*BI, ad baſim, P Δ Π R. Cylindrici ergò æquealti, & in baſibus quibuſcumque planis figuris conſtituti, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod oſtendere opus erat.



Sint duo quæcunque ſolida proportionaliter analoga, ΠCΓ, ΓCΦ, iuxtà regulas baſes, ΠΓ, ΓΦ, (etenim ad figuræ confuſionem euitandam per lineas plana intelligemus, & per has figuras planas ipſa corpora) quæ ſint inter eadem oppoſita tangentia plana, AE, ΠΦ. Concipiantur autem conſtituti cylindrici in eiſdem baſibus, ΠΓ, ΓΦ, ac in eadem cum ſolidis altitudine, nempè, AΓ, ΓE, & ſit poſſibile ſolidis, CΠΓ, ΓCΦ, figuram circumſcribere, & inſcribere, &c. vt ſupra propoſitum eſt. Dico præfata ſolida eſſe inter ſe, vt baſes, ΠΓ, ΓΦ. Quod vt concludatur, probandum erit cylindricum, AΓ, ad ſolidum, CΠΓ, eſſe vt cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓΦ. Niſi ergò ità ſit, erit vt EΓ, ad, CΓΦ, ità, AΓ, ad, CΠΓ, addito, vel dempto ab eodem aliquo ſolido: Sit primum addito ſolido, ✠. More ſolito autem circumſcribatur ſolido, CΠΓ, figura ex cylindricis æquealtis compoſita, quæ ſint, BH, GQ, P&, XΓ, & alia inſcribatur ex, IQ, O&, YΓ, pariter compoſita, ità vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu, quam eſt ſolidum, ✠: igitur circumſcripta ſuperabit ſolidum, CΠΓ, minori ſolido, quam, ✠, ergò circumſcripta minor erit ſolido, CΠΓ, cum ſolido, ✠, vndè cylindricus, AΓ, habebit maiorē rationē ad figuram circumſcriptam, quam ad ſolidum, CΠΓ, cum ſolido, ✠, hoc eſt, quam cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓΦ. Nunc ipſi ſolido, CΓΦ, circumſcribatur figura ex cylindricis eiuſdem altitudinis cum prædictis, totque numero, quot ijdem, compoſita, conſtans ex cylindricis, Ck, HS, Q2, &Φ. Extenſis verò hinc indè horum cylindricorum baſibus, ſecentur cylindrici, AΓ, ΓE, in æquealtos cylindricos, AH, FQ, M&,

XΓ,



XΓ, CL, HV, Q3, &Φ. Quoniam ergò ſolida, CΠΓ, CΓΦ, ſupponuntur eſſe proportionaliter analoga iuxtà baſes, ΠΓ, ΓΦ, erit vt, ΠΓ, ad, ΠΦ, ità, IH, ad, HK, & ità etiam eſt, FH, ad, HL, ergò erit, FH, ad, HL, vt, IH, ad, HK, & permutando, FH, ad, HI, erit, vt, LH, ad, HK. Sed vt, FH, ad, HI, ità eſt cylindricus, AH, ad, BH; & vt, LH, ad, HK, ità eſt cylindricus, EH, ad, HD, per Lemma 9. antecedens, nam ſunt cylindrici æqualti: ergò cylindricus, AH, ad, HB, erit, vt cylindricus, EH, ad, HD. Eadem ratione oſtendemus cylindricos, FQ, QL, ad, GQ, Q8, eandem rationem habere, & ſic de reliquis, &c. Et tandem concludemus cylindricos, AH, HM, M&, &Π, hoc eſt cylindricum, AΓ, ad figuram circumſcriptam eandem rationem habere, quam cylindricos, CL, LQ, Q3, 3Γ, hoc eſt cylindricus, EΓ, ad figuram ſolido, CΓΦ, circumſcriptam. Sed cylindricus, AΓ, ad figuram circumſcriptã maiorem rationem habere ſuperius oſtẽſum eſt, quam cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓΦ, ergò cylindricus, EΓ, ad figuram circumſcriptam ſolido, CΓΦ, maiorem rationem habebit, quam ad ſolidum, CΓΦ, quare figura circumſcripta ſolido, CΓΦ, ipſomet, CΓΦ, minor erit, ſed eſt eodem maior, cum ipſum comprehendat, erit ergò eodem ſolido & minor, & maior, quod eſt abſurdum. Non ergò cylindricus, AΓ, habet eandem rationem ad ſolidum, CΠΓ, (addito illi aliquo ſolido) quam cylindricus, EΓ, ad ſolidũ, CΓΦ. Dico neque, dempto ab eo aliquo ſolido, habere eandem rationem, &c. Si enim fieri poteſt, ſit illud idem ſolidum, ✠, & denuò circũſcribatur, & inſcribatur ipſi, CΠΓ, figura, &c. deſeruiantq; eædem deſcriptæ. Tunc ergò cum circumſcri-

pta

pta ſuperet inſcriptam minori ſolido, quam eſt, ✠; ipſum ſolidum, CΠΓ, ſuperabit inſcriptam multò minori ſolido, quam ſit, ✠, ergò inſcripta erit maior ſolido, CΠΓ, ab eo dempto, ✠, vndè cylindricus, AΓ, ad figuram inſcriptam minorem rationem habebit, quam ad ſolidum, CΠΓ, dempto, ✠, hoc eſt, quam cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓ◆. Denique inſcripta ſolido, CΓ◆, figura ex cylindricis, HR, QS, & Δ, compoſita, quæ ſint eiuſdem altitudinis, & alijs tot, quot componentes inſcriptam ſolido, CΠΓ, oſtendemus vt ſuprà fecimus circa circumſcriptas, cylindricum, AΓ, ad figuram ſolido, CΠΓ, inſcriptam eſſe, vt cylindricus, EΓ, ad inſcriptam ipſi, CΓ◆. Sed cylindricus, AΓ, ad figuram ſolido CΠΓ, inſcriptam minorem rationem habere oſtenſum eſt, quam cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓ◆; ergò idem cylindricus, EΓ, minorem rationem habebit ad figuram ſolido, CΓ◆, inſcriptam, quam ad ipſum ſolidum, CΓ◆, igitur figura illi inſcripta eodem ſolido maior erit, ſed etiam eo minor eſt, cũ ſit inſcripta, ergò eodem maior, & minor eſſet, quod eſt abſurdum. Non ergò cylindricus, AΓ, ad ſolidum, CΠΓ, habet eandem rationem, quam cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓ◆, addito, vel detracto à ſolido, CΠΓ, aliquo ſolido. Ergò cylindricus, AΓ, ad ſolidum, CΠΓ, erit, vt cylindricus, EΓ, ad ſolidum, CΓ◆, & permutando cylindricus, AΓ, ad cylindricum, ΓE, erit, vt ſolidum, CΠΓ, ad ſolidum, CΓ◆, ſed cylindrici, AΓ, ΓE, inter ſe ſunt vt baſes, ΠΓ, Γ◆, per Lemma 9. antecedens. Igitur & ipſa ſolida, CΠΓ, CΓ◆, erunt inter ſe, vt dictæ baſes, ΠΓ, Γ◆. Ergò ſolida quæcunque proportionaliter analoga, &c. inter ſe ſunt, vt baſes. Quod oſtendere propoſitum erat.

DEFINITIO.

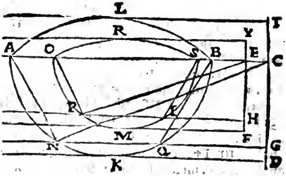
FIguram planam ordinatam voco, quæ ſub ambitu eius rationis continetur, vt ſi in eo duo quælibet puncta ſumantur, rectæ eadem iungentis nihil cadat extrà figuram.

LEM-

LEMMA XI.

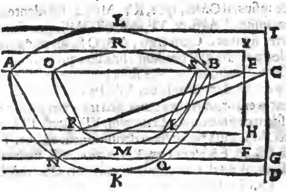
SI expoſita quacunque figura plana ordinata, in eaque ducta qualibet recta linea, vſq; ad illius ambitum hinc indè terminata, ab eadem linea quæcumque portio abſcindatur, à qua tanquam à prædictæ homologa ſimilis, ſimiliterq; figura deſcripta ſupponatur: prior figura poſteriorem cōprehendet.

Sit expoſita quæcunque figura plana ordinata, A K B L, in qua ducatur recta, AB, & ab ea ſit abſciſſa quæcumque portio, OS, à qua tanquam ab homologa ſupponatur deſcripta ſimilis, ſimiliterq; poſita figura, ROMS. Dico figuram,



AkBL, figuram, OMSR, comprehendere. Vt hoc probetur, oſtendemus nihil figuræ, ROMS, eſſe extra figuram, LAkB, ad quod ſufficiet demonſtrare nullū punctum ambitus eiuſdem, ROMS, eſſe extrà figuram, LAKB, patebit namq; ſubindè nihil figuræ, ROMS, poſſe extrà, LAkB, reperiri. Sumatur ergò in ambitu, ROMS, quodcunque punctum, vt, P, dico ipſum eſſe in figura, LAKB. Sint figuræ, LAkB, oppoſitæ tangentes, quæ ſunt regulæ homologarum, ipſæ, LT, K D;

KD; & ipſius, ROMS, ipſæ, RY, MF; ac incidentes, TD, quidem ipſius, LAkB, &, YF, ipſius, ROMS, quæ ſint aſſumptæ extrà figuras. Cum ergò, AB, OS, ſupponantur duæ homologæ figurarum ſimilium, ſimiliterque poſitarum, LAkB, ROMS, ſecabunt ſimiliter ſuas incidentes, vt in punctis, E, C, per, D, definitionis 10. Lib. Primi Geom. Ind. quæ incidentes erunt, non coextenſæ, ſed inuicem parallelæ per, D, eiuſdem definitionis. Erit enim, YF, inter, TD, & figuram, ROMS, quia per dictam definitionem eſt, vt, TD, ad, YF, ità, CB, ad, ES, eſt autem, TD, maior, YF, nam eſt, TD, ad, YF, vt, AB, ad, OS, eſtque, AB, maior, OS, ergò, CB, erit maior, ES, cũ S, B, erunt idẽ punctum, & multò maior erit, CS, ipſa, ES, cum punctum, S, vt figura oſtendit, erit aliud à puncto, B; ergò, YF, cadet intrà figuram, ROMS, & ipſam, TD, cum incidentes extrà figuras aſſumptæ ſupponantur, & ſint ad eandem partem figurarum, quia illæ ſunt ſimiliter poſitæ. Patet ergò ex dictis, YF, non extendi ſuper, TD, ſed illi eſſe parallelam, vt dixi. Per punctum autem, P, rurſus producatur, PH, vſque ad incidentem, YF, quam ſecet in, H, ambitum verò in, I. Sit etiam ducta, NQ, in figura, LAkB, parallela ipſis, LT, kD, regulis homologarum, & ſubindè ipſis, RY, MF, (quia figuræ ſunt ſimiliter poſitæ) hoc eſt ipſi, PI, cui ſit homologa, quæ & producatur vſque ad incidentem, TD, in, G. Per dictam ergò definitionem 10. ipſæ, TD, YF, ſecabuntur in punctis, G, H, ſimiliter ad eandem partem, vndè erit vt, TG, ad, GD, ità, YH, ad, HF, & componendo, ac permutando, TD, ad, YF, vt, GD, ad, HF. Eodem modo oſtendemus, TD, ad, YF, eſſe vt, TC, ad, YE, nam, TD, YF, ſimiliter ad eandem partem ſecantur in punctis, E, C, vt dictum eſt. Ergò vt, TD, ad, YF, ità erit compoſitum ex, TC, GD, ad compoſitum ex, YE, HF, ergò vt, TD, ad, YF, ità erit reſiduum, CG, ad reſiduum, EH. Eſt autem, TD, maior, YF, ergò &, CG, ipſa, EH, maior erit, ergò punctum, P, cadet intrà parallelas, AC, NG. Iungantur nunc puncta, A, N, O, P, rectis, AN, OP, quas dico eſſe inter ſe parallelas. Ducantur verò, PE, NC. Erit ergò vt, TD, ad, YF, ità, NG, ad, PH, per dictam definitionem decimam, ſed vt, TD, ad, YF, ità probatum eſt eſſe, CG, ad, EH, ergò vt, CG, ad, EH,

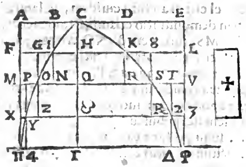


ità erit,NG,ad,PH,& permutando.CG,ad,GN,erit vt EH, ad,HP,& ſunt circà æquales angulos,CGN, EHP,(quia ex definitione incidentium ipſæ incidentes cum homologis,ſeu cum regulis homologarum,faciunt æquales angulos ex eadem parte) latera proportionalia, ergò per *6.* Sexti Elem. æquiangula erunt triangula,CGN,EHP,ac ſimilia,& ęquales erunt anguli,GCN,HEP; vndè,ACN,OEP, æqualium, ACG, OEH, reſidua æquales erunt. Sed & circà hos eſſe latera proportionalia ſic oſtendemus. Eſt enim, AC, ad, OE,vt,TD,ad,YF,ſeu,vt, CG, ad,EH, & permutando,AC, ad CG, vt, OE, ad, EH, eſtque, GC,ad, CN, vt,HE,ad,EP, propter ſimilitudinem triangulorum,CGN,EHP,iam oſtenſam. Ergò ex æquali,AC,ad,CN,erit vt,OE,ad,EP,& ſunt anguli, ACN, OEP, æquales, ergò triangula, ACN, OEP, erunt æquiangula,& æquales erunt anguli,CAN,EOP,vndè rectæ, A N, OP, parallelæ erunt. Sicuti ſi punctum, O, identificaretur ipſi, A,maneret probatum,OP,extendi ſuper, AN. Ità vt quicunque ſit caſus,vel, OP, erit parallela ipſi, AN,vel illi coextenſa. Eſt autem,AN, non extrà figuram, LAKB, eſt enim figura ordinata, ergò linea, O P, & ſubindè punctum, P, non erit extrà figuram ex parte, A N. Eodem modo iunctis, SI, BQ, oſtendemus punctum,I, nõ exire extrà figuram,LAKB,verſus,BQ, ergò multò minus punctum, P,exibit extrà figuram,LAkB, verſus, BQ, & eſt intrà parallelas, AB, NQ, ergò,P, nuſquam è figura, LAkB,egredi poteſt,

ſteſt, igitur vel erit in ambitu eiuſdem, vel intrà ambitum. Currit autem demonſtratio etiamſi, PI, non ſecet, ſed tangat figuram, ROMS, tunc verò &, NQ, erit tangens, vt ex dicta definitione facilè elici poteſt: ſicuti etiam valet ſi pro duobus punctis, ſeu recta tangente, PI, vnum tantum eſſet punctum contactus, illud enim ex nulla parte extrà figuram, LAkB, exire poſſe eodem modo oſtenderemus. Et quod de puncto, P, idem de quibuſcunque alijs punctis, quæ in ambitu, LAkB, ſumi poſſunt eadem ratione probaretur. Ergò nullum punctum ambitus eiuſdem figuræ, ROMS, & ſubindè nihil illius poterit eſſe extrà figuram, LAkB. Eſt autem maior, LAkB, ipſa, ROMS, quia, AB, eſt maior, OS, & per Prop. 15. Lib. Secundi Geo. Ind. reſtauratam in Annot. Prop. 5. Lib. Septimi, ſunt ipſæ figuræ, LAkB, ROMS, in duplicata ratione ipſarum, AB, OS. Ergò, LAkB, neceſſariò ipſam, ROMS, comprehendet.

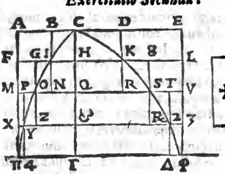
LEMMA XII.

SI expoſita quacunque plana figura in baſi recta linea, in ea ſit quoque parallelogrammum eidem circumſcriptum: Rectæ verò in figura ducibiles parallelæ baſi integræ ſint, & parallelæ lateribus parallelogrammi baſi inſiſtentibus, indefinitè productæ nonniſi ſemel ambitui figuræ occurrant: Et à baſi deſcripta ſupponatur quæcunque figura ordinata, & erecta, vel inclinata plano expoſitæ figuræ. Solida ad inuicem ſimilaria genita ex parallelogrammo, & propoſita figura iuxtà regulam deſcriptam à baſi figuram ordinatam, erunt inter ſe, vt alia duo quæcunq; ſolida, ad inuicem ſimilaria genita ex eiſdem iuxtà regulam quamcunq; aliam figuram ordinatam ab eadem baſi deſcriptam.



Videatur Schema Lemmatis 10. in quo ſit figura, CΠΓ, in baſi recta, ΠΓ, in qua ſit & parallelogrammum, ΑΓ, ipſi, CΠΓ, circumſcriptum. Rectæ verò in, CΠΓ, ducibiles parallelæ baſi integræ ſint, & quæ à quocunque puncto baſis, ΠΓ, indefinitè in eadem producentur æquidiſtantes ipſis, ΑΠ, CΓ, nonniſi ſemel ambitui occurrãt. Supponatur autem à baſi, ΠΓ, deſcripta figura plana quæcunque ordinata, erecta, vel inclinata plano, CΠΓ, in qua tanquam in baſi inſiſtant duo ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex parallelogrammo, ΑΓ, & figura, CΠΓ, (quæ ſint ſolida ſimilaria, vt declaratur Lib. 2 Geom. Ind. ad, B, definitionis octauæ, quæ definitio explicatur quoque per plana numero finita Lib. Septimo in Annot. Prop. 22. iuxtà quam explicationem & hic ſolida ſimilaria intelligentur) hoc eſt talia, vt ſi ducatur quodcunque planum eadem ſecans, & figuræ, ΠΓ, æquidiſtans, vt ex gr. planum ſecans parallelogrammum, ΑΓ, in recta, MQ, & figuram, CΠΓ, in recta, QO, productæ in ſolidis figuræ ſint ſimiles figuræ deſcriptæ à, ΠΓ, ſimiliterq; poſitæ, & earum lineæ, vel latera homologa ipſæ, MQ, QO. Dico ſolidũ ſimilare genitum ex parallelogrammo, ΑΓ, ad ſibi ſimilare genitum ex figura, CΠΓ, regula figura deſcripta à, ΠΓ, eſſe vt ſolidum quodcunque aliud genitum ex eodem parallelogrammo, ΑΓ, ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex eadem, CΠΓ, iuxtà regulam aliam quamcunque figuram ordinatam à baſi, ΠΓ, deſcriptam. Supponamus ex. gr. deſcriptum à, ΠΓ, triangulum æquilaterum erectum ipſi, ΑΓ, & pentagonum æquilaterum, & æquiangulum pariter ipſi erectum. Erunt ergò duo

duo ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammo, AΓ, cylindrici, quod probabitur eodem modo, quo hoc demonſtratur in Prop.34. Lib.Geo. Ind. vice omnium figurarum ſubſtitutis quotcunque figuris, &c. Dico ſolido ſimilari genito ex, CΠΓ, tam iuxtà regulam triangulam æquilaterum, quam quod ſit iuxtà regulam pentagonum deſcriptum à, ΠΓ; figuram ex cylindricis æquealtis circumſcribi, & aliam inſcribi poſſe, ità, vt circumſcripta ſuperet inſcriptam exceſſu quouis oblato ſolido minore. Ductis enim planis parallelis altitudinem ipſorum ſolidorum, vt CΓ, & ipſius reſidua, vt moris, eſt biſſecantibus, quemadmodum in dicto Lemmate 10. effectum eſt, & vt in ſchemate conſpicitur, manifeſtum eſt deueniri poſſe ad cylindricum, vt, XΓ, minorem propoſito ſolido, vt ipſo, ✠. Pariter ex dictorum planorum ſectione fiunt duæ figuræ planæ, vna quidem circumſcripta ſpatio, CΠΓ, & alia eidem inſcripta, vt apparet in figura; namque æquidiſtantes ipſi baſi, ΠΓ, in ipſa figura, CΠΓ, integræ ſunt, & æquidiſtantes ipſis, CΓ, ΠA, nonniſi ſemel occurrunt ambitui, ΠC, ità vt lineæ, 4Y, ZO, NI, non ſint extrà, &, PY, GO, BI, non ſint intrà figuram, CΠΓ; vndè figura ex parallelogrammis, BH, GQ, P&, XΓ, compoſita eſt circumſcripta; & ex parallelogrammis, YΓ, O&, IQ, eſt inſcripta ſpatio, CΠΓ. Si ergò regula triangulo æquilatero deſcripto à, ΠΓ, intelligantur ſolida ſimilaria genita ex parallelogrammis, BH, GQ, P&, XΓ, figuræ circumſcriptæ; & his ſimilia ſolida genita iuxtà eandem regulam, ex parallelogrammis inſcriptæ; iſta ſimilaria ſolida erunt cylindrici, vt ſuperius ex Prop.34. Lib.Secundi Geom. Ind. indicatum eſt. Cylindrici ergò figuræ circumſcriptæ ſuperabunt cylindricos inſcriptæ, cylindrico, XΓ, namq; cylindricus, BH, æquatur ipſi, IQ, & GQ, ipſi, O&, &, P&, ipſi, YΓ, qui tandem cum reſiduo ipſius cylindrici, XΓ, componit ipſum cylindricum, XΓ. Superabit ergò ſolidum circumſcriptum ipſum inſcriptum cylindrico, XΓ, hoc eſt minori exceſſu, quam ſit ſolidum, ✠. Quod verò compoſitum ex cylindricis figuræ circumſcriptæ ſpatio, CΠΓ, ſit circumſcriptum, ac comprehendat ſolidum ſimilare genitum ex, CΠΓ, compoſitum verò ex cylindricis figuræ inſcriptæ ſit inſcriptum, ac comprehendatur ab eodem ſolido,





lido, deducetur ſic ex Lemmate antecedenti. Sicuti enim ex.gr.triangulum æquilaterum deſcriptum ab, X&, comprehendit triangulum æquilaterum deſcriptum ab, &.Y, per Lemma ant.cum illud ſit figura ordinata, &, Y&, portio ipſius, X&, ſicuti quod fit ab, Y&, eadem ratione comprehendet, quod fit ab, &Z; hoc verò, traiecto vbicunque plano figuræ à, πΓ, deſcriptæ æquidiſtante, ſemper verificatur. Ergò compoſitum ex cylindricis figuræ ſpatio, CπΓ, circumſcriptæ comprehendit ſolidum ſimilare genitum ex, CπΓ; compoſitum verò ex cylindricis inſcriptæ ab eo comprehēditur. Solidum ergò ſimilare genitum ex figura, CπΓ, iuxtà regulam triangulum æquilaterum, tale eſt, quale poſtulat Lemma 10. Huiuſmodi verò eſſe ſolidum ſimilare genitum ex eadem figura iuxtà regulam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum à, πΓ, oſtēdemus eodem modo; iuxtà quas regulas ſunt proportionaliter analoga, quia ex. gr. vt triangulum, πΓ, ad ipſius pentagonum, ità eſt triangulum, Y&, ad ipſius pentagonum, & ſic in cæteris. Erunt ergò inter ſe dicta ſolida; vt dictæ baſes, triangulum nempè, & pentagonum. Sed in ratione earumdem baſium ſunt quoq; duo cylindrici geniti ex, AΓ, iuxtà eaſdē regulas, hoc eſt priſma triāgulare, & pētagonale per Lēma 9. Ergò erit vt ſolidū ſimilare genitū ex, AΓ, ad ſibi ſimilare genitū ex, CπΓ, iuxtà regulā triangulū æquilaterū deſcriptū à, πΓ; ità ſolidum ſimilare genitum ex eodē, AΓ, ad ſibi ſimilare genitum ex eadem figura, CπΓ, iuxtà regulam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum à, πΓ Patet ergò propoſitū, &c.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX hoc manifeſtum eſt poſteriorem partem Propoſitionis Primæ Libri Septimi, vt & Prop. Tertiam eiuſdem Libri, etiam quoad huiuſmodi ſolida ſimilaria verificari, quæ gignuntur ex figura habente conditiones ipſius, CΠΓ. Has verò habent ferè omnes figuræ in Lib. Secundo conſideratæ, cum ſint triangula, vel trapezia, quæ ſunt parallelogrammis (quos patet gignere cylindricos, & de quibus iam dictũ eſt) inſcriptibilia. Similiter huiuſmodi ſunt figuræ aſſumptæ in Lib. 3. 4. & 5. cum plerumque ſint circuli, vel ſectiones conicæ, aut earum portiones, &, CΓ, ΓΠ, vel ſint baſes, aut diametri earundem, ſeu ipſis æquidiſtantes.

COROLLARIVM II.

QVæcunque ergò ex illis ſupponatur eſſe, CΠΓ, cum oſtenſa fuerit ratio alicuius ſolidi ſimilaris geniti ex, AΓ, ad ſimilare genitum ex, CΠΓ, iuxtà regulã figuram à baſi, ΠΓ, deſcriptam (vt ſi, ΠΓ, deſcribat quadratum, oſtenſa ratione ſolidi ſimilaris geniti ex, AΓ, hoc eſt quadrati ſolidi ipſius, AΓ, vt illud voco Lib. 7. Prop. 11. ad def. A, & Propoſ. 21. ad ſolidum ſibi ſimilare genitum ex, CΠΓ, iuxtà eandem regulam quadratum ipſius, ΠΓ, hoc eſt ad quadratum ſolidum figuræ, CΠΓ,) illicò per hoc Lemma patet eandem rationem habere quæcunque alia ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex iiſdem figuris, iuxtà regulam quãcunque figuram ordinatam deſcriptam à, ΠΓ. Modo ei, qui dictam Geometriam Indiuiſibilium perluſtrarit, manifeſtum fiet in methodo Indiuiſibilium conſuetum ſemper eſſe reperire, quam rationem habeant omnia quadrata, AΓ, ad omnia quadrata, CΠΓ: Et in Lib. 7. vice proportionis omnium quadratorum, quæri proportionem quadrati ſolidi, AΓ, ad quadratum ſolidum, CΠΓ, iuxtà regulam, ſemper intellige, quadratum, ΠΓ. Vndè in omnibus illis transferri poterit inuenta ratio ad quæcunque alia ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex iiſdem figuris (quarum altera eſt ſemper paral-

lelogram-

lelogrammum) iuxtà regulam figuram quamcunque ordinatã à baſi figuræ deſcriptã, vt & ſup. in Notis. Quæ omnia facilè patet etiã verificari, ſi vice figuræ, ΠCΓ, cõem angulũ, CΓΠ, cum parallelogrãmo habentis, eligeretur figura, vt ΠC♦, in baſi, Π♦, cui eſſet circumſcriptum parallelogrammum, vt, A♦, reliquas habens conditiones ſuperius enarratas. Nempè ſi eſſet ſemicirculus, vel ſemi ellipſis, parabola, hyperbola, vel eorum portio, &c. eadem pro ipſis quoque ſubintelligi deberent.

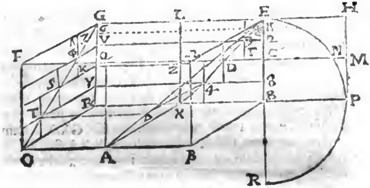
ANNOTATIO I.

HIs intellectis ſupereſt, vt explicetur quomodo quadratorum ſolidorum duarum figurarum, quales in eodem ſchemate ſupponuntur, AΓ, CΠΓ, proportio per hic oſtenſa, ſeu per ea, quæ in Libro Septimo non pendent neque à Methodo Indiuiſibilium, neque à poſteriori parte Propoſitionis primæ, ſeu à Propoſitione tertia eiuſdem Libri haberi poſſit. Prius ergò, CΠ ſupponatur eſſe recta linea, vt CΠΓ, ſit triangulum rectilineum. Si ergò à, ΠΓ, deſcribatur qualecunq; triangulũ, & quomodocunq; plano, AΓ, inclinatum, ſolidum ſimilare genitum ex, AΓ, erit priſma baſim habens triangularem; & genitum ex triangulo, CΠΓ, communi regula triangulo facto à, ΠΓ, erit pyramis, quod ex Prop. 34. Lib. pr. vt ſuperius in Lemmate 12. dicebatur, elici poteſt. Sed ex Duod. Elem. Prop. 7. dictũ priſma triplum eſt dictæ pyramidis, & ex oſtenſis quoque in Exerc. ant. num. 17. ergò & quæcunq; ſolida ſimilaria ex iiſdem genita, iuxtà communem regulam figuram quamcunque ordinatam à, ΠΓ, deſcriptam, ſic ſe habebunt. Vndè nedum quadratum ſolidum ipſius, AΓ, triplum erit quadrati ſolidi ex, CΠΓ, geniti, vt hic probare intendimus, ſed & quilibet cylindricus genitus ex, AΓ, triplus erit pyramidis genitæ ex triangulo, CΠΓ; in baſi communi regula figura deſcripta à baſi, ΠΓ, iiſdem exiſtentibus. Immo & quicunque alius cylindricus in eadem baſi, & altitudine cum prædicto (cum ſit illi æqualis per Lemma 9.) illius pyramidis triplus erit.

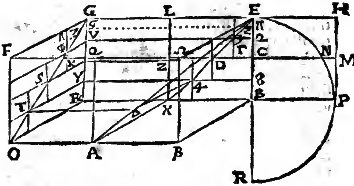
ANNO-

ANNOTATIO II.

NOn ſit verò, C π, recta linea, ſed quæcunque alia ex conſideratis in Libro 3. 4. & 5. Geo. Ind. hoc eſt circuli circumferentia, vel coni ſectio, videndum ergò remanet quomodo haberi poſſit proportio quadrati ſolidi, AΓ, ad quadratum ſolidum genitum ex, CΠ Γ. Sufficiet verò hoc in vna Propoſitione declarare, etenim in reliquis eiuſdem conditionis ſimilem procedendi modum adhibendum



eſſe intelligemus. Aſſumatur ergò Schema Prop. 20. Lib. 7. Geo. Ind. circà quod videbimus quomodo haberi poſſit ratio quadrati ſolidi, HB, ad quadratum ſolidum ſemiportionis circuli, vel ellipſis, EPB, regula, BP. Supponatur autem hic quoque illius conſtructio, immò videns prius Lector illam Propoſit. ex ea intelliget rectangulum ſolidum ſub parallelogrammis, GX, XE, in circulo eſſe æqualiter, & in ellipſi, proportionaliter analogum quadrato ſolido, HB, regula, ℞P. Et rectangulum ſolidum ſub trapezio, G℞XE, & triangulo, EXB, regula eadem, ℞P, in circulo eſſe æqualiter, in ellipſi verò, proportionaliter analogum quadrato ſolido, EBP. Ibi enim oſtenditur ex. gr. rectangulum, QZC, æquari quadrato, CM, ſeu, in ellipſi, ad illud eſſe, vt rectangulum, ℞XB, ad quadratum, BP. Similiterque rectangulum, QDC, probatur æquari quadrato, CN; in ellipſi verò, eſſe



adæquantur, cum eandem habeant rationem ad æqua les AX, XB, nempè quam habet, 4E, ad, EX, vt ex Propoſit. 4. Sexti Elem. elici poteſt. Ergò iuxtà demonſtrata in dicta Prop. 20. Septimi Libri Geo. Ind. ſolidum, GO℞EAX, erit in circulo æqualiter, & in ellipſi proportonaliter analogum quadrato ſolido, EBP. Sicuti, GA, rectangulum ſolidum ſub, GX, XE, erit æqualiter, vel proportionaliter analogum quadrato ſolido, HB, ad illudque, vt rectangulum, ℞XB, ad quadratum, BP, per Lemma 9. quia ſunt æquealti cylindrici, & ideò inter ſe vt baſes, quod ſerua. Reliquum eſt vt ad rem noſtram probemus ſolida, GO℞EAX, & quadratū ſolidum, EBP, inter ſe eſſe vt baſes. Hoc verò illicò patebit ſi oſtendamus illis conuenire poſſe, quod poſtulat Lemma 10. quod hac ratione nunc demōſtrabimus. Sit ſeorſim poſitū quodcunq; ſolidum, quod vocetur, ✠, opportet oſtendere præfatis ſolidis circumſcribi, & inſcribi poſſe figuram ex cylindricis æquealtis compoſitam, ità vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu, quam eſt, ✠. Ducantur more ſolito plana ipſi, OB, æquidiſtantia, quibus ſecetur parallelepippedum, GB, in parallelepippeda æqualis altitudinis, quorum vnumquodque, & ſubindè, Yβ, vnum ex illis, ſit minus, ✠. Eſtò autem quod dicta plana inſimul ſecuerint rectas, GO, G℞, EX, EB, in punctis, ✦, S, T; V, Q, Y; 3, D, 4; 2, C, 8, & per puncta, ✦, S, T; 3, D, 4, producantur ipſi, G℞, æquidiſtantes rectæ lineæ vſq; ad proximas hinc indè

 paralle-

cta m, K✱, æquatur rectangulis ſolidis ſub, 3 Q, Q✱, & ſub, 3Q, 5✱. Sed per eandem Prop. rectangulum ſolidum ſub, 3Q, diuiſa in figuras, DV, D3, & ſub indiuiſa, Q✱, æquatur rectangulis ſolidis ſub, 3D, Q✱, & ſub, DV, Q✱, vndè ſublato quod fit ſub, DV, Q✱, ex eo, quod fit ſub, 3Q, VS, remanebit quod fit ſub, 3D, Q✱, ſeu ſub, 3C, Q✱, (nam parallelogrāma, D3, 3C, ſunt ęqualia quippè quę ſunt ęquealta, & in baſibus æqualibus, LT, TC, cum ſint æquales ipſæ, D3, 3E, quia ſunt cum æqualibus, C2, 2E, proportionales per 2. Sexti Elem.) aut ſub, 3C, ✱S, (cum ſint pariter æqualia hæc parallelogramma, S✱, ✱Q, & in eiſdem parallelis) vna cum eo, quod fit ſub, 3Q, ✱S, quæ ſimul componunt per dictam Prop. 15. Lib. 7. rectangulum ſolidum ſub, 2Q, ✱S. Huic verò ſi iunxerimus ſeruatum rectāgulum ſolidum ſub 2Q, Q✱, componetur per eandem Prop. 15. Lib. 7. rectangulum ſolidum ſub, 2Q, VS, vt dicebatur. Porrò eodem modo oſtendemus, quod fit ſub, 8Q, ST, eſſe exceſſum rectanguli ſolidi ſub, DY, QT, circumſcripti, ſuper rectangulum ſub, 4Q, YS, inſcriptum. Cui ſi iungamus rectangulum ſolidum ſub, 8Q, YS, (quod eſt æquale ei, quod fit ſub, 2Q, VS, prius collecto) componetur rectangulum ſolidum ſub, 8Q, QT, ſeu ſub, BY, ℞T. Et huic tandem iūcto, quod fit ſub, BY, TO, (quod, vt ſuprà factum eſt, oſtendemus eſſe exceſſum eius, quod fit ſub, 4℞, YO, ſuper illud, quod fit, ſub, XY, ℞T,) conficiemus rectangulum ſolidum ſub, BY, YO, æquale omnibus præfatis exceſſibus ſimul collectis. Ex quo patebit figuram circumſcriptam ſolido, CO℞EAX, excedere inſcriptam, ipſo parallelepippedo, Y✱, hoc eſt minori exceſſu, quam ſit, ✠.

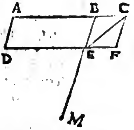
Quo verò ad quadratum ſolidum ſemiportionis, EBP, patet ipſi figuram ex quadratis ſolidis, ſeu parallelepippedis æquealtis compoſitam circumſcribi poſſe, & aliam inſcribi, ità vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu, quocunque oblato ſolido. Hoc enim ad modum Lemmatis 12. oſtēdetur, ſeu id ex eo colligi pōt, ſunt.n.integræ, quæ ſunt ducibiles ī figura, EBP, parallelę ipſi, BP: parallelæ verò ipſi, ER, nōniſi ſemel occurrūt ambitui, ENP, vt ex Conicis facilè oſtēdi pōt; quæ ſunt cōditiones in ipſo Lemm. 12. poſtulatæ,

Deni-

Denique per Lemma 10. patebit idcircò ſolidum, G O ℞ EAX,ſeu rectangulum ſolidum ſub trapezio,G℞XE,& triãgulo,EXB,ad quadratum ſolidum ſemiportionis,EBP,eſſe vt baſis ad baſim,hoc eſt vt rectangulum,℞XB,ad quadratum, BP: hoc eſt vt parallelepippedum, GA,ſeu rectangulum ſolidum ſub, G X, XB,ad quadratum ſolidum,EP. Sunt ergò hæc quatuor ſolida proportionalia. Quapropter cum in Prop.16. Lib. 7. oſtenſum fuerit rectangulum ſolidum ſub, GX, XE, ad rectangulum ſolidum ſub trapezio, G℞XE, & triangulo, E X B, eſſe vt, ℞X, ad compoſitam ex dimidia, ℞X, & ſexta parte, X B; liquet etiam quadratum ſolidum, HB,ad quadratum ſolidum,EBP, eſſe in eadem ratione, hoc eſt, vt, R B, ad compoſitam ex dimidia, R B, & ſexta parte, B E, vt in Prop. 20. eiuſdem Lib. 7. pariter demonſtrare intentum fuit.

Conſimili verò modo, præſuppoſitis ijs, quæ habentur in Prop.16,17,18,19, per hanc circumſcriptionem,& inſcriptionem,&c. quæ Prop.20. ſubſequuntur, ac per eadem ibi abſoluuntur, compleri poſſe, ad huius imitationem poterit ſtudioſus intelligere. Cuius induſtriæ, ne longior ſim, à me relinquuntur, ſi circà poſteriorem partem Prop. primæ, & Prop. tertiam, adductæ in eodem Lib. ſept. demonſtrationes illi non ſatisfaciant, velitque de illarum veritate in his quoque certior fieri.

ANNOTATIO III.



SVperſunt adhuc examinandæ Propoſitiones, 16, 17, 18, & 19. eiuſdem Lib.7. à quibus prædicta pendent, circà quas videndum eſt num ſubſiſtant, etiam per tantum hic oſtenſa. Videatur ergò Schema Propoſit. 16.(quod hic denuò exponimus) eiuſq; demonſtratio, in qua aſſumitur rectangulum ſolidum ſub, A E, E C, ad rectangulum ſolidum ſub, A E, & triangulo, BEC, regula, DF, eſſe, vt BF, ad, BEC.

Pendet

Pendet autem hoc ex huiuſmodi veritate, quod nempè cylindrici æquealti, (ſunt enim rectãgula ſolida ſub, AE, EC, & ſub, AE, & triangulo, BEC, æquealti cylindrici per Prop. 13. eiuſdem Lib. 7. ipſiuſque Cor. 1.) ſint inter ſe, vt baſes, quod probatum eſt in Lemmate 9. Porrò ex eadem veritate pendet quoque rectangulum ſolidum ſub, AE, EC, ad quadratum ſolidum, EC, eſſe vt rectangulum, DEF, ad quadratum, EF. Et tandem quadratum ſolidum, E C, ſexcuplum eſſe rectanguli ſolidi ſub triangulis, BEC, EFC, infertur ex eo, quod ſit triplum quadrati ſolidi, tam trianguli, BEC, quã CEF, quod patuit in ſuperiori Annot. prima. Cætera verò pendent ex Prop. 15. eiuſdem Lib. 7. de qua in ſequenti Annot. dicendum eſt. Non diſſimili ratione autem intelligemus pariter, & ſequentes ibi Propoſitiones, 17, 18, &, 19, ſubſiſtere per hic tantum oſtenſa, cum per ſimilia his, quæ attigimus circà Prop. 16. & ipſę procedant.

ANNOTATIO IV.

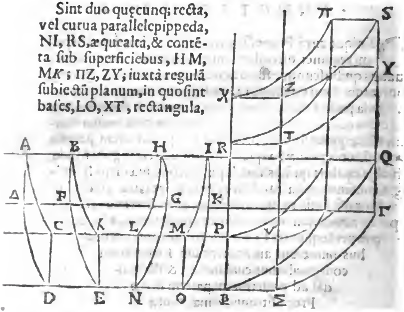
DEnique circà Propoſitionem 15. eiuſdem Libri Septimi remanet oſtendendum rectangulum ſolidum ſub duabus quibuſcunque ſuperficiebus, iuxtà datam regulam, contentum (cui ex Prop. 12. indefinita numero ſolida rectangula pariter dari poſſunt, ſub homologis ſuperficiebus prædictis contenta iuxtà eandem regulam, quæ omnia inuicem eſſe æqualia ibidem probatur per poſteriorem partem Propoſitionis primæ) æquari cuicunque rectangulo ſolido ſub alijs duabus quibuslibet ſuperficiebus, prædictis homologis, contento iuxtà eandem regulam: vt circà vſum eiuſdem Propoſitionis 15. qui maximus, & creberrimus eſt, etiã per hunc modum omnis tollatur ambiguitas. Hoc autem per ſequentia Lemmata abſoluemus, in quibus numerum antecedentium Lemmatum continuabimus cum hæc, vt & illa, tendãt ad poſteriorem partem dictæ Propoſitionis primæ, tantæ molis extat, pariter confirmandam.

LEM-

LEMMA XIII.

REctangula ſolida ſub ſuperficiebus iuxtà datam regulam contenta, quæ ſint parallelogramma rectilinea, ſeu curuilinea, vel eiſdem homologæ, dicantur parallelepippeda recta, vel curua, prout continentes ſuperficies erunt planæ, vel curuæ. Hæc ergò ſi ſint in eadem altitudine, & in baſibus rectangulis ſub æqualibus lateribus comprehenſis, quorum planum ſit regula, ſintque latera lateribus parallela, vel ſibi in directum conſtituta: inter ſe æqualia erunt.

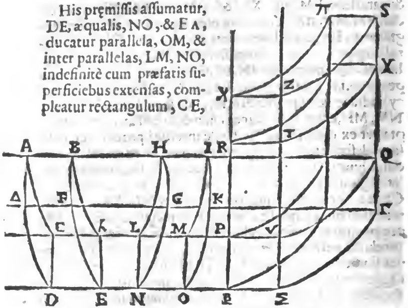
Sint duo quęcunq; recta, vel curua parallelepippeda, NI, RS, æquealta, & contēta ſub ſuperficiebus, HM, MK; ΠZ, ZY; iuxtà regulā ſubiectū planum, in quoſint baſes, LO, XT, rectangula,



cōprehenſa rectis, LM, MO; XZ, ZT; exiſtentibus æqualibus, & paral-

& parallelis, LM; ipſi, XZ, &, OM, ipſi, TZ. Sint verò dictæ, HM, MK; ΠZ, ZY, continentes ſuperficies, vel parallelogramma, aut parallelogrammis homologæ. Dico ipſa parallelepipeda, ſeu rectangula ſolida, IN, SR, inter ſe æqualia eſſe. Quoniam ergò, IN, SR, ſunt rectangula ſolida, ideò per Prop. 11. Libri Septimi eiuſdem Geo. Ind. ſuperficiebus cylindraceis comprehendentur, vndè ſuperficies, Hk, kN, NM, MH, erunt cylindraceæ, immò ab eodem latere deſcriptæ, vt ex dicta Prop. 11. facilè intelligi poteſt: illud ergò latus deſcribens dictas ſuperficies, quod ſit ex. gr. HI, extendatur hinc indè indefinitè, vt vſque in, A, Q, quod inſimul intelligatur deſcripſiſſe ſuperficies cylindraceas, ΔQ, QC, CΣ, ΣΔ, hoc eſt dictæ ſuperficies, Hk, kN, NM, MH, ſint hinc indè indefinitè extenſæ. Similiter in rectangulo ſolido, SR, accipiantur ſuperficies cylindraceæ, quæ pariter indefinitè productæ verſus prædictas, cum illis concurrere poſſunt, tales ſunt enim ipſæ, ΠY, YZ, ZR, RΠ, quæ productæ verſus, Q, occurrant præfatis ſuperficiebus, cum illiſq; concludant ſolidum, Qϐ, quod erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſuperficiebus, QP, VΓ, iuxtà regulam ſubiectū planum. Traiecto enim quocunque plano ſecante altitudinem ſolidorum, IN, SR, & ipſi ſubiecto plano, æquidiſtante, procreabitur in ſolido, Qϐ, rectangulum, cuius latera iacebunt in ſuperficiebus, QP, VΓ, namque illa æquidiſtabunt ipſis, PV, VΣ, cum ſint in ſuperficiebus cylindraceis, quorum deſcribentia latera ipſis, PV, VΣ, æquidiſtant. Immo ſicuti, PV, æquatur ipſi, RT, (eſt enim, RV, parallelogrammum) &, VΣ, ipſi, OM, ità facilè oſtendemus genitam in ſuperficie, QP, per ductum planum, æquari genitæ in ſuperficie, YR, (quia erunt latera oppoſita parallelogrammi per imaginarium planum producti) quæ cum æquetur ipſi, RT, namque, RY, ſupponitur vel parallelogrammum, vel parallelogrammo ſuperficies homologa (nempè habens omnes parallelas ipſi, RT, eidem pariter æquales) ſequitur & productam in ſuperficie, QP, æquari ipſi, RT. Eadem ratione probabimus eam, quæ gignitur in ſuperficie, ΓV, æquari ipſi, MO. Vndè patebit ipſas ſuperficies, ΓV, QP, vel eſſe parallelogramma, vel parallelogrammis homologas.

His pręmiſſis aſſumatur, DE, æqualis, NO, & EΛ, ducatur parallela, OM, & inter parallelas, LM, NO, indefinitè cum præfatis ſuperficiebus extenſas, compleatur rectangulum, CE,



perque ipſas, DC, EΛ, extenſis parallelis planis, *illa* ſecent productas ſuperius ſolidi, IN, ſuperficies cylindraceas, vt fiat ſolidum, AE, & ipſum cylindraceis ſuperficiebus, DΛ, ΛF, FA, AD, &, ΔE, AΛ, comprehenſum, quod pariter, vt circa ſolidum, QP, effectum eſt, oſtendetur eſſe ſolidum rectangulum ſub ſuperficiebus, AΛ, ΛF, contentum iuxtà regulam ſubiectum planum, quarum, ΛF, erit certè parallelogrãmum (vt &, AD,) nempè vel rectilineum, vel ſaltem curuilineum, cum ſupponantur ſuperficies planæ: ipſæ verò, ΔE, AΛ, erunt vel parallelogramma, vel ſaltem parallelogrammis analogæ: eſt enim, AE, cylindricus per Prop. 10. Lib. Primi Geo. Ind. cum, AD, BE, ſint plana parallela, & ſecantia ſuperficies cylindraceas, latere, HI, ĩdefinitè producto deſcriptas, hoc eſt cylindricum ſecantia, cuius illæ ſunt ſuperficies, ſuntque oppoſitæ baſes ipſæ, AD, BE. Nunc ergò oſtendẽdum eſt ſolidum, IN, æquari ipſi, BD, quod ſic ad modum quaſi Lemmatis primi via ſuperpoſitionis exequemur. Accipiemus enim ſolidum ſuperficiebus, AD, DL, LG, GA, &, ΔGND, AHLC, comprehenſum, illudque ſolido ſuperficiebus,

bus, BE, EM, MK, KB, &, FKOB, BIMΔ, contento ità ſuperponemus. Cum enim, DE, æquetur, NO, addita communi, EN, ipſa, DN, æquabitur ipſi, EO, ergò poſito, D, in, F, &, DN, in, EO, erit, N, in, O, & cadente baſi, DL, ſuper, EM, erit, DC, in, EΔ, quia recti ſunt anguli, CDN, ΔEO, &, C, in, Δ, propter æquales, CD, ΔE, & punctum, L, in, M, ob æquales angulos, DCL, EΔM, & rectas, CL, ΔM, &, LN, erit in, MO. Sed & ſolidum dico ſolido congruere. Cum enim ſuperficies, AD, BE, ſint planæ, & æquidiſtantes, propterea erunt ſubiecto plano æqualiter inclinatæ, & ideò cōgruente, DC, ipſi, EΔ, illæ conſtituentur in eodem plano. Eſt verò ſolidum, AE, cylindricus, eiuſq; oppoſitæ baſes, AD, BE, vt ſuprà dicebatur, quæ ideò ſimiles erunt, æquales, & ſimiliter poſitæ per Prop. 11. eiuſdem Libri Primi, quare congruente eius latere homologo, DC, ipſi, EΔ, per Prop. 25. eiuſdem cōgruet, AD, ipſi, BE: & punctum, Δ, erit in, F, ac, A, in, B, vndè, G, erit in, k, &, H, in, I, necnon, HG, in, IK, ſuperficieſq;, AG, congruet ſuperficiei, B k; nam ambæ ſunt in plano rectanguli, Hk, ipſi, LO, oppoſiti. Sed & ſuperficies, GΔDN, congruet ipſi, KFEO, ſi enim aliquod illius punctum caderet extrà iſtam, nō eſſent ambæ ab eodem cylindrici latere deſcriptæ, quia reperirentur duo puncta in plano per tale punctū ſubiecto plano æquidiſtanter traiecto, quæ non eſſent in eodem latere cylindrici. Nullum ergò punctum ſuperficiei, ΔGND, cadet extrà ſuperficiem, FKOE; nam &, GN, congruet ipſi, KO, quia, ΔD, congruit ipſi, FE, & quemadmodū, DN, oſtenſa eſt æqualis ipſi, EO, ità quæ à traiecto quocunque plano ſubiecto plano æquidiſtante gignentur in dictis ſuperficiebus cylindraceis, ΔGND, FKOE, oſtendentur æquales, vndè nullum punctum lineæ, G N, oſtendetur poſſe cadere extrà lineam, K O, quapropter ſibi congruent dictæ ſuperficies, ΔGND, FkOE. Eadem ratione patefiet ſuperficies, AHLC, BIMΔ, ſibi congruere. Et tandem ſuperficiem, HGNL, congruere ipſi, IMOk, (quarum ambitus iam oſtenſi ſunt congruere) oſtendetur, vt in primo Lemmate effectum eſt, nempè probando nullum punctum ſuperficiei, H N, poſſe cadere extrà ſuperficiem, IO. Etenim traiecto plano per punctum extrà cadens (ſi poſſibile eſſet) ſubiecto

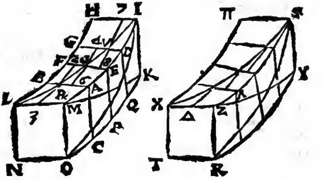
plano æquidiſtante, fieret parallelogrammum (veluti ſunt parallelogramma, D L, E M, ΔH, FI,) in quo ducta à ſuppoſito puncto recta linea parallela ipſius oppoſitis lateribus, maior, vel minor, & æqualis eidem rectæ oſtenderetur: ſicuti in figura primi Lemmatis, QO, QN, & æquales, & inæquales eſſe probabantur. Quod cum eſſe non poſſit, ideò ſuperficies, HN, cõgruet ipſi, IO, & totum ſolidum, AN, toti, BO, vndè erunt æqualia; & ſublato communi, quod comprehenditur ſuperficiebus, BE, EL, ∠G, GB, BΔLH, FENG, remanebit ſolidum, HO, æquale ipſi, AE. Non diſſimili ratione demonſtrabimus & ſolidum, Qβ, æquari eidem, AE, vnde patebit, HO, æquari ipſi, Qβ, in quibus ſolidis ſunt, LM, PV, ſibi indirectum, &, MO, VΣ, parallelæ. Quod ſi intra ſuperficies cylindraceas, P Π, Π Q, V S, VX, indefinitè verſus, ΠXZS, protenſas, conſtitutum ſuppoſuerimus ſolidũ rectangulum, quale, AE, cum binis ſuperficiebus planis ipſi, Π Z, oppoſitis, ſicuti planæ ſupponebantur ipſæ, AD, BE. Oſtendemus ſimili ratione eidem æquari tam, S R, quam, ΓP; ex quo concludetur, S R, æquari ipſi, ΓP, cui cum probatum fuerit æquari &, HO, ideò, HO, SR, propoſita ſolida inter ſe æqualia erunt. Quod oſtendere opus erat.

LEMMA XIV.

SI ex Schemate Lemmatis antecedentis, eiuſq; parallelepipedis, IN, S R, aſſumantur tantum baſes, L O, XT, & ſuperficies, HM, M K; ΠZ, ZY; ſub quibus continentur: ſupponantur verò in alterutris ſuperficierum, quę ſunt homologæ, vt in, HM, ΠZ, ductæ lineæ, IL, SX, vt in præſenti ſchemate appareat, eiuſque conditionis, vt cum, IML, SZX, conſtituant figuras, ILM, S X Z, quæ aut ſint planæ in alteram partem deficientes (vt explicatur in Lemmate 2. poſt Prop. Primam Libri Septimi Geo. Ind.) vel

vel ſaltem ſint homologæ figuris planis in alteram partem deficientibus, regu'is, LM, XZ: hoc eſt, ductis in dictis ſuperficiebus, ILM, SXZ, quibuſcunq; ipſis, LM, XZ, parallelis; earum, quæ ſunt in eadem figura propinquior baſi, vt in, H M, propinquior ipſi, LM, ſit ſemper maior remotiore. Dico rectangulum ſolidum ſub parallelogrammo, H M, & figura, ILM, regula baſi, LO, æquari rectangulo ſolido ſub parallelogrammo Y Z, & figura, S X Z, regula baſi, X R.

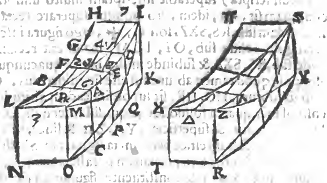
Si enim non, erit eorum alterum maius. Sit maius, quod ſub, KM, ILM, continetur quantitate ſolidi, quod vocetur, ✠. Tunc retabgulo ſolido ſub, KM, ILM, figuram circumſcribemus, & aliam inſcribemus ex paralleleppipedis,



ſiuè rectis, ſiuè curuis æquè altis compoſitam, prout, HO; ΠR, erunt parallelepippeda recta, vel curua, ità vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſolido, quam ſit, ✠. Hoc

Hoc autem obtinebimus traiectis planis baſi, LQ, æquidiſtantibus, vt in Annotat. 2. ſuperiori effectum eſt, quorum primum bifariam ſecet ſolidi, HO, altitudinem. Et alia duo ſubſequentia rurſus diuiſas altitudinis partes bifariam diuidant, ſicque deinceps, deuenietur enim per primam Decimi Elemen. ad parallelepipedum minus ipſo, ✠; quod ſit contentum ſub, L A, A O, quæ vel ſunt parallelogramma, vel ijs homologa, tota enim ſuperficies, H M, in Lemmate ant. ſuppoſita eſt vel parallelogrammum, vel parallelogrammo homologa, regula, LM, & BA, eſt parallela, LM, vt ex Prop. 9. Lib. Primi Geo. Ind. elici poteſt, in qua oſtenditur, ſi planũ æquidiſtans plano per latera cylindrici ducto, (quale eſt, LO, tranſiens per, LM, latus eius cylindrici, cuius, HM, eſt ſuperficies cylindracea) tangat cylindricum, contactum fieri in recta, vel rectis lineis, quæ erunt latera cylindrici, & conſequenter cuicunque eiuſdem lateri parallela; quod enim ibi oſtenditur de plano tangente cylindricum, idem de ſecante idipſum ob eandem rationem ibi allatam verificatur: vndè concludemus, BM, & ſimili ratione, M, C, eſſe parallelogrammum, vel parallelogrammo homologum. Eſto ergò quod dicta parallela plana ſecuerint ſuperficies, HM, Mk, in rectis, FE, EP; GD, DQ: quarum quæ ſunt in, HM, æquidiſtant ipſi, LM, & quæ in, KM, ipſi, MO, per dictã Prop. 9. Sit verò per eas ſecta linea, M, in punctis, V, &, R, per quæ intelligantur in ſuperficie, HM, extenſæ lineæ hinc indè vſque ad proximas parallelas, nempè, 3 R 2, 6 & 4, 8V7, conſtituentes parallelogramma, 2M, 4 A, 7 E, ſeu parallelogrammis homologas figuras, regula, L M, hoc enim fieri concipiemus per motum lateris cylindrici in ſuperficie, HM, factum ipſi, L M, ſemper æquidiſtanter. Vt ex. g. pro deſcriptione ipſius, 23, abſciſſa ab, LM, recta, 3 M, æquali ipſi, R A, percurrente, M, lineam, MI, punctum, 3, deſcribet ipſam, 3 2, ad modũ, quo in Lemmate ſecundo poſt Prop. 1. Lib. primi Geo. Ind. explicata eſt deſcriptio parallelogrammi ſiuè rectilinei, ſiuè curuilinei. Sicque circà alias, 64, 87, procedemus. Erunt autem, 3 R, 6&, 8V, intrà, &, R2, &4, V7, extrà figuram, ILM, in ea enim parallelarum ipſi, L M, propinquior eidem ſupponitur ſemper remotiore maior.

Sic



Sic ergò ſpatio, ILM, erit circumſcripta, & inſcripta figura ex parallelogrammis, ſeu parallelogrammis homologis figuris, æquealtis compoſita; & eſt, IO, parallelogrammum, ſeu parallelogrammo homologum, regula, MO; ſi ergo intelligamus compleri rectangula ſolida tam ſub, K M, & figura, ILM, quam ſub, OA, CE, P D, QI, & ſibi reſpondentibus figuris tam circumſcriptæ, nempè, LA, ℞E, & D, VI; quam inſcriptæ, nempè, 3 A, 6E, 8D, manifeſtum eſt ipſi rectangulo ſolido ſub, KM, &, ILM, fore circumſcriptam, & inſcriptam figuram, ex paralleleppipedis, ſiuè rectis, ſiuè curuis compoſitam, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptã minori ſolido, quam ſit, ✠. Namque parallelepippedum ſub, k D, D 7, æquabitur ei, quod fit ſub, PD, D8, per Lemma ant. Hoc verò iunctum parallelepippedo ſub, PD, 84, conficiet parallelepippedum ſub, PD, E4, quod facilè oſtendetur, quia totum æquatur omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Hoc verò æquatur ei, quod fit ſub, PA, A&, ergò ſi hoc iunxerimus ei, quod fit ſub, PA, 62, componetur parallelepippedum ſub, PA, A2, ſeu ſub, CM, M℞, quod cum eo, quod fit ſub, CM, 3B, conſtituet parallelepippedum ſub, CM, MB, cui æquabitur dictus exceſſus figuræ circumſcriptæ ſuper inſcriptam. Cum ergò parallelepippedũ ſub, C M, MB, ſit minus ſolido, ✠, etiam dictus exceſſus erit eodem minor. Vndè circum-

ſcripta

ſcripta ſuperante inſcriptam minori exceſſu, quam ſit, ✠, rectangulum ſolidum ſub,kM,ILM, (quod eſt minus figura ipſi circumſcripta) ſuperabit inſcriptam multò minori exceſſu, quam ſit, ✠, idem verò ponitur ſuperare rectangulum ſolidum ſub,RS,SXZ, ſolido, ✠, ergò figura inſcripta rectangulo ſolido ſub, OI, ILM, maior erit rectangulo ſolido ſub,RS, SXZ, & ſubinde multò maior quacunque illi inſcripta, quod tamen abſurdum eſſe ſic euincemus. Cum enim ſolidorum, HO, ΠR, ſit ſuppoſita eadem altitudo, extenſis planis, quæ in ſolido, HO, æquidiſtanter baſi, LO, ducta ſunt, ſecentur & ſuperficies, Y Z, Z Π, & linea, SX, vt in ſolido, HO, effectum eſt, & per puncta ſignata in, SX, ducantur intrà, SXZ, vſque ad proximam parallelam lineæ, quales ſunt, ℞ 3, & 6, V 8, conſtituentes figuram ex parallelogrãmis ſeu ijſdẽ homologis figuris, æquealtis cõpoſitã: vt cõpletis rectangulis ſolidis ſub his, & ſibi reſpondentibus in, YZ, figuris, vt in, HO, factum eſt, necnon ſub, YZ, SXZ, huic fiat inſcripta figura ex parallelepippedis æquealtis compoſita, quorũ vnum ex.gr. ſit, quod fit ſub, Rλ, λΔ. Hoc enim æquari ei, quod fit ſub, OA, A3, manifeſtum eſt per Lemma ant. quia ſunt parallelepippeda æquealta, & contenta ſub ſuperficiebus, 3A, AO; Δλ, λR, quæ ſunt vel parallelogramma, vel ijs homologæ, regulis baſibus rectangulis, 3 M O, Δ Z R, æqualibus, & ſub lateribus æqualibus, & parallelis, 3M, ΔZ; M O, ZR, contentis. Eadem ratione reliqua ſibi reſpondentia ſolida harũ inſcriptarum figurarum adæquari oſtendemus, ex quo integras æquales eſſe conſtabit contrà id, quod ſuperius demonſtratum eſt. Non ergò rectangulum ſolidum ſub, OI, ILM, maius eſſe poteſt eo, quod fit ſub, RS, SXZ. Eadem ratione oſtendemus, nec poſſe eo minus eſſe, quia tunc poneretur, quod fit ſub, RS, SXZ, eſſe maius, & fieret demonſtratio incipiendo circumſcriptionem, & inſcriptionem priorem in ſolido, Π R, & proſequendo poſteriorem inſcriptionem in, H O, ac deducendo ad abſurdum. Quapropter conſtat rectangulum ſolidum ſub, OI, ILM, nec maius, nec minus eſſe poſſe rectangulo ſolido ſub, RS, SXZ. Ergò eidem æquale erit. Quod oſtendere opus erat.

LEM-

LEMMA XV.

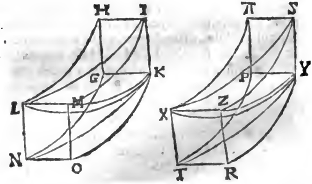
SI in reliquis figuris homologis, kM, YZ, in Schemate Lemmatis ant. ſupponantur ductæ lineæ, OI, RS, eiuſmodi, quales fuerunt, LI, XS, ideſt conſtituentes figuras, IMO, SZR, in eandem partem cum, ILM, SXZ, deficientes; cæteris manentibus. Rectangulum ſolidum ſub figuris, ILM, IMO, regula, LO, æquabitur rectangulo ſolido ſub, SXZ, SZR, regula, XR.

Hoc autem non aliter quam Lemma ant. probabitur. Namque per continuam biſſectionem altitudinis ſolidi, HO, vt & in figura, ILM, factum eſt, ipſi, IMO, circumſcribemus, & inſcribemus figuram ex parallelogrammis, vel ijs homologis figuris, æquealtis compoſitam, ſub quibus, & reliquis figuris componentibus circumſcriptam, & inſcriptam ſpatio, ILM, mente completis rectangulis ſolidis, oſtendemus, vt in Lemmate ant. rectangulo ſolido ſub figuris, ILM, IMO, circumſcriptam eſſe figuram, & aliam inſcriptam, quam illa ſuperat exceſſu minori dato ſolido, vt, ✠ hocque mediante, vt ſuprà, inſcriptionem in rectangulo ſolido, ſub, SZX, SZR, proſequentes, oſtendemus rectangulum ſolidum ſub figuris, IML, IMO, æquari rectangulo ſolido ſub figuris, SZX, SZR. Quod, &c.

LEMMA XVI.

DEnique in eodem Schemate Lemmatis 14. & in figuris, KM, YZ, ducantur lineæ, Mk, ZY, quales fuerunt, LI, XS; IO, SR, hoc eſt conſtituentes figuras, I M k, S Z Y, in partes tamen oppoſitas deficientes ijs, in quas deficiunt, IML, SZX. Dico, ſuppoſitis ijſdem regulis, rectangulum ſolidum ſub figuris, IML, I M k, æquari rectangulo ſolido ſub, SZX, SZY.

Namque ex Lemmate 14. rectangula ſolida ſub, *K* M, IML, & ſub, YZ, SZX, ſunt æqualia. Similiter per Lemma ant. rectangula ſolida ſub figuris, IML, MOk, & ſub, SXZ, ZR Y, ſunt æqualia, quia, M O *K*, Z R Y, deficiunt verſus

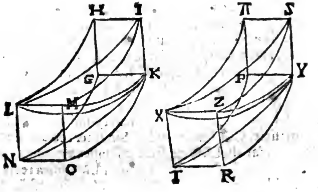


eaſdem partes, HIK, ΠSY, verſus quas deficiunt ipſæ, IML, SZX. Ergò reſiduum rectangulum ſolidum ſub, ILM, IMk, æquabitur reſiduo rectangulo ſolido ſub, SXZ, SZY. Sed vt omnis ambiguitatis locus auferatur congruet hęc rectangula ſolida clarius Lectori exhibere. Aſſumantur ergò ex Schemate Lemmatis 14. tantum ſuperficies, LO, XR, HM,

ΠZ,

ΠZ, MK, ZY, cum deſcriptis lineis, IL, SX, MK, ZY, cæteris omiſſis, & compleri intelligantur dicta ſolida, concurrentibus, ad, G, P, tribus cylindraceis ſuperficiebus, GL, GO, GI, tribus, MK, MH, MN, in ſolido, HO, oppoſitis: & tribus, PX, PR, PS, tribus, ZY, ZΠ, ZT, in ſolido, ΠR, pariter oppoſitis. Deſcribet autem ex. gr. NO, latus cylindrici ipſam ſuperficiem cylindraceam, GNOk, dum concipietur moueri ſemper fixæ, NO, æquidiſtanter, manente puncto, O, ſemper in linea, Ok, donec perueniat in ſitum, Gk. Qua ratione &, GL, deſcribetur ab, LN, &, GI, à, GH, vel, Gk. Eodem modo diſcedat recta æqualis ipſi, LN, ab ipſa, LN, mota ſemper ipſi, LN, æquidiſtanter, & manente ſemper puncto, L, in, LI, quæ deſcribet ſuperficiem cylindraceam, ILNk, & in ſuperficie, GO, lineam, Nk. Similiter recta æqualis ipſi, LM, diſcedat ab, LM, cui feratur ſemper æquidiſtanter, deſcribens ſuperficiem cylindraceam, kLM, linea rectà, LM, & ipſis, Lk, in ſuperficie, ILNk, &, kM, in ſuperficie, IMOk, iacente concluſam. Eodem verò modo intelligemus in alio ſolido, ΠR, deſcriptas præfatis reſpondentes ſuperficies. His peractis licet modò intueri ſolida ſuperficiebus, IN, NM, Mk, kNO, ILM; &, ST, TZ, ZY, YTR, SXZ, comprehenſa, quæ ſunt rectangula ſolida ſub ſuperficiebus, OI, ILM; RS, SXZ, prænominatis contenta: traiectis enim quomodocunque in ipſis planis baſibus, LO, XR, æquidiſtantibus, fient in dictis ſuperficiebus lineæ parallelæ lateribus ipſarum baſium per citatam ſuperius Prop. 9. Lib. Primi Geo. Ind. & ſubindè fient rectangula, quorum latera iacebunt in figuris, OI, ILM; RS, SXZ, idcircò dicta ſolida continentibus. Eſt autem ſolidum, IKONLM, æquale ſolidis, ILMk, kLNOM, totum nempè omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis: vt & ſolidum SYRTXZ, prædicto æquale, pariter adæquatur ſolidis, SXZY, YXTRZ. Eſt autem, kLNOM, æquale ipſi, YXTRZ, per Lemma 15. nam hæc ſunt rectangula ſolida ſub ſuperficiebus, kNO, KOM, figuriſuè in eandem partem deficientibus contenta; hoc enim, vt circà ſolida, IKONLM, SYRTXZ, proceſſimus, pariter oſtendetur. Ergò reliqua ſolida, ILMk, SXZY, æqualia erunt. Sed & hæc demonſtrabimus eſſe ſolida rectãgula ſub figuris, ILM, IMK, SXZ,

SZY, contenta, eodem modo, quo circa præfata ſolida id oſtendimus. Ergò rectangula ſolida ſub figuris, ILM,MIK; SXZ, SZY, contenta inter ſe æqualia erunt.



COROLLARIVM I.

QVoniam verò in Lemmate 13. ſuperiori parallelepipeda, HO,πR, ſupponũtur ſiuè recta,ſiuè quomodocũq; curua; idcircò propoſitis duobus quibuſcũque rectangulis ſolidis æquealtis, in quorum vnoquoque duæ continentes ſuperficies iuxtà regulas baſes (quæ ſint rectãgula,eiuſq; latera æqualia,& parallela ſeu in directum, vnum vni,& alterum alteri) ſint vel duo parallelogramma, ſiuè rectilinea, ſiuè curuilinea; vel vna parallelogrammum, altera verò figura plana in alteram partem deficiẽs; aut ambæ figuræ planæ in eaſdem, vel etiam in contrarias partes deficientes; ſeu ſint his homologæ; manifeſtum eſt ex his quatuor proximis Lẽmatibus ea inter ſe æqualia eſſe. Poſſumus enim ſemper figuras in alteram partem deficientes, ſeu his homologas, ità complere, vt ſint parallelogrammis, vel ijſdem homologis figuris inſcriptæ. Sicuti ex.gr. ipſæ, ILM, IMK, KMO, parallelogrammis, vel ijſdem homologis figuris,HM, MK, ſunt inſcriptæ. Ex quo fit, vt & ipſis contenta rectãgula ſolida parallelepipedis quoque ſiuè rectis,

ſiuè

Digitized by Google

ſiuè curuis fiant inſcriptibilia. Quibus denique appa: et poſteriorem partem Prop. Primæ Libri Septimi Geo.Ind.etiam quoad huiuſmodi ſolida veram eſſe.

COROLLARIVM II.

ET quoniam figuræ in ipſa Geometria Indiuiſibilium conſideratæ, circà quas vtimur Propoſitione 15. eiuſdem Libri Septimi, ſunt eius conditionis, qualem ſuprà poſtulauimus, nempè vel parallelogramma, vel figuræ in eaſdem, ſeu in contrarias partes deficientes, aut ijs homologæ, ſeu in huiuſmodi figuras reſolui poſſunt, cum habeant conditionem dictam in Lemmate 12. ſuperiori, ſicuti in eius Cor. primo pariter innuimus, & vt illius Geometriæ Propoſitiones, in quibus vſu venit Prop. 15. ſuperius dicta, conſiderāti innoteſcet: ideò circà ipſius Propoſitionis 15. vſum neutiquam Lectori dubitandum erit, per hæc enim patet rectangulum ſolidum ſub duabus quibuſdam ſuperficiebus iuxtà datam regulam contentum, æquari cuicunque alteri ſub ſuperficiebus prędictis homologis iuxtà eandem regulam contento, lateribus baſium, vel parallelis, vel in directum exiſtentibus, vt ſemper in dicta Geometria vſurpantur: quod & in Prop. 12. eiuſdem Libri Septimi ſuppoſita veritate poſterioris partis Prop. Primæ pariter oſtenſum fuit. Hoc verò ſtabilito etiam per hunc modum Archimedeum ferè omnia ſubſiſtere manifeſtum eſt, paucis tantum relictis, vt eſt ex. gr. Lemma 12. ſuperius, quod eſſet extendendum etiam ad figuras non ordinatas, & vt eſt Prop. 17. Lib. Secūdi, quæ ſub tanta generalitate per hæc ſubſiſtere non poteſt, niſi vniuerſaliſſimè dictā poſteriotem partem Prop. pr. Lib. Septimi, per hunc modū Archimedeum oſtendamus, quod propter innumerabiles ſolidorū varietates liquidò explicare, ac ſchematibus aperire, per vnā generalē demonſtrationē omnibus applicatā, difficillimū puto. Prædemōſtrata tamen ſatis Lectori fidē facere poſſunt de veritate dictæ poſterioris partis Prop. Primæ, ac de ſubſiſtentia allatæ ibidem demonſtrationis in omnibus ſolidis, quam vix aliter puto à Geometris ſub tanta generalitate oſtendi poſſe.

COROL-

COROLLARIVM III.

Hinc etiam colligitur, cum circà aliquas figuras verſabimur, tanquam rectangula ſolida continentes, prædictas conditiones habentes, nempè quæ vel ſint parallelogram ma, vel figuræ in alteram partem deficientes: quod circà eaſdem ſufficiet adhibere doctrinam Libri Septimi, tanquam germanam, ac ſeipſa ſufficientem, abſque eo quod vtamur circumſcriptione, & inſcriptione figurarum. Satis enim erit hanc circumſcriptionem, & inſcriptionem hac vice tantum adhibuiſſe, vt poſterior pars dictæ Propoſitionis Primæ etiam hoc pacto confirmaretur.

XXII.

Si ergo Lector ſupradicta omnia rectè perceperit, ſatis, puto, nedum in priori, ſed & in poſteriori methodo Ind. eruditus, poterit de iiſdem diiudicare, quamque ſibi libuerit in demonſtrando proſequi. Cum verò hic reliquum doctrinæ Geometriæ Ind. breuitatis cauſa, prætereamus, non inutile tamen, & iniucundum ſtudioſo fore putaui, ſi quædam illius ſelectiora, tamquam ſpecimen huius artis, pulchriorumque fructuum meſſem à me collectam, breuiter hic expoſuero tum vt ſciat Lector quid in reliquis dictæ Geometriæ Libris tractetur, tũ etiam vt ex his intelligat Indiuiſibilium vſum neutiquam fallacem eſſe, ſi modò rectè eo vtatur, ſed in ipſum veritatis ſcopum illa ſemper collimare. Id autem præſtabimus paulò amplius explicando, quæ in Exercitat. ant. num. 39. breuiori Epilogo recenſuimus.

In Libro Tertio igitur, ſuppoſita reuolutione circuli, vel ellipſis cuiuſcumque facta circa proprium axem, conſiderantur ſolida rotunda ab illis, & earum portionibus genita, & hoc ab initio Libri vſq; ad Prop. 9. Deinde à Prop. 9. vſq; ad 11. enucleatur ratio eorumdem circulorũ, & ellipſium, inter ſe comparatorum. Denique à Prop. 11. vſque ad finem Libri, expenduntur genita corpora poſito reuolutionem earumdem figura-

rum

rum non amplius fieri circa axem, ſed circa equidiſtantem ax rectam lineam ſiue illa tangat figuram, vel ſit intra, vel extra; & hinc vberrimam ſolidorum meſſem colligere licet. Namque circulus gignit ſpheram, ellipſis ſpheroidem oblongum, & prolatum, eorum portiones planis reſecta faciunt ipſorummet ſegmenta. Quod ſi ſit reuolutio circa tangentem circulus facit anulum ſtrictum circularem, & ellipſis ellipticum. At circa non tangentem, & extra figuram, circulus producit anulum latum, & ellipſis ellipticum. Hunc Keplerus an[illegible]um arduum appellat, veluti ſerto ruſticarum puellarum ſimilem. Denique ſuppoſita reuolutione circa parallelam axi intra figuram, portio maior circuli efficit Malum roſeum, & ellipſis, Malum cotoneum; portio minor circuli, Malum citrium, & ellipſis, Oliuam. Sic ex reuolutione ellipſis circa tangentem ſed non in terminis coniugatorum axium, fit anulus ſtrictus ellipticus altera parte latior; & circa illi parallelam extra figuram oritur anulus latus ellipticus altera parte ſtrictior, ſimilis Tiaræ, ſeu globo Turcico. Verum vltra hac ſolida rotunda pateſit quoque infinitorum ſolidorum ſimilarium menſura, quæ ab eiſdem figuris genitricibus dictorum corporum rotundorum pariter generantur.

In Quarto Libro ſtatim in Propoſ. Prima exhibetur quadratura parabolæ, deinde portionum eiuſdem per æquidiſtantes axi, vel diametro ipſius conſtitutarum, vſque ad Propoſit. 20: In reliquis verò, ſuppoſita reuolutione parabolæ tã circa axem, quam circa aliam quamcunque axi parallelam, emergunt nedum Conoidea parabolica ſed & apices, ſemianuli, ſemibaſes, & alia huiuſmodi ſolida, vt & infinita ſimilaria ab eiſdem genita figuris.

In Libro Quinto denique, ſuppoſitis iiſdem figurarum reuolutionibus patefiunt ſolida rotunda ab hyperbola, eiuſque portionibus, necnon ab oppoſitis & coniugatis ſectionibus genita; hoc eſt Conoidea hyperbolica ſemianuli ſtricti & lati hyperbolici (quos, vt & parabolicos idẽ Keplerus Crateres vocat) ſemibaſes ac alia huiuſmodi quamplura ſolida rotunda, & ſubinde infinita ſolida ſimilaria, ab eiſdem cum rotundis genita figuris, pariter notificantur. Doctrina verò Libri Sexti ſatis apparet qualis ſit ex num. 39. Exercitat. ant. In tot ergo figuris, quot

Lector

Digitized by Google

Lector hic, & in his duabus Exerc. intelligere potuit, immo & in plurimis alijs, quas intactas præterimus, de Indiuiſibilium vtraque methodo periculum fecimus, nec vnquam in aliquod incidimus, quod vel latum vnguem diſcederet, ſeu ab aliorum inuentis diſcreparet. Quoniam verò non ſatis eſt propoſita euidenti ratione probare, pluribuſque confirmare, niſi ea quoq; dubia è medio tollantur, quæ in oppoſitum allata, Lectoris animum pulſare poſſunt, propterea huic muneri obeundo ſequentem Exercitationem deſtinamus.

Aduerte autem in ſuperioribus Lemmatibus etſi pro aliquibus veritatibus aliquando citetur Liber Septimus Geo. Ind. attamen pleraſque in præmiſſis Notis pariter haberi poſſe, vt ſtudioſo facilè innoteſcet.

EXER-

Digitized by Google

EXERCITATIO TERTIA.

In qua diſcutiuntur ea, quę à Paulo Guldino è Societate Ieſu in eiuſdem Centrobaryca. præfatæ Geometriæ Indiuiſibilium obijciuntur.

DVm eas omnes, quas in hucuſq; declaratam Indiuiſibilium Doctrinam difficultates euulgarat Guldinus mente obuoluebam, ac pleniori rationum volumine, quæ reſponſionis loco afferri poſſe videbantur retexere aggrediebar, quinimmo & iam ipſius Operis aliquot folia prælo comiſiſſem, repentè mihi cum fama, tum litteris amicorum nunciatum eſt ipſum de Geometria quidem benemeritum fato conceſſiße. Indolui vehementer cum ob publicum Reipublicæ litterariæ damnum, tum ob mihi præreptam laboris pęnè confecti materiam, quam viuenti conſueueram. Mors enim ipſa ingrato me ſilentio damnans multa vetuit prodere, quæ dißerendi campus opportunior, ſi vixiſſet, aperuerat. Verumtamen & eadem alio, nec leuiore me mactauit incommodo; hinc enim factum eſt vt cum à pluribus diſtractus

curis, tum vt alter Oedipus pedibus læſis, ac podagra clauatis ad huiuſce Sphingis ęnigmata diſſoluenda animum negligentius intendens, tardius quam mihi propoſueram hanc reſponſionem attulerim. Iam verò, Lector erudite, erit mihi plenius factum ſatis, ſi in eodem nulli me vel odio, vel fuco obnoxium credideris. Veritatis augmento enixè ſtudere nemo non debet, qui inter veros Mathematicos, quorum certiſſimę requiruntur ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ, *recenſeri hauet. Quamuis autem nihil ferè à Guldino in oppoſitum allatum ſit, quod ipſe mihimet prius nō obiecerim in Pręfatione Libri Septimi Geometrię Indiuiſibilium, eaq; ſoluerim ratione, quam ęquanimiter iudicanti ſatisfacere poſſe videbatur: quinimmò ipſemet quodamodo in ancipiti poſitus (cum neq; accuratè, neq; totam Indiuiſibilium Geometriam, ſed tantum exiguam illius partem ſe vidiſſe non ſemel fateatur) nihil dixerit ſe contra eandem diffinitiuè proferre; quin & amplius propter rationes in contrarium à ſe productas minime reſpuendam cenſuerit Libro Secundo ipſius Centrobarycę, Pagina tertia; attamen ne pręſtantis huiuſce Geometrę auctoritate circa hæc Indiuiſibilia aliqualiter dubitantis, ſi quid ab ijſdem vtilitatis in Litterariam Rempublicam emanare poteſt, illud tenebris obrutum delitescat, excuſſo diuturniore veterno, hęc rationes adglomeraui, quibus ad omnia illius obiecta ratus ſum abundè factum iri ſatis. Id tamen à me velim exciptas ſaluo nomine pręclari huiuſce Viri, cuius induſtria non ſolum in inuentis iam ab alijs tantum illuſtrandis, quibus plerumque vulgaris quædam gloria comparatur, ſed & in nouis detegendis, ęternum etiam poſt fata viuet. Sed te poſtremum velim, Lector beneuole, in hoc præloquio*

mo-

Digitized by Google

monitum, ne operoſiùs ageres in exquirendis eius Centrobaryçę obiectionibus, huc fideli calamo me ex eadem traducenda curaſſe quæcumq; ipſe protulit contra huiuſmodi Indiuiſibilia. Hæc autem, vt ordine quodam expenderentur, libuit in Sectiones XLII. diſtribuere, quæ per Capita in ſequenti Exercitatione digeſta ſingillatim examinantur, vt ea commodius ad libitum poſſis intueri. Vale Lector, & æqui conſule.

CAPVT I.

In quo fit examen eorum, quæ afferuntur à Guldino in Sectione prima, ac ſecunda.

CVm ipſe Guldinus in ſua Centrobaryca intactam Geometriam Indiuiſibilium prętereijſſet, in tribus poſtea ſubſequentibus Libris quędam ſparſim attulit,& quaſi per tranſennā inſpiciens obiecit,aliqua verò ex profeſſo,ac dedita opera expoſuit,vt in Libro quarto Cap. quinto,quę omnia maiori qua fieri poterit breuitate, iuxta ordinem dictarum Sectionum ſeruato proceſſu, nuncexaminabuntur. In Pręfatione ergo Libri Secundi cum Vſum Centri grauitatis, quem vocat *Compoſitionē, & Reſolutionem Poteſtatum rotundarum* explicaſſet, atq; in Keplerum, tanquam in abſurdè locutum parumper inuehiſſet, pręfatam Geometriam Ind. ſic aggreſſus eſt Pag. tertia.

Sectio I. *Immò cum huic ipſi Libro Secundo publicis typis exſcribendo manum ſupremam impoſuiſſem, Tertiumque ipſum ad vmbilicum deduxiſſem inſpexi per tranſennam veluti (obire enim ſingula penitus, vires, quas graui tum languore collapſas erigere cœperam, extra domum liberiore ſub Cælo vetabant) Geometriam Promotam Bonauenturæ Caualerij Ordinis Ieſuatorum Geometræ Inſignis, à Galileo (quem eodem tempore licuit videre) in ſuis Dialogis de motu locali, &c. laudati, cui palmariam olim famam inter excellentes Æui no-*

ſtri Mathematicos pollicebatur. Et vt verum fatear, quem Galileus mihi ex facie, & indole notus laudauit, nunquam mordaciori Iudicio diſtringendum cenſui; qui ſi tot habuiſſet laudis fautores, quot habuit obtrectatores, per ipſum floridior, auguſtiorque ſtaret honos diſciplinarum mathematicarum.

Ex his ergo verbis tibi, ò Lector, palam fit quęnam fuerit illi occaſio dictam Geometriã inſpiciendi; qui & inſimul quid de laudibus à Galileo ex ſui tantum humanitate in me collatis ſentiendum ſit apertè fatetur. Id verò poſtrema huiuſce Sectionis verba ſatis declarant, de quibus tibi iudicium relinquens, ad ſecundam Sectionem accedo, quę talis eſt in eadem Pagina Tertia.

Sectio II. *Reperi autẽ in his libris Geometria promota Auctorem anſam arripuiſſe ex Keplero, vt ſuam non tam inueniret, quam ab vmbris in lucem publicam vindicaret methodum Indiuiſibilium; qua tamen methodus quomodo purioris Geometriæ ſtudioſis probetur non edicam; eam tamen propter rationes hic minimè importuno ſilentio ſupprimendas reſpuendam non cenſeo. Galileus profectò in eodem Dialogo de motu locali diſputans de Infinito, de proprietatibus finitorum, quas infinitis applicare minimè liceat contra ipſum concludit.*

In hac ergo Sectione primò dicitur me huiuſce Methodi Ind. inueniendę anſam arripuiſſe ex Keplero. Secundò ſententiam ſuſpendit an purioris Geometrię ſtudioſis probetur, licet eam reſpuendam non cenſeat. Tertiò vero citat contra me Galileum in prefatis Dialogis.

Quoad primũ ergo videtur hic Auctor amplius declarare ſe Libros dictę Geometrię accuratè legere nõ potuiſſe, vt ipſe fatetur in Indice rerũ pręcipuarũ Tomi Secundi, ſi enim eos qua congruebat diligentia examinaſſet, tunc quoq; potuiſſet animaduertere quã diuerſa ſint vtriuſq; methodi fundaméta. Keplerus enim ex minutiſsimis corporibus quodammodo maiora cõponit, iiſq; vtitur tanq̃ concurrẽtibus, quẽadmodum & ipſe Guldinus aſſerit in ſubſequenti Sectione Tertia, vbi ipſe tantum dico plana eſſe vt aggregata omniũ linearũ ęquidiſtantiũ, & corpora, vt aggregata omniũ planorũ pariter ęquidiſtantiũ, veluti in Exercit. 1. n. 7. 8. 9. explicabatur. Hęc autẽ nemo non videt quam ſint inter ſe diuerſa.

De

De eo, quod ſecundo loco dicitur amplius loquendi offertur occaſio in multis, quę inferius attingentur.

Quoad tertium deniq́; etſi in mathematica Schola lege vetitum ſit iurare in verba Magiſtri, ita vt illius alumni puram, ac ſinceram veritatem reſpicientes, ingenuè iactare ſoleant. *Amicus Plato, ſed magis amica veritas.* Quapropter nec ipſe tenear quaſcunq́; Galileus in ſuis Dialogis de motu locali protulit concluſiones (quarum non paucas ſolummodò tanquam probabiles Lectori proponere intendit) mordicus tueri. Attamen ne debita erga tantum Pręceptorem per me videatur intermiſſa reuerentia, ęquo Lectori conſiderandum propono Galileum loco ſupracitato hęc duo ſuſtinere: Nempe continuum ex Indiuiſibilibus componi, & ſubinde lineam ex punctis, iiſq́; numero infinitis; lineamq́; dari altera maiorem, vt dictum Dialogum perluſtranti manifeſtum erit. Concedit ergo aliquam infinitorum congeriem altera maiorem eſſe poſſe, quod non aduerſatur, ſed fauet poſitioni meę. Ne ergo admittatur hic in eodem Galileo expreſſa contradictio, fortè non incongruè dici poteſt in eo loco, in quo ait proprietates finitorum non eſſe infinitis applicabiles, in alio ſenſu de infinito locutum fuiſſe, vt potè hęc de infinito ſimpliciter, vel in ratione totius, vt dicunt philoſophi, ſubintellexiſſe, cum ei nihil addi poſſit; vbi infinitis linearum punctis, quamuis infinitis (cum non ſint infinita ſimpliciter) poteſt tamen iugiter fieri additio, vt per ſe patet.

CAPVT II.

De iis, quę diſcutiuntur circa Sectionem tertiam.

TRanſeamus nunc ad Sectionem tertiam, quę ſic ſe habet in eadem Pręfatione Pag. 4.

Sectio III. *Hic ergo Caualerius ſecutus tam Bartholomæum Soverum, qui Libro quinto de Curui, ac Recti proportione promota, parallelarum, ac figurarum analogarum virtutes, ac proprietates tradit, quam Keplerū, qui per infinita plana & corpora minutiſſima maiora componit (ſi quidem componit) vt videbimus Lib. 4. cap. 4. putabat ſe ſenſum attigiſſe Archimedis*

*dis, quo ille ſua facilè quidem proponat, demonſtret autem, &
ſpinosè, & laborioſiſſimè per nouam iſtam reſolutionem, & com-
poſitionem facillimo modo demonſtrare ſe, ipſo etiam Archime-
de conſentiente indicat. Sed hoc refellit Alexander Anderſo-
nius Scotus, vt in loco patebit. Hos igitur Caualerius non ſo-
lum imitari, ſed & ea, quæ ipſi in paucis dumtaxat, & ſigil-
latim tantum perſecuti ſunt, ipſe generatim in pluribus, immò
in infinitis, & vniuersè demonſtrare conatus eſt. Plana autem
illa Kepleriana cum in punctum omnia, & corpora in axem
coirent, minus ad rem facere viſa ſunt Caualerio; vtitur ergo
lineis, & parallelis planis indiuiſibilibus, & infinitis, deque il-
lis concludit id, quod de finitis quæritur.*

Hic vt vides, benigne Lector, niſi Keplerus ſufficiat,
adiungitur & Bartholomęus Souerus, à quò dicta Metho-
dus Ind. deſumpta fuiſſe perhibetur, ex eo quod in Libro
de Curui, ac Recti proportione promota, parallelarum, ac
figurarum analogarū virtutes, ac proprietates tradiderit.
Inculcat autem hic Guldinus iuxta eundem Souerum preſ-
ſius eam, quam appellaui poſteriorem Methodum Ind.
de qua egimus in Exerc. ſecunda; cui nonnihil affine redo-
lere videtur eiuſdem Soueri figurę analogę. Sed vtinam ali-
quid & maioris momenti in publicam vtilitatem ope fun-
damenti prędictorum Auctorum inueniſſem, nec enim eru-
beſcerem hoc publicè teſtari, dequè meis inuentis tam be-
nemeritos palam profiteri. At mihi non opus fuit hos Au-
ctores ſub hoc titulo recenſere (quemadmodum voluiſſet
Guldinus, miraturq́; de Souero me non declaraſſe) à qui-
bus nihil mihi mutuatum eſt, prętérquam pauca aliqua ſo-
lidorum nomina à Keplero, de quibus in prętata Geometria
fit mentio. Sola enim admiratio, qua ſolēt incipere philoſo-
phi philoſophari, & nō Kepleriana, vel Soueriana doctrina,
occaſionē Methodi Indiuiſibiliū inueniēdę, ea ratione, qua
in eiuſdem Prętatione aperitur, mihi ſuppeditauit. Hoc ve-
rò quoad Souerū ſic amplius confirmari poteſt. Cum enim
anno *1629.* degerem Parmę, iamq́; Illuſtriſſimi huius in-
clitę Vrbis Bononiæ Senatores publicum Mathematicum
ea, qua ſolent circūſpecta prudētia deligere ſtatuiſſent, eorū
nomine mihi eiſdem ſeruire in hoc munere cupienti, indictū
eſt

Digitized by Google

eſt vt aliquod ſpecimen Matheſis, quam audierant me profiteri, eiſdem p̃ębetem, quò tali gnomone, ac regula me vel vt idoneum eligerent, vel tamquam ineptum reprobarent. Vt ergo eorundem iuſſis obtemperarem, ijſdem miſi eodem anno 1629. dictę Geometrię 7 Libros, etſi manuſcriptos, attamen abſolutos, ſimul cum meo Speculo Vſtorio, quę paulò poſt in lucem edita ſunt. Ii autem nedum oſtenſi fuere f. r. Octauiano Zambeccario tunc temporis Iuſtitiæ Vexillifero, ſed & eius ſucceſſori Achilli Voltę, alijſq; Illuſtriſſimis Senatoribus, qui vt varia eruditione referti, non parum quoque Mathematicis Studijs delectabantur. Eos quoq; viderunt Excellentiſſimi Viri Matheſeos Profeſſores Ouidius Montalbanus, Carolus Antonius Manzinius, vt & Cęſar Marſilius, & Antonius Maria Bonaionius. Quinimmo & P. Bettinus è Societate Ieſu, pręcęteris eiuſdem lucubrationibus Apiarijs illuſtris, Alphonſus de Isè, Io. Baptiſta Parmeggianinus Archipręsbiter Carpaneti in Agro Placentino, & alij quāplures (quorū non pauci adhuc ſuperſtites extāt) Parmę ante annum 1629. eoſdem abſolutos non ſemel perſpexerunt. Cum tamen Souerus nonniſi anno 1630. publicis typis apparuerit. Quì ergo fieri potuit vt eum ſecutus fuerim, qui non dum proceſſerat ad lucem?

Sed eſto quod Guldini rationes efficaciter conuincant me ex Keplero, ac Souero Methodum Indiuiſibilium inueniſſe, propter aliquam conuenientiam, quam mei infinita Indiuiſibilia cum minutiſſimis, & infinitis corporibus Keplerianis habere videntur, nec non figurę analogę etſi generaliſſimę cum ſpecialiſſimis à Souero conſideratis. Pari ergo ratione vbicumq; inter duorum Auctorum principia appareat aliqua ſimilitudo, affinitas, ſeu conuenientia, tunc euidenter cōcludere poterimus eum qui poſterius ſcripſit ex priori deſumpſiſſe principia. Qualem ergo ſuſpicionem ſubiret ipſe Guldinus, cuius principia, ſeu Regula generalis, quam affert pag. 147. & in qua tota illius Centrobaryca fundatur, adeò principijs Kepleri in Stereometria Doliorum adhibitis aſſimilantur, vt quod ipſe ſpecialiter ibi tradidit, tantum vniuerſaliter appareat extendiſſe Guldinum; quod hęc loca eiuſdem Kepleri conſideranti manife-

ſtum

ſtum fiet. Is enim in dicta Stereometria Theor. 18. ſic inquit. *Omnis annulus ſectionis circularis, vel elliptica eſt aqualis cylindro, cuius altitudo aquat longitudinem circumferentia, quam centrum figura circunducta deſcripſit, baſis verò eadem eſt cum ſectione annuli.* Guldinus verò pag. 147. afferens dictam regulam generalem ait. *Quantitas Rotanda*, hoc eſt circulus, vel ellipſis in Theoremate Kepleri *in viam rotationis ducta*, nempè in peripheriam deſcriptã à centro, quod eſt tam figurę, quam grauitatis, *producit poteſtatem rotundam vno gradu altiorem poteſtate, ſiue quantitate rotata*, ſcilicet producit annulum ſtrictum, vel latum. Videat ergo Lector quam hęc ſint ſimilia, & quã facilè iuxta normã ab eo traditã dijudicari poſſet ipſum ex Keplero talem Regulã ſibi conſtruxiſſe. Hoc verò amplius confirmaretur ex eo ꝙ nedũ regula, ſed & ratio, quã affert eiuſdẽ regulę, qualiſcũq; ſit, ſimillima eſt Keplerianę. Etenim idẽ Keplerus vt demonſtret prędictũ Theor. 18. ibidẽ ſic procedit. *Annulo enim inquit (in ſchemate* 11.*) GCD. ſed integro, ex centro ſpatij, A ſecto in orbiculos infinitos, ED, eoq; minimos quilibet eorũ tanto erit tenuuior verſus centrum, A quanto pars eius, vt, E, fuerit propior centro, A, quam eſt, E, & recta per, F, ipſi, ED, perpendicularis in plano ſecante, tantò etiam craſſior verſus exteriora, D, extremis verò dictis ſcilicet, D, S, ſimul ſumptis duplum ſumitur eius craſſitiei, qua eſt in orbiculorum medio. Hac ratio locum non haberet ſi orbiculorum, E, D partes cis & vltra circonferentiam, FG, lineaſq; per, FG, perpendiculares, non aquales, aqualiterq; ſita eſſent.* Eadem extendit in Cor. 1. ad alias quoq; figuras eiuſdem conditionis, & ſimilia repetit ad Theor. 19. inquiens. *Nam ſecatur tale ſtrictum ex, A in orbiculos qui in, A, habent craſſitiem nullam in, D, duplam ipſius craſſitiei in, F, ſicut circulus per, D, duplus eſt ad circulum per, F.* Perpendantur nunc verba Guldini poſita pag. 146. quam cum prędictis concordent, Ait enim. *Partes autem rotanda quãtitatis quò longius diſtant à centro ſeu axe rotationis, eò plus etiam quantitatis, ſeu poteſtatis deſcribunt, cum maiorem faciant circuitum; & contra quò magis partes ad axem rotationis accedunt, hoc minorem faciunt ambitum, minuſq; quantitatis efficiunt. Inuenire ergo oportet aliquod medium,*

dium, ita ut partes hinc indè, hoc eſt extrorſum, & introrſum, ſiuè vltra, & cis deſcripta aliquo modo æquentur. Hoc ergo medium paulò poſt ait eſſe centrum grauitatis, hęc ſubiungens. *Partes enim illæ citra, vel intra circumferentiam, quam centrum grauitatis deſcribit, in quantum ab æqualitate deficiunt, in tantum preciſè abundant illæ vltra, ſiue extra illam circumferentiam deſcriptæ; & ſic per compenſationem exactè peruenitur ad æqualitatem.* Ego tamen Guldino talia vnquam non obieciſſem, neq; enim inuentoris laudem omninò tollere putandum eſt, quod ipſius inuenti rude aliquod exemplar artifex pręcognouerit. Quinimmo ea videtur eſſe infirmę hominum mentis conditio, vt niſi aliquo extrinſecus pręmonente excitentur, egrè quidquam eggregij inuenire poſſint. Quapropter mirandum non eſt (vt innumera, quę afferri poſſent exempla prętermittam) ſi Poetę quos vel finxere Deos, non aliter inuentarum ab ipſis rerum gloriam aſſecutos fuiſſe fabulantur. Vt Hercules cum purpureum colorem ex Cane Purpuram è mare eiectam in littore vorantem didiciſſet. Velut Mercurius viſa Teſtudine, cuius longa vetuſtate exſiccati nerui percutientibus digitis, non inamęnum reddebant ſonum, lyrã adinuenit. Seu Pan ex calamis à vento agitatis, ſonumq; facientibus fiſtulam Paſtoribus compegit. Quacumq; enim ratione vtile aliquid humanę Reipublicę alicuius opera reuocetur ad lucem, id non ſine congrua inuentoris laude hominibus excipiẽdum eſſe reor.

CAPVT III.

In quo Sectio quarta, & quinta examinatur.

IN Sectione quarta, & in eadem Pag. 4. hæc ſubdit Guldinus.

Sectio IV. *Verum circà hanc rem graui litigio doctiſſimorum virorum animi iure meritò diuidi poſſunt; nec ſatis video, quis tot diſsidia tamquè diuerſa, aut Æacus, aut Minos componat. Agnouit Caualerius ſolidorum rotundorum, quemadmodum & Keplerus, geneſim fieri ex rotatione planorum cir-*

cà axem, ſed quomodo ex hoc principio reliqua quæ intendebat purè geometricè deduceret, hoc illi non uenit in mentem, licet rem ipſam iam auſpicaretur, centrum uidelicet grauitatis. Sed præſtat illum ipſum Caualerium audire in ſuos ſeptem Libros ſic præfantem.

De hoc litigio dicetur inferius, vbi an mea geometricè oſtenderim pariter diſcutietur. Quod verò hanc viam Centri grauitatis non fuerim proſecutus, mirandum non eſt, Naturę enim ordini magis conforme exiſtimaui priùs figurarum dimenſionem, poſteriùs verò earundem Centrum grauitatis inueſtigare. Prius enim figura intelligitur extenſa quam grauis: vnde præpoſtero ordine videtur fieri proceſſus à Centro grauitatis ad figuræ ſolidæ dimenſionem, vt facit Guldinus. Licet ſi ſpectemus ordinem doctrinæ id nihil officiat. His autem ſubdit in Sect. 5. huiuſmodi verba ibidem Pag. 7.

Sectio V. *Videt ergo Lector Argo licet minus oculeus, illum non attendiſſe ad medium illud, cuius ipſe meminit Centrum grauitatis, id, quod ut nemo Geometrarum inficiabitur, puritati Geometriæ non ſolum nihil derogat ſed & auget illam, & illuſtrat, ſic Indiuiſibilia illa ea ratione ſumpta, & pleriſque Philoſophis, & Mathematicis omnibus aduerſantur. Rotationem ipſe etiam admittit, ſed maluit cum Archimede integras, quam cum Euclide, & alijs ſemifiguras circumducere; ex quo fieri potuit, ut potius de Centris illarum, quam harum cogitationem ſuſciperet. Itaque & præ Kepleri Transformationibus, & præ Caualerij Indiuiſibilibus Centrum grauitatis in Geometricis iam dudum receptum palmam feret, & rectius Stereometriam Archimedis complet, feliciuſque Geometriam promouet, quam vel Kepleri figurarum inconſueta, & quæ ipſa demonſtratione magnoperè indiget, Transformatio, vel Caualerij Indiuiſibilia à Geometris nondum recepta. Centrum grauitatis intra ſyncerioris Geometriæ limites conſiſtit, pedemque figit. Tantum intereſt primis ſtructuris ſolidum ſubſtruere fundamentum, & ſuper immotam baſim attollere, quæ annorum ferre vires, & aliqua laceſſita, inconcuſſa durare poſſent.*

Itaq; ſumma dictorum eſt Keplerianam, Caualerianamque methodum nutare ob fundamenti debilitatem. Dicta

Indi-

Indiuiſibilia à Geometris nondum eſſe recepta, immò pleriſque Philoſophis, & omnibus Mathematicis aduerſari. Centrum grauitatis firmiter hærere, per ipſumque rectius, quam per eorum methodum Stereometriam Archimedeã compleri, Geometriam fęlicius promoueri, præ eorumque inuentis illud palmam ferre. Cui quidem Elogio libentius & ipſe ſubſcriberem, veluti inuentam ab eo Regulam plurimi facio, ſi eam aliqua meliori ratione confirmaſſet. Cum enim hoc ſit maximum ſui fundamentum non congruebat ipſum probabilibus tãtum argumentis firmare, quod vt Rethoribus proprium, ita Geometris inſuetum eſt, ſed demonſtratiuis rationibus ſtabiliendum erat. Quod autem hoc verum ſit manifeſtat pag. 146. vbi verſus finem de ſua Regula generali, ſeu max mo fundamento hæc habet, nempè. *Neq; alia demonſtratione res hac indiget, ſed ſufficiet per inductionem hoc ipſum ſi non in ſingulis, in pleriſq; tamen, quas deſcribemus, ac componemus Poteſtatibus oſtendere, aut certè quod noſtra inuenta cum alijs aliorum aliter demonſtratis præcisè conueniant innuere, uel tacitè etiam periti Geometræ iudicio id relinquere.* Quod & repetit Pag. 174. dum dicit. *Neque hoc ſcrupuloſius demonſtrare neceſſe putamus hoc loco, cum & aliundè clariſsimè conſtet Poteſtatem rotundarum quantitatum ex noſtra compoſitione ortum ducentium, cum ea præcisè conuenire, & exactè, quæ vel ab Archimede, vel ab alijs, paucarum licet reſpectu noſtrarum, alio modo & inuenta, & demonſtrata eſt. Quod ipſum ſufficienter arguit veritatem noſtrarum inuentionum vniuerſalem, & nos hac vltrò, tamquam opus ſupererogationis, annectere voluimus.* At benigne Lector, ſi ratio à concordantia petita cum aliorum Auctorum concluſionibus aliter oſtenſis, ſufficit ad principij ſtabilitatem, ac veritatem indicandam, iuxta Guldinum: cur eadem concordantia, quę cernitur in Geometria Ind. iuxta eũdem ſufficienter non arguet huiuſce Methodi veritatem? Cur neglectis tot Philoſophorum ambagibus, tot litigijs, ab ijs ad Mathematicum tribunal eidem appellanti pro ſui fundamenti veritate ipſam Matheſim laturam eſſe ſententiam haud ſperare licebit. In eo autem quod ſpectat ad Philoſophos, & Mathematicos, quibus hęc Indiui-

Digitized by Google

ſibilia aduerſari pronuntiauit Guldinus, ſpero eosdem ęquius de his fore dijudicaturos, cum accuratius, quam ipſe fecit, horum Indiuiſibilium Methodum inſpexerint, ac examinarint. Cumq; plures haud quidem gregarios Mathematicos horum Indiuiſibilium cultores, ac fautores, in medium afferre poſſem, hos nunc ſilentio prętereundos eſſe duxi, vt, ſponte patefactis eorumdem Reipublicę literariæ per hęc Indiuiſibilia inuentis, illuſtriora appareant ipſorum teſtimonia.

CAPVT. IV.

Diſſeritur circa Sectionem 6. 7. 8. & 9.

PRęfatis tamquam pręludij loco à Guldino pręmiſſis accedit nunc ad dictę Geometrię doctrinam preſſius expendendam, in eadem Pręfatione Pag. 8. primòq; aggreditur primam Libri Primi Propoſitionem, eamq; non fuiſſe rectè abſolutā his probare contendit in Sectione Sexta, quę talis eſt.

Sectio VI. *Antequam autem à Caualerio diſcedamus, licet ingenium, conatuſque ipſius meritò iudicem æternæ famæ praconium mereri, neque tamen integrum mihi ſit inſpicere, multò minus diligenti lectione veſtigare, atque excutere ipſius ſeptem librorum propoſitiones; vnam tamen in homine ad Mathematica, vt mihi videtur nato à natura quoque ficto facto, lectoris animum dimouere poſſe iudicaui, & eſt Prima totius Operis, ac proinde Primi libri Propoſitio, quæ ſtatim in veſtibulo Operis ſibi ipſimet tamquam Geometra iniuriam facit, & quaſi Ageometra eſſet, Problema hoc ſoluit: Cuiuſuis figuræ planæ, aut ſolidæ, quæ linea recta, aut plano pro baſi vtatur, reſpectu huius verticem inuenire.*

Adnotet hic Lector Guldinum denuò fateri ſe non potuiſſe diligenter inſpicere, & excutere meas 7. Librorum Propoſitiones. Reprehendit autem me vt errantem in dicta prima Propr. tali ratione in Sectione Septima inquit tiem ibidem.

Sec. VII. *Rectè quidem proponit, licet non verbo ſed ſchemate*

mate ſaltem indicet figuram illam flexuoſa linea eſſe contentam baſe excepta.

Ad quod dico non opus fuiſſe verbo exprimere, quod per ſe patebat; neq; enim illa linea recta eſſe poterat, cum deberet cum baſi, quę recta ſupponitur, ſpatium comprehendere, vnde neceſſe erat flexuoſam eſſe. His in Sectione 8. hęc in eadem Pagina ſuperaddit.

Sectio. VIII. *Eſto ſanè figura illa plana, Parabola, ſolida autem Conois, iubet ipsè ut Problema conficiatur aſſumere quoduis extra baſem punctum, per quod ipſi baſi agatur recta, ſiuè planum parallelum; hoc planum ſiuè recta ait, tangit figuram propoſitam, vel non: ſi tangit punctum contactus (ſupponit enim vnicum tantum contactus punctum eſſe) erit vertex quæſitus, & habemus quod volumus*.

Aduertat autem hic Lector me non ita ſuppoſuiſſe vnicum punctum contactus, vt velim lineam, vel planum tangens in pluribus vno punctis tangere non poſſe. Sed vnicum aſſumpſi, quia quod de vno dicitur, de reliquis quoq; ſubauditur. Deinde ſic proſequitur ibidem in Sectione 9.

Sectio VIIII. *Sed ò Geometra cuius ad iudicis vrnam lis hæc perorabitur? oculoſne arbitros eſſe manis, quam ab intellectu totam cauſam cognoſci? Si non tangit, proſequitur, linea ducta, vel planum ſiue ſit intrà, ſiuè extrà figuram, ad partem illam figuræ, quam tangere poſſit, paralleliter baſi moueatur tandiù uſquè dum tangat figuram, & rurſus punctum contactus oſtendet verticem, ſed rurſus quæro quo indicio cognoſcere queam, quando, & vbi figura tangatur? Non hac ratione, aut methodo docuit Euclides tangentem circulum ducere; non hoc modo Appolonius magnus ille Geometra Sectiones Conicas tangit. Corollarium uerò huius Propoſitionis longius adhuc à uera Geometria recedit, quæ per ſimilia nequaquam Promota ſed Remota dici poterit. Iurè meritò ergò hac Propoſitio moroſis necdũ depulſis omninò morbi faſtidijs, conflictanti mihi librum è manibus excuſſit; quẽ tamen ſi auſpice Numine priùs uigor membris redierit, auidius uerſabo, & quid ſentiam palam edicam.*

Vt tanto igitur Guldini dubio ſatisfaciam, & ad huiuſmodi maculam ſi qua eſt eluendam, noto primò ex dictæ Propoſitionis demonſtratione certiſsimè concludi, poſsibile

le eſſe ducere lineam, vel planum tangens quamcunque oblatam figuram. Si enim dicta linea, vel planum in preſuppoſito ibi motu continuè parallelo, nunc extrà, nunc intrà figuram reperitur, profectò aliquando ipſam tangere neceſſe eſt. Nec ipſe Guldinus hanc poſsibilitatem inficiatur, vt patet ex illius dictis Pag. 348. num. 4.

Noto ſecundò hanc poſsibilitatem toti meæ Geometriæ Ind. ſufficere, vt illius Propoſitiones perluſtranti, vbi de vertice, vel contactu figuræ fit mentio manifeſtum erit. In his autem, ſi geometricam ſcrupuloſitatem attendere velimus, quotieſcunq; vſurpatur terminus ducendi tangentes, ſeu vertices inueniendi pro eo tantum poſſibilitatem ſubaudire debemus. Hoc eſt perinde ac ſi diceretur, intelligantur ductę tangentes, vel inuenti vertices, &c. taleſque eſſe ſupponantur. Quemadmodum & Archimedes Libro de Spiralibus etſi neſciat quomodo ducenda ſit tangens Spiralem in illius termino, ſupponit tamen illam tamquam ductam, & per hanc hypotheſim rectè ibi propoſitum concludit. Vnde hæc propoſitio quamuis in modum Problematis propoſita nihil tamen obeſt dictę Geometriæ veritati, illi enim & tãquam Theorema propoſita ſatisfacere potuiſset.

Tertiò, & vltimò concludo fuiſse opus ſupererogationis ipſam proponere tamquam Problema, vt illud ea ratione abſoluerem, qua poterat abſolui, ſiue ſit abſolutio geometrica, ſiue non. Quemadmodum enim ſi quis peteret vt propoſita quæcunq; linea, ſeu magnitudo geometricè menſuraretur per aliquam regulam generalem, fortè impoſsibile poſtularet, niſi ad ſpecies linearum, ſeu magnitudinum deſcenderet: ita in hoc Problemate niſi deſcendamus ad ſpecies figurarum impoſsibile erit ſolutionem propriè geometricam afferre. Hoc autem non negat ipſe Guldinus, cum loco ſupracitato aſserat hanc ſolutionem geometricam haberi non poſse niſi de ijs, *de quorum ortu, ac geneſi conſtat*, cuiuſmodi ſunt circulus, ac Sectiones Conicæ, in quibus Euclides, & Archimedes geometricè lineas tangentes ducere potuerunt. Non ergo carpere me debuit, quod rem non præſtiterim etiam illius dicto impoſsibilem, ſed potius excuſare, quod illud ea ratione abſoluere tentarim, quo

ſol-

ſolubile erat, & oculo, ac manu, necnonquocumq; alio ad hoc conferre poſſet; in ſubſidium accito in modum Problematis propoſuerim.

CAPVT V.

In quo proceditur à Sectione 10. uſq; ad 15.

CVm Auctor Centrobarycę Pag.207. dixiſſet Globi Geometriam nondum eſſe perfectam, aut ſcopum deſideratum attigiſſe, plurimaq; adhuc inuenienda ſupereſſe, innuit menſuram triangulorum ſphęricorum, quam tradidi in meo Directorio Pag.3.cap.8. ſic in Sectione 10. ibidem loquutus.

Sectio X. *Egregiè profectò incepit & deſideratas partes complere, & ſcientiam ipſam excolere, & tam rem præſtitit, quam multis annis in notis habui Bonauentura Cavalerius ſuperiori libro à nobis productus; Aream nimirum inuenire, ac capacitatem triangulorum quorumuis Sphæricorum, datis magnitudinibus angulorum ſiuè ſeorſim, siuè ſimul ſumptorum. Et licet deſerente nos adhuc Circuli quadratura, area illa abſolute dari nequeat, eius tamen proportionem ad integram Globi ſuperficiem clariſſimè demõſtrat. In Opere enim illo quod Directorium Generale Vranometricum inſcribit, Parte Tertia, Capite octauo, hanc tradit Propoſitionem. Superficies ſphæræ ad ſuperficiem cuiuſcunque Trianguli ſphærici in eadem deſcripti, eandem habet rationem, quam quatuor recti ad dimidium exceſſus ſummæ angulorum eiuſdem triãguli ſuper duos rectos. Pulcherrimum ſanè & vtiliſſimum Inuentum, Cavalerioque dignum, à quo iurè meritò expectandum ſit quidquid adhuc in Geometria hac Rotũdi, ſiuè Globi deſideratur. Ex hac autem Propoſitione tamquam Corollaria deducit proportionem primo totius Sphæræ ad Pyramidem Triangulatam, cuius vertex centrum ſphæræ, baſis vero triangulum in ſphærica ſuperficie occupat. Secundo proportionem triangulorum ad inuicem. Deindè ſeptem Problematibus docet transformationem trianguli ſphærici propoſiti in ſuperficiem integram alterius ſphæræ; in ſuperficiem ſectoris eiuſdem Sphæræ; in Zonam Polarem, &*

in

in non Polarem, Zonam in ſuperficiem ſectoris; Pyramidis ſupradicta in aliam Sphærã; & tandẽ, quod mireris ipſius Trianguli ſpharici Quadraturam. Siquidem quod ſuprà monuimus Quadraturam Circuli ſuppoſueris. Macte animo Caualeri, & ab illis infinitis Indiuiſibilibus, ad finita diuiſibilia ſtylũ cõuerte. Tibi debetur hoc Geometria Rotundi ſupplementum, qui attuliſti à me diù deſideratum complementum.

Circa hęc nil mihi dicendum occurrit, niſi quod propter hoc tenue inuentum tot in me collatis laudibus, cauendum illi erat ne in Galilei errorem laberetur, quem prius indicauerat pag. 3. Libri Secundi; cuius tamen humanitati fateor me plurimum debere. Poſt hęc autem cum pag. 325. rationem demonſtrandi Keplerianam redarguiſſet, camq; dixiſſet non eſſe omninò ſpernendam, huius deinde reddit rationem, ſubdens hęc verba in Sect. 11.

Sectio XI. *Hinc enim anſam arripuit, & occaſionem Bonauentura Caualerius ſuam Methodum Indiuiſibilium, qua Geometriam promotam eſſe indicat, producendi, vt ipſemet innuit in Præfatione illius libri, de quo nos fuſius in Præfatione ad librum ſecundum Centrobarycorum noſtrorum, &c.*

De hoc ſuperius ſatis dictum eſt. Quod autem innuo in Pręfatione meę Geometrię non eſt me anſam, & occaſionem arripuiſſe ex Keplero meam Methodum inueniendi, ſed tantum de ea iam inuenta periculum faciendi in ijs ſolidis, quę à Keplero in ſua Stereometria fuerant promulgata.

In eadem pag. 325. examinat Auctor Theorema Tertium Kepleri in dicta Stereometria, in quo nititur probare cylindrum ad paralleleppipedum columnare rectangulum ęquealtum, quod cylindri corpus ſtringit quadratis ſuis baſibus, & parallelis lateribus, rationem eandem habere, quam circulus ad circumſcriptum illi quadratum, hoc eſt proximè quam 11. ad 14. Dicit enim hoc idcircò eſse quia præfata ſolida ſunt veluti quædam plana corporata, vnde accidunt illis eadem, quæ planis. His ergo ſequentia verba ibidem Guldinus ſuperaddit in Sectione 12.

Sectio XII. *Quod uerò ſubiungit Cylindrũ, & columnam eſſe veluti quadam plana corporata, quamuis autem nimis breuiter dictum ſit hoc pro viris Archimedeis, & Euclideis, hinc*

tamen

Digitized by Google

tamen Caualerius poſt plures ſpeculationes, & cum paulò profundius rem contemplatus eſſet, in hanc tandem deuenit ſententiam, nempè ad rem ſuam lineas, & plana, non ad inuicem coincidentia, vt facit Keplerus Prop.2. ſed æquidiſtantia aſſumenda eſſe, quemadmodum hic, vbi per plana parallela baſi progreditur Keplerus.

Hic denuò arguit Guldinus me deſumpſiſse ex Keplero meam Methodum Ind. per plana corporata interpretãs plana baſi parallela. Sed quam longè abſint hæc ab ijs, quæ in mea Geometria traduntur, agnoſcent illi, qui eam ſedulò perlegerint. Etſi enim iam inuenta Methodo illi adaptari poſsit quidquid videtur cum eadem aliquid affinitatis habere: prius tamen in tenebris latitabat, quam ſi Keplerus animaduertiſſet, & eam clarius indicaſſet, ac eadem vſus fuiſſet, quod tamen nullibi apparet. Subdit deinde ibidem in Sect. 13.

Sectio XIII. *Neſcio tamen quid Caualerius dicturus ſit adhoc, quod habet Keplerus Theoremate quarto, quod nos de Cylindro, & Cono demonſtrauimus Capite præcedenti Prop.2. vbi poſtquam demonſtraſſet Columnam Pyramidis æquealtæ, eandemque baſim habentis triplam eſſe: Idem dicit eſſe de Cylindro, & Cono, hæc ſubijciens.*

Poſt hęc autem affert verba Kepleri eiuſdem Theorematis pro Cylindri, & Coni demonſtratione ab eo ordinata, moxque ſubiungit pro me reſponſionem, ſic inquiens.

Reſpondebit fortaſſe illum hic non vti planis infinitis, ſed partibus corporeis, & ſic ſe in ſua permanere ſententia.

Cui reſponſioni & ipſe ſubſcribo, hocq; tantum addo ex hoc Theoremate amplius apparere poſſe dicta plana parallela longè abfuiſſe à mente Kepleri, ad quę ſi reſpexiſſet, multò melius, & vniuerſalius dictum Theorema de Cylindro, & Cono demonſtraſſet, ſicuti illum vniuerſaliſſimè oſtendi Libro Secundo dictę Geometrię Prop.24. & ad Sectionem 1. Corollarij quarti generalis Propoſitionis 34. vt quoq; videre licet in Exercit. prima.

At ſi deniq; concederem Guldino, quod toties inculcat, nẽpè mihi aliquid luminis ex Operibus Kepleri, & Soueri, ad procedendum per hęc Indiuiſibilia parallela ſuppedita-

Digitized by Google

tum fuiſſe (quod tamen omninò negatur) eſt ne hęc ſumma totius artificij huiuſce Methodi? nequaquã. Ea enim ſterilis, & infęcunda quodamodo remanſiſſet, niſi miram eidem fertilitatem attuliſſent admirandę quędam Propoſitiones, eiuſdem peculiarem vſum declarantes. Prę cęteris autem inſignes ſunt Prop. 23. Libri 2. cum ſuis Corollarijs, quę habetur quoq; in eadem Exerc. 1. pag. 46. & de qua diſſeritur ibidem num. 28. & Prop. 33. eiuſdem Libri, quæ inibi poſita eſt pag. 69. & per quam proportiones quæcumq; inter quaslibet figuras ſolidas inuentæ ad infinitas ſolidorum ſpecies extẽduntur. In his ergo, ſtudioſe Lector, vtriuſq; Methodi Indiuiſibilium nucleus concluditur, quę vel nunquam dicti Auctores, vt ex eorum Operibus apparet, ſomniarunt.

Poſt ſupradicta examinat Guldinus Pag. 327. famoſę illius Propoſitionis Archimedeę demonſtrationem Theor. 6. Stereometriæ à Keplero allatã, quę talis eſt. *Conuexũ ſphęricum eſt quadruplum areæ circuli maximi.* dictaq; ratione tamquam analogijs, & veriſimilitudini innixa procul reiecta; refert ſe hanc Propoſitionem, ob ipſius præſtantiam non vno modo tantũ, & ex intrinſecis principijs, ſed tribus oſtenſiuè demonſtraſſe. Deinde hęc proſequitur ibidem in Sec. 14.

Sectio XIV. *Dum hac ipſa ſcripſiſſem in mentem venit, vt viderem qua ratione illam Caualerius demonſtraſſet, & mox relictis omnibus, omnes, & ſingulas pagellas ſeptem librorum Caualerij curſim inſpexi; ſed nihil reperi, neque in Methodo Indiuiſibilium per 6. libros, & neque in ſeptimo ſine illa. Quamuis autem libros illos accuratius perpendere nec animus, nec tempus, nec vires ſuppetant: Ipſum tamen hanc demonſtrationem omiſiſſe miratus ſum, & plurimis ſuis, ac infinitis Indiuiſibilibus, vnicum Indiuiſibile, hoc eſt Centrum grauitatis, tandiù præfero, donec melioribus inſtructus ſententiam mutem.*

Nuſquam ego hiſce Indiuiſibilibus ad curuarum ſuperficierũ menſuram vſus ſum, adhucq; incompertũ mihi eſt an ad eas vſq; pertingere poſſint, vnde egregium Guldini hoc inuentum, quod ad eas pariter inquit ſe extendere, permagni

gni quidem facio, at & pluris facerem, ſi aliquid pro ſuæ Regulę generalis demonſtratione circa rotundas ſuperficies ſupplementum attuliſſet, quo omni circa illius veritatem in ipſis rotundis ſuperficiebus vniuerſis ambiguitate Lectoris mens expoliari poſſet. In hoc enim eiuſdem Centrum grauitatis pręſtare Indiuiſibilibus fatendum eſſet, quemadmodum in alijs quamplurimis illi præſtare Indiuiſibilia, qui eadē ſępius ritè pertractauerit, haud puto inficiabitur.

Affert poſtremo Guldinus pag. 331. in Sec. 15. de Kepleriana, ac mea Methodo huiuſmodi iudicium, inquiens.

Sectio XV. *Sed vt dicam paucis quod ſentiam, vt & iſtā Keplerianam, & Caualerij Methodum (de Caualerij modo hic quicquam deciſum volo, rem in aliud tempus ſi Deus vitam, ac ſanitatem dederit, reſeruans) iudico ad inuentiones Geometricorum Theorematum & Problematum plurimum valere, ità ad demonſtrationes eandem adhibendam eſſe, si alia ſuppetant Geometris iam probata media, nequaquam ſuadeo.*

His ergo Indiuiſibilibus, ceu quibuſdā Canibus venaticis Geometras ſaltem ad inueniendum vti poſſe, ad idq; plurimum valere confitetur. Verum ſi huius doctrinę principia falſa ſunt, vt ipſe Guldinus Pag. 341. ad Prop. 2. probare contendit; quomodo in indaganda veritate, adeò fideliter, ac veraciter, vt experientia docet, ac cum aliorum inuentis concordantia, ſe gerere ſolent? deberet enim per hęc procedens ſtudioſus in paralogiſmos plerūq; deuiare, quod tamen rectè ijs vtenti numquam contingit.

CAPVT VI.

Diſcurritur ſuper Sec. 16. & 17.

CVm in ſuperioribus Sectionibus Auctor Centrobaryce quaſi perfunctoriè circa meam Geometriam verba feciſſet, accedit nunc ex profeſſo ad illius Methodi fundamenta examinanda. Quaproter ad earum difficultatum faſtigium, quæ ipſius pulſarunt animum iam deuentum eſt, quibus vt viam ſterneret, ſic Libro Quarto Cap. 5. Pag. 339. præloquutus eſt in Sec. 16.

Sectio XVI. *Dum ea omnia, quæ hactenus ſcripta ſunt Cenſoribus, pro vt in Societate noſtra moris eſt, tradita eſſent, in quibus inter reliqua, in Præfationibus præſertim libri Secundi, & Tertij, mentionem fecimus Bonauenturæ Caualerij, dato illo breui temporis interuallo, quo ſcripta recognoſcerentur, venit in mentem denuò inſpicere ipſius Geometriam Promotam; non ea quidem accuratione, quam mihi propoſueram poſt editos hos tres de Centro grauitatis libros, vt in Appendice deinde meam ſententiam de illa promerem; ſed obiter tantum conſiderare, ac perpendere. Quod dum facerem, vidi commodè me aptiſſimèq; & poſſe, & debere Libro Quarto quatuor conſtanti Capitibus, Quintum adiungere, quo per paucas aliquas Propoſitiones, & per modum quaſi dubitationis præluderem, viamque ſternerem futuro exactiori examini. Quid autem ſentiamus de Prima Propoſitione Libri Primi Caualerij, eiuſque Corollario, ſatis clarè diximus in Præfatione Libri Secundi Centrobaricæ noſtræ; quæ cum etiam reliqua, quæ in Libro Primo continentur miſſa nũc facimus accuratiori ea, vt diximus, conſiderationi reſeruantes. Gradum ergo ad Secundum Librum facimus, in quo videtur Auctor præcipua iacere velle totius nouæ doctrinæ fundamenta.*

Ex his ergo ſatis intelligi poteſt paulò hæc accuratiori diligentia, quam ſuperiora, ab eo producta fuiſſe. Adhuc enim ſe dubitatiuè loqui, meaq; inuenta exactiori examini ab eo reſeruari hic quoq; proteſtatur. His tamen non obſtãtibus, tranſiens ad Propoſitionem primã in qua, *Pauca quædam à Caualerio Libro ſecundo præmiſſa expenduntur*, tali me cenſura reprehendit, ſic inquiens in Sec.17.

Sectio XVII. *Auctor noſter, qui Nouam ſuam Geometriã Methodum vocat Indiuiſibilium nonnullis viſus eſt Methodum illam non ſatis methodicè propoſuiſſe; immò qui non ſolum imitari conatus ſit Bartholomæum Souerum, ſed & Doctrinam ipſius Lib.5. de proportione curui ad rectum promota, traditam (cuius nomen, quod ipſe miror, in Geometria promota apud Caualerium nõ inuenio) magis vniuerſalem reddere, methodum tamen ipſius claram, & Geometricam non adhibuerit, ſed res ipſas Geometricas obſcuris quibuſdam difficultatibus inuoluerit, quod an verum ſit, nec ne obiter tantum, & perpaucis conſiderare conſtituimus.*

Itaq;

Itaq; in prefatis verbis dicitur nõnullorũ ſenſũ extitiſſe me nec methodicè, nec clarè, nec geometricè proceſſiſſe, Verum ſi prefati viri, nõ accuratius quam Guldinus meam Geometriam inſpexerunt, non miror eoſdem talia proferre. At ſi diligentius eam perluſtrarunt, hos rogo vt quæ hic reſponſionis loco à me afferuntur, pariter aſpicere dignentur. Eos enim non tam acriter ac ipſe retulit de hac Methodo iudicaturos eſſe ſpero.

Quod ſi Guldino, alijſq; ab eo prenominatis, qui forte veluti & ipſe non ea, qua congruebat diligentia, meam Geometriam obuoluerunt, illius dogmata vel non methodicè tradita, vel obſcura viſa ſunt minimè mirandum erit. Si enim eorum, qui Archimedeę doctrinę ſedulò incubuerunt, *nonnulli*, vt idem Guldinus teſtatur Pag. 289. *de hac Archimedis quaſi obſcuritate querelas depoſuerunt, quos inter Keplerus, qui lectionem ipſius vocat ſpinoſam*. Quod & Clauij, & Petri Rami dictis ibidem confirmat: nunquid illis, qui hos abditos Geometriæ receſſus; illiuſq; penitiora, inerti quadam, ac negligenti animi tenſione, hoc eſt non accuratè ſcrutati ſunt, hæc natura ſua obſcuriſſima clara videri potuerunt? Sed hanc maculam verba Dauidis Riualti in Archimedis defenſionem ab eodem allata, ſatis pariter eluere poſſunt, quæ & ab eodem Guldino ibidem afferuntur, ſunt autem huiuſmodi. *Profectò de rebus ſublimibus, & natura ſua abſtruſis, ſeiunctiſque à communi hominum captu non poteſt quiſpiam quicquam præcipere, quod perobſcurum non ſit, ſcilicet ſi ſtatim obuium vno, aut altero uerbo excipiatur. Senſus ad inſolita horrent, imaginatio hebeſcit, intellectus obtunditur, & iudicium difficilè aſſentitur, vndè obſcuritas æſtimatur. Præterea res eximiæ propria methodo tradi debent, ne ſi facilius, quam par ſit offerantur, contemptui ſint. Raritas rerum, & aquirendi difficultas illis pretio ſunt, vt meritiſſimo iure præſtãtes viri diuinas ſuas adinuentiones, & Archimedeis ſimiles emittant, decora quadam, & venerabili facie, tamen ſeuera, quæ primo intuitu honorem ſibi, & reuerentiam conciliet, ne ſpernantur.*

Quod verò geometricè non proceſſerim, in ſequentibus reſtat diſcutiendum: de Souero enim in ſuperioribus ſatis ſuperq;

ſuperq; dictum eſt, & non debuiſſe de eo in mea Geometria per me mentionem fieri pariter comprobatum.

CAPVT VII.

Continens Sectiones 18. 19. 20. *&* 21.

Accedit nunc Auctor noſter propius ad examinandam Libri Secundi meæ Geometriç doctrinam, incipiens à Definitione prima, quã Studioſus videre poteſt in Exerc. prima Pag. 6. contra quam ſic arguit in Sec. 18. Pag. 340.

Sectio XVIII. *Cum ergo Definitione prima Libri ſecundi ponat inter duo plana parallela moueri planum, alteri plano figurato inter duo illa plana intercepto, inſiſtens, iiſdem planis ſemper æquidiſtanter, de hoc plano moto, eiuſque effectu sic definit Auctor.* Singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes ſectiones plani moti, & datæ figuræ ſimul collectæ, vocentur *Omnes lineæ* talis figuræ, &c. *Hic ergò dubito, immo ſine dubio pronuncio. planum motum nullam deſcribere lineam, niſi fortè per duo extrema puncta. Planum enim motum cum ex ſuppoſitione antequam moueatur, aut inſiſtat plano, aut illud ſecet in linea tantum, mota illa linea deſcribet nihil aliud, quam ſuperficiem, ut ergo ſuperficies illa ſit, & geometricè loquendo uocari poſſit*, Omnes lineæ talis figuræ, *hoc meo iudicio à nullo obtinebit Geometra, numquam enim ſuperficies uocari poteſt plures, uel omnes lineæ; cum linearum multitudo quantumuis maxima, ne minimam quidem componere queat ſuperficiem: multò minus admittendum eſt Corollarium annexum.*

Ad maiorem dictç primç definitionis intelligẽtiam ſupponamus quadratum, per cuius duo quæuis oppoſita latera ſint ducta duo indefinita plana ipſi quadrato perpendiculariter erecta, quæ & conſequenter parallela erunt. Rurſus cõcipiamus alterum iſtorum æquidiſtantium planorum moueri continuò verſus reliquum, ipſiq; çquidiſtanter, donec illi congruat. Hoc ergo motum planum quolibet momento ſecabit planum quadrati, communiſq; eorum ſectio erit recta linea per Prop. 3. Vndecimi Elem. Quapropter

ſin-

ſingulæ rectæ lineæ in toto hoc motu vt ſic in dato quadrato deſignabiles, ſeu deſcriptibiles, à me dictę fuerunt in dicta Definitione prima. *Omnes lineæ eiuſdem quadrati.* Sicuti ſi pro quadrato cubum ſupponamus, & in eiuſdem oppoſitis duabus quibuſcunque faciebus ducta duo indefinita, oppoſitaque tangentia plana (quæ erunt parallela, cum tangant in faciebus parallelis) quorum vnum moueatur continuò verſus reliquum, eidemque ęquidiſtanter, donec illi congruerit: per hoc motum planum quolibet momento deſignabitur in ipſo cubo figura, quæ erit quadratum. Vnde ſingula quadrata, quæ in toto hoc motu fieri intelliguntur in ipſo cubo à me dicta ſunt. *Omnia plana eiuſdem cubi.* hoc eſt ſpeciali nomine. *Eiuſdem omnia quadrata.* Cum ergo nulla ſit ex præfatis lineis aſſignabilis in dicto quadrato, & nullum ex præfatis quadratis aſſignabile in cubo, per quæ non tranſeat aliquando, ſeu in aliquo momento motum planum (qua ratione dico ea ab ipſo deſcribi) ideo ea omnia, ita mente collecta, vt nullum excludi ſupponatur, vocaui. *Omnes lineas, & Omnia plana.* Quod autem dixi ea fieri in toto motu, ... ıudi in omnibus inſtantibus temporis, quo fit totus motus. Apud eos enim, qui ſuſtinent continuum ex Indiuiſibilibus componi, deſcriptio dictorum Indiuiſibilium erit deſcriptio ſuperficiei. Apud eos verò, qui vltra hęc Indiuiſibilia ponunt aliquid aliud in ipſo continuo, illud dicendum erit, deſcribi in ipſo motu. Quemadmodum reuoluto circulo ſuper recta linea, cum eam quolibet momento tangat in puncto, omnia illius puncta intelligentur connotari, ſeu deſignari à moto circulo in omnibus inſtantibus temporis, quo fit totus motus; at ipſa linea in ipſo motu deſcribetur. His ſubdit Auctor pariter ſubſequentia circa Def. 2. in Sect. 19. & in eadem Pag. 340.

Sectio XIX. *Eiuſdem farinæ eſt Definitio 2. cum ſuo Corollario de omnibus planis propoſiti ſolidi, ait enim.* Singula plana, quæ in toto motu concipiuntur in propoſito ſolido, ſimul collecta, vocentur *Omnia Plana* propoſiti ſolidi &c. *Poterit aliquis in ſua definitione uocari uelle lapidem & animal ſenſibile, hoc ut à nemine obtinebit, ità per motum illum*

cum

cum fiat ſolidum, illud dici numquam cum ueritate poterit omnia plana propoſiti ſolidi.

Nunquam autem ipſe dixi ſolidum,& omnia plana idem eſſe, vnde hoc non eſt perinde ac lapidem velle vocare animal ſenſibile. Proſequitur deinde Auctor ſic obijciens Definitioni tertiæ in Sect. 20. Pag. 341.

Sectio XX. *Quod duæ præcedentes Definitiones determinant de omnibus lineis rectis in figura plana comprehenſis, & ſecunda de omnibus planis in ſolido contentis, hoc vt, mihi quidem videtur, definitio tertia concludere vult de omnibus punctis in linea contentis; vt nimirum concipiamus in linea deſcripta à pũcto aliquo, aut aliquibus, trãſitus, ut ille uocat, hoc eſt in motu, ut puncta in illa linea vocentur*, Omnia puncta tranſitus propoſitę lineæ. *Verum has tres definitiones nullus admittere poteſt Geometra, & multò minus Corollaria, quæ definitionibus anneCtuntur: Verboſeſe expedit Geometra, & dicit, punctum, lineam, planum, in motu ſemper eſſe in maiori loco ſe, quod etiam Philoſophi concedunt de omnibus mobilibus, & ſic punctum poſt ſe non relinquit punctum, ſed lineam; linea ſuperficiem, ſuperficies ſolidum. Ab hoc uero ut ſolido Geometrarum fundamento nulla me unquam dimouebit Methodus neque diuiſibilium, neque Indiuiſibilium.*

Ad hæc nihil præter ſuperius allata addendum eſt, non enim in his eſt alia difficultas à prædictis.

Poſt hæc aggreditur duo ſequentia Poſtulata, quæ videat Lector in dicta Exercit. 1. pag. 14. vbi reliquæ pariter habentur Propoſitiones à Guldino examinatæ. Dicit ergò in Sect. 21. in eadem Pag. 341.

Sectio XXI. *Poſt diffinitiones (quas omnes perpendere noluimus) ſequuntur duo Poſtulata. Primum nimirum. Congruentium planarum figurarum omnes lineas eſſe congruentes, & ſolidorum omnia plana; ſi intelligit ſuperficiem congruere ſuperficiei, & ſolidum ſolido concedimus, de omnibus lineis, & omnibus planis, nihil ſcimus, quod idem dictum volumus de Poſtulato ſecundo.*

Ad horum diſcuſſionem iterum conſideremus præaſſumptum quadratum, cui aliud quadratum æquale ſuperpoſitum intelligamus, eidem congruens. Motum ergo planum

pro vna recta duas rectas ſibi inuicem congruentes quolibet momento deſignabit. Vnde quod de duabus ad libitũ aſſumptis verificabitur, de reliquis eadem ratione verificari concludemus. Sic namq; in figura, quam volumus oſtendere eſſe circulum, aſſumptis duabus vtcunque rectis lineis ab eo puncto ductis, quod volumus probare eſſe centrum circuli, & oſtendentes eas eſſe æquales vni tertiæ, de infinitis pariter, quæ ab eo puncto ad periphæriam duci poſſunt id tamquam probatum recipitur. Qua ratione ergo concipimus omnes lineas, omnia plana, eadem ratione congruentiam apprehendimus, vel ſi mauis dicere congruibilitatem, ſi ea omnia actu aſſignarentur.

CAPVT. VIII.

Examinantur Sectiones 22. 23. 24.

POſt Definitiones, & Poſtulata procedit Guldinus ad Propoſitiones aliquas ex Libro Secundo examinandas, & incipiens à prima, quę talis eſt nempè. *Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti tranſitus; & quarumlibet ſolidarum omnia plana, ſunt magnitudines inter ſe rationem habentes.* ſic inſtat contra eandem in Sec. 22. in eadem Pag. 341.

Sectio XXII. *Hæc Propoſitio abſolutè negatur, & hoc oppono argumentum; Omnes lineæ, & omnia plana, vnius & alterius figuræ ſunt infinita, & infinita; ſed infiniti ad infinitum nulla eſt proportio, ſiuè ratio. Ergo. Tam maior, quàm minor clara eſt apud omnes Geometras, vt pluribus verbis non indigeat. Ergò concluſio Caualerianæ Propoſitionis falſa eſt.* Subdit deindè. *Vidit hoc occulatiſſimus vir & ex Lyncea deſcendens Progenie Bonauentura Caualerius,* quare demonſtrationi ſubiungit Scholium ſic incipiens. Hoc verò Scholium ibidem & ipſe affert.

Recolat hic Lector, quæ ſuperius dicta ſunt Cap. 5. ad Sectionem 15. vbi Guldinus fatebatur meam Methodũ, quę prędfatam Propoſitionem tamquam primarium fundamentum ſupponit, ad inuentionem Theorematum, & Proble-

matum plurimum valere: ſi enim illa abſolutè falſa eſt, vt apertè hic pronuntiauit, non niſi falſas concluſiones parere poterit, & tamen nihil adhuc falſi ex tali methodo oriri animaduerſum eſt, neq; oriri poterit, ſi modo rectè, hoc eſt iuxta pręſcriptas regulas adhibeatur. Ad hanc autem difficultatem enodandam, concedo infiniti ad infinitum nullam eſſe proportionem, ſi loquamur de infinito ſimpliciter, & vndequaque: at de illis infinitis, quę non ſunt vndequaq; infinita, ſed ſecundum quid finitatis ſubeunt rationem, dico poſſe comparari ea ratione, qua finitatem ſortiuntur, cum ex ea parte illis poſſit fieri additio, & ſubtractio, quod non contingit in infinito ſimpliciter. Modo omnes lineę, & omnia plana iam dicta ſunt de genere infinitorum ſecundum quid, etſi enim quoad numerum ſint infinita, quoad magnitudinem tamen, cum ſingulę lineę, & ſingula plana finita ſint, omniumq; aggregata vndequaq; limitibus circumſepta, quapropter clarè intellectus agnoſcat illis poſſe fieri additionem, & ſubtractionem, qualiſcumq; ſit numerus Indiuiſibilium, quæ addi, vel ſubtrahi concipiuntur, ideò hęc poterunt inuicem comparari. Hoc ergo in dicta Prop. prima probatum eſt, dum res ad huius Axiomatis euidentiam reducta fuit, nempè. Totum eſt maius ſua parte. Eſſe enim hęc infinitarum linearum, vel planorum aggregata, non in ſpatio infinito, ſed finito, cum illud vndequaq; limitibus claudatur (quod fortè nulli alteri infinitorum generi conuenit) efficit vt mens ſine hæſitatione in his totum, & partem diſtinguat, quidquid ſit de illis infinitis, quę non vndequaq; ſunt limitibus circumſcripta, & in quibus idcircò rationem totius, & partis non tam clarè diſtinguere poſſumus. Si ergo appoſuerimus ex. gr. præconſiderato quadrato aliud quadratum ęquale, nonne manifeſtum erit omnes lineas primi quadrati iterum ſumi in ſecundo quadrato, & ideo vtraſq; ſimul ſumptas vnius tātū eſſe duplas, licet vtriuſq; aggregati numerus ignoretur? Hic enim perinde fit ac apud Algebricos, qui neſciētes; quę ſit, quam dicunt Radicem, Latus, aut Coſſam, ſeu quales ineffabiles radices, tamen eaſdem multiplicantes, diuidentes &c. deniq; in quæſiti inuentionem quaſi per has obſcu-

ras

Digitized by Google

ras ambages manuducuntur. At contra id quod dixi, magnitudinem nempè omnium linearum, & planorum &c. poſſe comparari ſic inuehitur Guldinus in Sec.23. Pag.342.

Sectio XXIII. *Dicit ergo Caualerius, ſe non comparare numerum omnium linearum, quem vt rectè dicit ignoramus, ſed tantum magnitudinem, quæ adequatur ſpatio ab eiſdem lineis occupato, cum illi congruat: Congruentia qualis ſit, eſſeq́ poſſit diximus Propoſ. præcedenti Num.5. Magnitudo autem, quæ adequatur ſpatio ab eiſdem lineis occupato, duplex eſt. aut eſt id ſpatium, quod occupant lineæ in motu, & hoc eſt tota ſuperficies propoſita, quam linea pertranſit ſine vlla dependentia à linea non mota, vel ſtabili, & hoc concedimus. Aut eſt id, quod ipſe euincere vult ſpatium, in quo concipiantur eſſe lineæ indefinitæ (abhorret enim à vocabulo infiniti) quæ lineæ occupent illud ſpatium; & negamus, quia nihil aliud occupant niſi longitudines, quæ omnes longitudines, ſimul ſumptæ numquam efficiunt ſpatium, ſiue latitudinem.*

De congruentia dictum eſt ſuperius. Quoad magnitudinem verò, iuxta componentes Continuum ex Indiuiſibilibus, reſpondendum erit magnitudinem omnium linearum oblatę planæ figuræ vnum, & idem eſſe cum magnitudine, ſuperficiei. At iuxta aliter ſentientes, concedam pro ſpatio ab omnibus lineis occupato, preſsè loquendo, intelligendum eſſe aggregatum ex meris longitudinibus, quarũ ſingulæ ſingularum linearum tamquam loca concipi poſſunt, horumq; locorum magnitudini dicam adęquari omnium dictarum linearum magnitudinem. Hoc tamen non obſtante euincitur propoſitum: quia cum horum locorum, & ſubinde omnium linearum aggregatum ex nulla parte excedat figuram, cuius dicuntur omnes lineę, ſed eius limitibus coerceatur, idcirco illi poterit fieri additio, vel ſubtractio, & ſubinde huiuſmodi aggregata erunt inter ſe cõparabilia. Hoc verò confirmaueram in pręfato Scholio, quod habetur in Exerc. prima Pag.23. à partibus, in quas continuũ eſt ſeparabile, etſi enim illę ſint infinitę (cum ſit iuxta Philoſophos diuiſibile in ſemper diuiſibilia) hoc tamen non obſtante continua eſſe comparabilia conceduntur. Vnde à pari quamuis huiuſmodi Indiuiſibilia ſint infinita, non tol-

letur tamen quin eorum aggregata ſint ad inuicem comparabilia. Cui confirmationi ſic occurrit Auctor noſter in Sec. 24. & in eadem Pag. 342.

Sectio XXIV. *Reſpondeo continuũ eſſe diuiſibile in infinitum, non autem conſtare partibus infinitis actu, ſed tantum in potentia, quæ numquam exhauriri poſſint; partes autem illæ inter Indiuiſibilia comprehenſæ nõ ſunt, niſi ipſa aſſignẽtur Indiuisibilia. Ità vt si aſsignetur in figura plana vna linea, perimetrum figuræ vtroque termino ſuo attingens, vel ſecans diuidet illa continuum in duas partes quæ duæ partes & componũt ſuum totum, & comparari poſſunt cum alijs partibus ſiuè huius, ſiuè alterius figuræ ſiuè duabus ſiuè tribus, ſiuè pluribus per alias lineas aſſignatis, quæ etiam ſimul ſumptæ componant ſuum totum: quia partes tam huius quam alterius figuræ multiplicari poſſunt, ità vt hæ illas ſuperent, & contrà illæ has, quod idem de lineis aſſignatis, & ſimul quoad longitudinem ſumptis dictũ volo; ac proinde ex definitione Quinta Quinti Elemẽtorum dicuntur habere inter ſe rationem. Et sic ſi ſumatur aliqua congeries, siuè linearum, siuè partium planæ alicuius ſuperficiei, erit illa finita, & inter ſe rationem habebunt, lineæ nimirum cũ lineis, & partes cum partibus, non autem lineæ cum partibus. Quare cum non detur, nec dari poſſit congeries omnium linearum, aut omnium partium poſsibilium, ergò nec proportionem inter ſe habere poſſunt, neque lineæ cum lineis, neque partes cũ partibus, quæ enim non ſunt, nec vllo modo eſſe poſſunt, comparationem non admittunt. Plura, in re apud omnes Geometras clariſsima, non addimus.*

His tamen nõ obſtantibus, dico ſi comparentur inuicem continua, pari ratione Indiuiſibilium aggregata comparari poſſe, nec obſtare quod actu continuum non ſit reſolutum in ſuas infinitas partes. Demus enim ex. gr. quod præfata, quæ iuxtapoſuimus quadrata, per impoſſibile de facto in ſuas infinitas partes reſoluerẽtur, certè aggregata ex his infinitis partibus actu reſolutis non eſſent quantitate diuerſa ab ipſis quadratis, totum enim eſt ęquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis. Cum ergo ipſa quadrata ſint comparabilia, etiam iſtarum infinitarum partium aggregata eſſent comparabilia. Ergo & Indiuiſibilium licet infinitorum

aggre-

Digitized by Google

aggregata pari ratione poterunt ad inuicem comparari,non enim obſtabit infinitas, vt & ſupra alia ratione probabatur. Non eſt autem neceſſe hæc omnia actu aſſignari in cótinuo, vt eorum aggregata comparentur, ſed ſufficit intellectum ex aliquibus numero finitis aſſignatis, ipſa aggregata concipere, eorumq; proportionem tamquam ineffabilium radicum in lucẽ extrahere, vt eam colligat pro ipſis continuis, ſeu figuris. Quod in omnibus dictæ Geometriꝗ demonſtrationibus liquidò apparet, in eis enim aſſumptis tantum quatuor vtcumq; magnitudinibus ex infinitis Indiuiſibilibus, quæ forent conſideranda, nempè ea ratione, qua declaratur in Exerc. prima num. 29. colligitur proportio quęſita. Vt ex. gr. dum in Prop. 5. Libri 2. quę poſita eſt in eadem Exerc. prima Pag. 31. probare intendo parallelogramma ęquealta eſſe vt baſes, duco baſibus parallelam vtcumq; rectam lineam indefinitã, cuius portiones in dictis parallelogrammis concluſas oſtendo eſſe vt baſes: cũ verò ſit eadem ratio de reliquis, hocq; intellectus ſufficienter comprehendat, abſq; eo quod ſit illi neceſſe actu omnia hęc Indiuiſibilia in ipſis parallelogrammis aſſignare, ideò concludo omnes lineas dictorum parallelogrãmorum (ſubintellige ſi omnes forent actu aſſignatæ & ſubinde ipſa parallelogramma eſſe vt baſes.

CAPVT VIIII.

Proceditur à Sectione 25. vſq; ad 29. incluſiuè.

AVctor noſter in ſua Prop. 3. trãſit ad examinãdas Prop. 2. & Tertiã eiuſdẽ Libri Secundi cũ ſuis Corollarijs, vt Pag. 343. videre licet. Dicit enim in Sectione 25. Pag. 343.

Sectio XXV. *Propoſitio ſecunda ſic ſe habet*. Aequalium planarum figurarũ omnes lineę ſunt ęquales, & æqualium ſolidarũ omnia plana ſunt ęqualia, regula quauis aſſumpta. *Iam diximus omnes lineas dari non poſſe, ſed neque per imaginationem aſſumi, quare reſpuunt ipſa aequalitatem, vel rectius illas aequalitas afficere non poteſt. Si ſermo eſſet de lineis finitis numero aequalibus, ipsa ſimul ſumpta in quauis figura ſeorſim, & aequales poſſent eſſe, & inaequales, pro ſpecie figurarum,*

tarum, & linearum varijs modis in ipſis ductarum, ſed hoc non vult Auctor, neque ad ipſius facit propoſitum. Quod ergò de infinitis ante diximus, & hic repetita volumus.

Ad hæc autem per ſuperius dicta patet reſponſio. Subdit deinde ibidem in Sec. 26.

Sectio XXVI. *Iucundum addit Corollarium, in quo præter alia ex hac Propoſitione deducit quaſi per exemplum, ſi cylindrus planis ſecetur, & per axem, & eidem æquidiſtantibus vbi creātur parallelogramma; ſecetur & alijs baſi æquidiſtantibus vbi fiunt circuli, dicit omnia illa parallelogramma ſimul ſumpta æqualia fore omnibus circulis ſimul ſumptis. Sed idem dicendum eſt quod de lineis diximus, infinita ſcilicet plana eſſe, aut dari non poſſe: ſi ſunt finita poterunt eſſe æqualia, vel inæqualia. Itaque Propoſitio hæc cũ ſuo Corollario non ſubsiſtit.*

Non ab re hoc Corollarium iucundum appellauit, quod & admirabile dicere poterat. Licet enim hic infinitorum circulorum quodamodo intueri quadraturam, quod de vno tantum non adhuc protulit Geometria. Proſequitur deinde ibidem in Sectione 27. ſic loquendo.

Sectio XXVII. *Propius iam accedit, ad iaciendum, ſtabiliendumque fundamentũ pro ſua Noua Geometria, vndè tertiò ſic proponit.* Figuræ planę habent inter ſe eandem rationē; quam earũ omnes lineæ iuxtà quamuis regulam aſſumptę, & figuræ ſolidæ, quam earum omnia plana iuxtà quamuis regulam aſſumpta. *Pro demonſtratione proponit circulum, A & triangulum, D, & ſic argumentatur:* Si continuum componitur ex Indiuiſibilibus, patet abſque alia demonſtratione figuram, A, ad figuram; D, eſſe vt omnes lineæ figuræ, A, ad omnes lineas figuræ, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non eſſet, niſi ipſa Indiuiſibilia comparare. *Si hoc negetur, ſumit figurarum propoſitarum æquè multiplicès, & ſic dependenter à Propoſitione antecedente, eiuſque Corollario propoſitum vult concludère; ſed quia antecedens Propoſitio cum ſuo Corrollario nihil probat, etiam in hac Propoſitione nihil probatur. Ad quam abſolutè reſpondemus figuras poſſe habere ad inuicem rationes, non autem omnes lineas, aut omnia plana vnius ad lineas omnes aut omnia plana alterius, hoc eſt infiniti ad infinitum. De finitis ex ſupradictis patet reſponſio.*

De

De hoc ſatis ſuperius dictum eſt. Addit deinde ibidem in Sec.28.

Sectio XXVIII. *Sed audiamus Corollarium.* Liquet ex hoc *inquit*, quod vt inueniamus quam rationem habeant inter ſe duæ figuræ planæ, vel ſolidæ ſufficiet nobis reperire, quam in figuris planis inter ſe rationem habeant earundem omnes lineæ, & in figuris ſolidis earundem omnia plana, iuxtà quamuis regulam aſſumpta, quod Nouæ huius meæ Gometriæ veluti maximum iacio fundamentum. *Verum hoc fundamentum nullum eſt, nullius enim figura dari, aut aſſignari poſſunt omnes lineæ, aut omnia plana; quare per ea, quæ nullo modo ſunt, aut eſſe poſſunt, nihil probare poſſumus.*

Hoc pariter non alia reſponſione indiget. Pręfatis verò continuat hic Auctor Scholium ſubſequens in Sectione 29. Pag. 344.

Sectio XXIX. *Cum fundamentum præcipuum huius nouæ Geometriæ meo iudicio nō ſubſiſtat in hac Methodo vlterius pro hac vice progredi nolumus: ipſe verò Auctor licet ſua fundamenta adeò firma, atq; inconcuſſa in Præfatione Libri Septimi deprædicet, vt velut adamantina ſummorum ingeniorum tamquam arietum ictibus pulſata, ne minimum quidem nutantia agnoſcantur, & ſubdit hoc deberi Mathematicarum dignitati. An id ego ſufficienter præſtiterim, aliorum iudicio relinquam; vnicuique enim hæc perlegenti, ex animi ſui ſententia iudicare licebit. Hac fretus inuitatione auſus ſum, ea, quæ obiter occurrebant in medium proferre. prout feci hactenus: & adhuc fortaſſis facturus ſum. Cæterum ipſe poſt aliqua, quæ ad propriam pertinebant defenſionem, & ego in ſupradictis attuli, ex aliorum mente ſic loquitur.* Hic dicendi modus adhuc videtur ſubobſcurus, durior quam par eſt euadit hic omnium linearum, ſeu omnium planorum conceptus; quaproter hunc tuę Geometriæ, ceu Gordium nodum, aut auferas, aut ſaltem frangas niſi diſſoluas. *Et paulò poſt.* Interim qualiſcumque mea fuerit illius (*nodi*) tentata diſſolutio, ipſum tamen in præſenti Libro, nouis alijs denuò ſtratis fundamentis, quibus ea omnia, quæ Indiuiſibilium Methodo in antecedentibus Libris iam oſtenſa ſunt, alia ratione ab infinitatis exempta conceptu comprobantur, omninò è medio tollendum

dum

Digitized by Google

dum eſſe cenſui. *Itaque hoc Septimo Libro omnia ea, quæ in prioribus ſex Libris per Methodum Indiuiſibilium probata sũt, independenter ab ea, nouis alijs denuò ſtratis fundamentis promittit ſe demonſtraturum. Relictis ergò tantiſper ſex prioribus Libris, ad hunc Septimum inſpiciendum, etſi quæ occurrent difficultates, eadem, quà ſupra breuitate, & ſynceritate, annotandas me accingo: quem ità legere incipiam, ac ſi ſolus, vt promittitur, ſubſiſtat, & abſque præcedentibus intelligi queat.*

In hoc ergo Scholio patet Auctorem cenſuram complere circa Libri Secundi meę Geometriæ has paucas Propoſitiones, cęteris relictis, quæ reperiuntur tum in eodem Libro Secundo, tum in Tertio, Quarto, Quinto, ac Sexto, vbi ingens Propoſitionum eſt numerus ex dictis fundamentis deductarum. Miror autem hunc Auctorem ex tot vel vnã ſaltem non delegiſſe, quam oſtenderet expreſsè falſam eſſe, cum tamen in tot cõcluſionibus ſaltem aliqua falſa eſſe deberet, ſi earum principia falſa ſunt. His ergo cum eo inpoſito fine, tranſibimus in ſubſequenti Cap. ad eiuſdem examen Libri Septimi.

CAPVT X.

Expenduntur Sectiones 30. & 31.

AD eorum intelligentiam, quæ à Guldino contra Librum 7. meę Geometriæ afferuntur ſatis erit Lectorem in Exerc. Secunda pro nunc videre Prop. primam dicti Libri 7. quæ ponitur Pag. 88. quæ ſuperaddita fuit, vt cõnceptus infinitorum Indiuiſibiliũ poſſet euitari, prout iuxta poſteriorem Methodum ibidem explicatum fuit. Ille ergo in Prop. 4. & in eadem Pag. 344. proponit ſe velle. *Quid de prima Propoſitione Libri ſeptimi ſentiendum ſit aperire*, quare ſic incipit in Sec. 30.

Sectio XXX. *In hac propoſitione prima Auctor ſic loquitur.* Figuræ planæ quæcumq; in iiſdem parallelis cõnſtitutæ, in quibus, ductis quibuſcunq; eiſdem parallelis æquidiſtantibus rectis lineis, conceptæ cuiuſcunque rectæ lineæ portiones ſunt æquales, etiam inter ſe æquales erunt. Et figuræ

ræ ſolidæ quæcumque in eiſdem parallelis conſtitutæ, in quibus ductis quibuſcumque planis eiſdem planis parallelis æquidiſtantibus, conceptæ cuiuſcunque ſic ducti plani in ipſis ſolidis figuræ planæ ſunt æquales, pariter inter ſe æquales erunt. Dicantur autem figurę æqualiter analogę, tum planæ, tum ipſæ ſolidæ inter ſe comparatæ, ac etiam iuxtà regulas, lineas, ſeu plana parallela, in quibus eſſe ſupponuntur, cum hoc fuerit opus explicare. *Conatur hoc demonſtrare per ſuprapoſitionem tam in planis, quam in ſolidis, verum ſi preſsè, ac geometricè loqui velimus, nihil demonſtrat. Nam cum ipſe figurarum qualitates non ſolum nō determinet, ſed eas omninò irregulares, ac diuerſiſsimarum ſpecierum cauas, plenas, inflexis, varijſque modis ſeſe habentibus terminis comprehenſas, eſſe poſſe admittat, quis nobis indicabit (loquamur primò de figuris planis tantum) quādo altera alteri ſuperponitur, an ſibi congruat nec ne? Quis erit iudex manuſuè, an oculus, aut intellectus? Reſpondebitur intellectum fore iudicem (nam & tactus, & viſus hinc excluditur) & ideò conditionem neceſſariā poſitam eſſe hanc; vt æquales, ſibique correſpondentes lineæ rectæ ſibi ſuperponantur, hæ enim cum æquales ſint, ſibi congruent, intellectu iudice. Eſto ſint ſibi ſupra-poſitæ, & congruant, quid concludetur? Lineas eſſe æquales Sed hoc habetur etiam ex hypotheſi, neque hoc quæritur. Superficies inter rectas lineas parallelas interceptas eſſe æquales? Nequaquam: nihil enim intellectui conſtat de binis alijs terminis, qui has particulares ſuperficies vnà cum duabus rectis parallelis comprehendunt, an ſibi congruant nec ne, cum diuerſimodè inflexarum linearum eſſe poſsint. Sed quod de vna particulari ſuperficie dicitur, de quibuſuis & infinitis alijs particularibus ſuperficiebus dicendum eſt. Ergò de lineis rectis tantum, nihil autem de ſuperficierum aut planarum figurarū propoſitarum æqualitate concluditur. Ergo, vt diximus, propoſitum de figuris planis non demonſtratur.*

Obijcit ergo me nihil demōſtrare, quia ego qualitates figurarū nō determino. Ad quod dico inconuenientem hanc determinationē, quam per me fieri voluiſſet, futuram fuiſſe, cum de figuris planis æqualiter analogis quibuſcumq; ſit ipſa Propoſitio. Quoad ſuperpoſitionem verò modus pre-

ſcribitur, dum prçcipitur extrema tangentia figuras ſemper in extremis tangentibus eſſe cõſtituenda, & nõ aliter. Cum verò petit quis ſuperpoſitionis futurus ſit iudex. Reſpondeo intellectum, cui ex hypotheſi conſtat fieri aliquam ſuperpoſitionem, quomodocumq; illa fiat, dumodo ea iuxta prçſcriptam legem effecta ſit. Et cum ſubdit. *Eſto ſint ſuperpoſita, & congruant quid concludetur? lineas eſſe æquales?* Dico non hoc concludi, ſed partem figuræ ſuperpoſitæ (niſi primò tota toti cõgruat) parti eius, cui ſuperponitur congruere, quæcumq; pars illa ſit, ſatis enim eſt intellectui ſupponere fieri aliquam ſuperpoſitionem: vnde non eſt neceſſe eidem innoteſcere binos alios terminos parallelarum, quæ ſuperponuntur; ſequitur enim ex hypotheſi aliqua partium congruentia, quicumq; ſint dicti termini. Fruſtra igitur adduxit incoueniens de lineis rectis tantum hoc demonſtrari. Pergit tamen ipſe in eadem Pagina ſic diſcurrendo in Sec. 31.

Sectio XXXI. *Sed dicet fortaſsis Demonſtrator ſe tot ducere velle lineas, immo iam ductas ſupponere, quæ ſuperficies illas intercluſas abſumant, & in nihilum redigant, aut tam daruas efficiant, vt pro nihilo habendæ ſint, & ſic manſuram illam æqualitatem figurarum, quam demonſtrare propoſuerit. Et ego, qui hoc fecerit, reſpondeo, næ ille erit mihi magnus Apollo, non autem magnus Apollonius: ſemper enim alij duo termini, qui vnà cum parallelis rectis minimam illam, quam ille putat, ſuperficiem comprehendunt, infinita ſuſcipiunt puncta, infinitaſque terminabunt rectas parallelas, quæ omnes nullam vnquã conſtituent ſuperficiem; ac proindè nullam abſumere, aut anihilare poterunt: diuiſio ſuperficiei in æternũ fieri poterit in partes, quæ omnes ſimul ſumptæ, ſemper paratę ſunt componere, & reſtituere ſuum ab initio indiuiſum totum: lineæ diuidentes nihil conferunt ſuperficiei, aut ab eadem auferunt. Et ſic redire debet Demõſtrator ad argumentũ proximè propoſitũ ſoluendum. Tranſeat dicet aliquis quod ex ſupradictis minimam ſuperficiem exhibere non poſſim, exhibeo tamen aliundè per meas lineas parallelas ſuperficiem minorem quacumque propoſita: & ſic concluſio erit ex parte mea; æſtimabitur enim ea, cum minor dari non poſſit ſuperficies illa, quã*

per

per meas frequentes parallelas eò deduxi, ſuperficies minima; hoc eſt linea: & ſic ex hoc capite habeo quod volo, eritq; figura tota figuræ toti æqualis. Quod erat demonſtrandũ. Feſtina lente. Dabis quidem ſuperficiem quacumque datã minorem ſed numquam talem, quæ ſit minima, vel æqualis lineæ; vrget enim adhuc ſuprapoſitum argumentum, quod per hoc non ſoluitur, quia tua illa, quam tu vocas minimam ſuperficiem, tu ipſe minorem dare poteris, quæ efficiet vt illa prior non ſit minima, neque poſterior hæc, ſed ſemper ſuperſit id, per quod minor adhuc detur. Pluribus enim in locis, & Archimedes, & plures alij puriori Geometriæ addicti, demonſtrant propoſita figuræ inſcribi poſſe, & circumſcribi alias figuras, ità vt circumſcripta figura excedat inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit quacumque eiuſdem generis magnitudine propoſita. Ergò concludunt circumſcriptam æqualem eſſe inſcriptæ? Neutiquam, ſed alio adhibito medio termino demonſtrant figuram illam, cui circumſcriptio, & inſcriptio facta eſt, æqualem eſſe cuidam alteri quæ minor quidem ſit circumſcripta, maior autem inſcripta. Concludimus ergò ex his quæ attulimus Propoſitionem hanc de Planis figuris nequaquam legitimè demonſtratam eſſe.

Hic ergo denuò conatur Auctor noſter Lectori perſuadere dictam Propoſitionem primam non fuiſſe à me legitimè demoſtratã, ſed (quod illius pace dictum ſit) ex diſcurſu parum, vel nihil ad rem noſtram pertinente, vt is facilè intelliget qui à me allatam demonſtrationem rectè perpenderit. Nuſquam enim ita proceſſi per dictarum linearum æqualitatem, ceu continuũ voluerim per frequentes lineas parallelas ſcindere in minimas particulas, vt ipſe putauit. Sed ſuppoſui in prima figurarum ſuperpoſitione ſaltem earum partem parti congruere, oſtendiq; reſidua eſſe quoq; figuras ęqualiter analogas. Hęc verò reſidua iterum eadem lege dixi eſſe ſuperponenda; & ſi adhuc tota figura non congruat toti, probaui adhuc remanere reſidua æqualiter analoga, & ſic ſemper fieri, continuata ſuperpoſitione. Vnde ſi aliquãdo vnius nullum ſit reſiduum, neq; fore reſiduũ alterius, figuraſq; inuicem congruere concludo, & ſubinde æquales eſſe. Ab his uerò quam diuerſus ſit diſcurſus huius

Auctoris quiuis facilè intelligere poteſt. Non ingnoro tamen præfatę demonſtrationi obijci poſſe, quod dicta ſuperpoſitio, quæ per fruſta continuò facienda eſt, in aliquibus figuris numquam fortè abſolueretur; neſcimus enim, quæ, quotauè ſit pars illa figuræ ſuperpoſitæ, quę alteri in ſubiecta figura cōgruere intelligitur. Eademq; inſtantia fieri poterat circa Prop. primam Libri ſecundi, in qua fit fruſtatim hæc ſuperpoſitio, quæ ſi per continuos actus fieri debeat forſan in aliquibus figuris numquam finiretur, cum hinc fruſta numero infinita videantur in continua ſuperpoſitione ſuboriri poſſe. Verum hanc difficultatē non animaduertit, nec in oppoſitum attulit Guldinus, quæ magis ad rem feciſſet, quam ſuperius ab eo allata. Huic tamen vt ſatisfaciam, dico non neceſſe eſſe actu efficere hanc infinitorum reſiduorum, quæ obuenire poſſunt, ſuperpoſitionem (ſicuti de omnibus lineis in diſcuſſione prioris Methodi Ind. dicebatur non opus eſſe ſingulas actu deſcribere) ſed ſufficere quod intellectus ex vna ad libitum aſſumpta reliquas intelligat, quamuis infinitas, ſaltem conceptu negatiuo, cum ſit eadem ratio de omnibus. Si enim ponamus per impoſſibile has ſuperpoſitiones abſolui, hoc eſt continua fruſtorum ablatione facta à figura ſuperpoſita, de ea tandem nihil remāſiſſe, neceſſariò iuxta habitam demonſtrationem ſequetur nihil ſupereſſe reſidui in figura, cui fit ſuperpoſitio. Ex quo rectè hic infertur figuras ęqualiter analogas, & ibi omnes lineas æqualium planarum figurarum, æquales eſſe. Si enim in ęquales eſſent, conſumptis per ſuperpoſitionem alterius ſuperpoſitæ fruſtis, licet hoc fieri per infinitos actus ſuperponeretur, nihilominus aliquid reſidui poſſet remanere in figura cui fit ſuperpoſitio, ſi illa maior eſſet, quod tamē euenire non poſſe euincitur per dictam demonſtrationem. Hoc verò de omnibus lineis ſuo modo intelligi poteſt.

CA-

CAPVT XI.

Fuſiùs hic diſſeritur circa Sectionem 32.

ALiam inſtantiam affert Auctor contra eandẽ Propoſitionem primam ſic obijciens in Sec.32. Pag.346.

Sectio XXII. *Sed, & aliundè hac, qua vocatur demonſtratio, demonſtratio non eſt ex ipſo, quem adhibet demonſtrationis medio termino, qui eſt figurarum ſuperpoſitio; de quibus multi quidem multa, & tandem tamen ea paucis probatur, quando res ipſa aliter demonſtrari poteſt. Quando verò recipitur, certis tantum conditionibus recipitur, id quod pauciſſimis verbis tradit noſter Criſtophorus Grienbergerus ad Pronunciatum 8. Libri Primi Elementorum, quod ſic habet.* Quæ ſibi mutuò congruunt ſunt æqualia. Debet autem, *addit ille* talis congruentia conſtare intellectui. *Qua congruentia in hac demonſtratione intellectui non patet, cum ſe vltrà ęquales rectas parallelas non extendat. Sic Euclides quando vſus eſt hoc Pronunciato Prop.4.Lib.1. Elementorum, non ſolum aequales lineas rectas ſuperponit aequalibus lineis rectis, ſed tales etiam, quae aequales continent angulos, vndè intellectus iudicare poteſt eas ſibi congruere &c. ſed quid dicemus de ſuperpoſitione corporum, quae adhuc magis intellectum fugit? in qua congruentiam aliter imaginari non poſſumus, quam per penetrationem, vt fingantur corpora ſeſe mutuò penetrare, vt ſic tam ſoliditas ſoliditati, quam ſuperficies ſuperficiei, & alij terminini alijs ſibi aequalibus congruant, quod in hac Auctoris demonſtratione non fit; conſtat enim ſolum de congruentia parallelorum planorum, de reliqua ſuperficie, & terminis alijs prorſus nihil inuenit intellectus, in quo conquieſcat. Vſus quidem eſt Archimedes hac ſuperpoſitione Prop. 20. de Conoidibus, & Sphaeroidibus, ſed longè aliter quam noſter Auctor; Archimedes enim aliam aſſumit figuram, quae propoſitae per omnia ſit aequalis, & ſimilis, & eodem prorſus modo ſectam, & ſuperpoſitiones fiunt ſemper magnitudinum aequalium, ità vt de congruentia dubitari facile non poſſit. Verum hac ipſa demonſtratio non videtur arridere Geometris, Commẽtator enim*

Ar-

Archimedis Fed. Commandinus ſilentio illam præterit; Riualtus verò illam tamquam Archimede indignam omittit, eique aliam a ſe excogitatam ſubſtituit, vt monuimus in Scholio Prop. 5. Cap. 2. Lib. huius, & eandem aliter etiam nos demonſtrauimus eodem in loco Prop. 6. Pronunciamus ergò ſecundò Caualerium hanc Propoſitionem, quæ tamen huius libri fundamentum quoddam eſſe videtur, tam de planis, quam de ſolidis figuris legitimè non demonſtraſſe. Propoſitioni huic ſequens ſubnectitur Scholium: Cum antecedens Propoſitio maximi ſit momenti, vt in ſequentibus apparebit, aliuſque modus priorem partem demonſtrandi, ſtylo Archimedeo haud abſimilis, menti ſuccurrerit, idipſum ne pereat in Lemmata diſtributum hic ſubiungere placuit. *Lemmata ergò, & ipſam indè deductam demonſtrationem breuiter examinemus.*

Hic ergò inuehitur Auctor iſte prius contrà mutuam ſuperpoſitionem figurarum in genere, poſterius verò in ſpecie contrà adhibitam in præfata Propoſitione, quam etiam ex hoc capite non fuiſſe legitimè demonſtratam abſolutè pronuntiat. Prius igitur & ipſe de ſuperpoſitione in genere, poſterius verò de hac ſpeciali, diſcurram. Etſi ergò hæc ſuperpoſitio aliquibus minus arriſerit, alij tamen præſtantes Geometræ ipſam approbarunt. Vndè Commandinus in Commentarijs in Euclidem Libro 1. & ad Prop. 4. ſic ait. *Hic demonſtrationis modus, qui fit per ſuperpoſitionem figurarum, præterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum ſcientiarum peritiſſimo, eſt etiam maximo vſui Mathematicis.. Archimedes enim eum vſurpat non ſolum in planis figuris, vt in Libro de centro grauitatis planorum, ſed etiam in ſolidis, vt in Lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus.* Hoc vero neque inficiatur ipſe Riualtus, qui hic in oppoſitum citatur, etenim in Scholio Propoſitionis 20. Lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus inquit. *Sunt .n. qui ſuperpoſitiones illas reijciant in Geometria (quamquam alij, & viri graues admittant, &c.)* Qui tamen nequaquam eas refellere deberet: vel enim demonſtrationes, quæ ſuperpoſitione vtuntur, putat eſſe certas, & infallibiles, vel non. Si primum, quemadmodum in Prolegomenis Commentariorum in Archimedem non diſtinguit inter nobilitatem demon-

monſtrationis oſtenſiuæ, & ducentis ad abſurdum, quia inquit ibi, Mathematicæ diſciplinæ non vtuntur cauſis rei, ſed cognitionis rei (quapropter poſt pauca verba ſubiungit. *Vnde fit vt quodcunque cognitioni fuerit magis conſentaneum, Mathematicis magis conueniat:*) A pari debebit ſuperpoſitionem admittere tamquam certam parientem ſcientiam. Si verò credit ſecundum, erroneam, & falſam hanc 20. Prop. pronunciare debebit, quin & eas omnes, in quibus adhibetur circunſcriptio, & inſcriptio figurarum circà oblatam figuram, quæ videtur eſſe quædam ſuperpoſitio. Idem quoque negabit Prop. 4. Primi Elementorum, & conſequenter eas omnes, quæ ab illa pendent. Sic & noſter Auctor, ſi idem ſentit, falſitatis arguet eas omnes, & ab eis dependentes, Lucæ Valerij Propoſitiones (ab eo inſigniter laudati) in quibus & ipſe ſuperpoſitione vtitur.

Quod ſi quis diceret nec Riualtum, neq; Guldinum negaturos eſſe dictarum Propoſitionem veritatem, ac certitudinem; ſed cum ſuperpoſitio quid mechanicum redoleat, vt inquit ibidem Riualtus, quadocumq; id fieri poſſit, melius eſſe ab eadem abſtinere. Huic ſic obijcienti reſpondere poſſem quemadmodũ Clauius Peletario ſuperpoſitionem damnanti reſpondet, inquiens. *Nam non ſatis intellexiſſe videtur quo pacto Geometræ ſuperpoſitionem illam vſurpent. Neq; enim volunt reipſa faciendam eſſe figurarum ſuperpoſitionem (hoc enim mechanicum quid eſſet) ſed cogitatione tantum, ac mente, quod opus eſt rationis, atq. intellectus.* Vbi inquit illam idcircò in Theorematibus valere, ſed nõ in Problematibus, & paulò poſt ſubdit. *Viderat Peletarius (neq; enim rem adeò manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi*, ideſt per ſuperpoſitionem, *è medio tollat, vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere &c.* Quapropter mirandum eſt hos Auctores ob hanc rationem ab hac ſuperpoſitione abhorrere, quomodo enim mechanicum quid redolere dicemus, quod in euidẽtiſſimo hoc principio fundatur. Quæ ſibi congruunt ſunt æqualia? Neq. enim quia familiaris eſt artificibus hæc ſuperpoſitio, qua congruentiam oculo, vel manu iudice agnoſcunt, putandum eſt

idem

idem in illa Geometrarum ſuperpoſitione contingere, in qua non alius eſt iudex quam intellectus, itaut per hanc illa quodamodo infici, & labefactari poſſit. Nunquam enim ille aſſentitur duas magnitudines inuicem congruere, niſi ex præſuppoſita quorumdam æqualitate, ac mutua, debitaq. ſuperpoſitione, & ſubinde ipſorũ neceſſaria congruenta, iuxta aliud hoc principium, nempè. Quæ ſunt æqualia ſibi congruunt, ſi aptè ſuperponantur, vt apertiſſimè patet in Prop. 4. Primi Elem. Et quidem quid nobis apertius indicare poteſt ęqualitatem quam congruentia? ſi enim, vt inquit Ariſtotiles, quod eſt vnum in ſubſtantia, illud eſt æquale in quantitate, erit ſanè exactiſſima trutina æqualitatis ipſa congruentia, cum ex duabus quantitatibus tunc fiat quodamodo vna.

Liceat autem mihi ad maiorẽ dictorum confirmationem paululum circa huiuſmodi doctrinam immorari. Sæpè enim meditatus ſum num præfata duo Axiomata ſint inuicem aliqua ratione conuertibilia, ita vt æqualitas cõgruẽtiam (ſi aptè fiat ſuperpoſitio) & congruentia ſemper inferat æqualitatem. Si enim congruentia eſt exactiſſima æqualitatis trutina, profectò id valde conueniens eſſe videbatur. Attamen ex alia parte negotium faciebat quod plures quantitates æquales conſiderat Geometra, quæ tamen hoc congruentiæ beneficio neutiquam potiri valent; vt et Proclus innuit in Com. in Euclide Lib. 3. ad Prop. 4. dum examinat illud Axioma. Quæ ſunt æqualia ſibi congruunt, ait enim. *Hoc autem non in omnibus verum eſt ſed in ijs, quæ ſpecie ſimilia ſunt. Specie autem ſimilia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, circumferentia circumferentiæ circuli eiuſdem, & anguli, qui a ſimilibus ſimiliter iacentibus lineis comprehenſi ſunt. Horum autem dico, quod quæ æqualia data fuerint, ſibi inuicem congruunt.* Vt ergo quid circa hoc ſentiam palam faciam, dico ſi geometricarum legum ſeueritatem attendamus, rem ſanè ita ſe habere; at ſi liberiori indultu circa hoc vehimus philoſophari, nihil prætereundum eſſe quod hanc conuertibilitatem aliquo modo coadiuuare poſſit. Quapropter ſi dicatur rectam periphæriæ circuli congruere non poſſe, annuo & ipſe ſtrictè loquendo, ſiq.

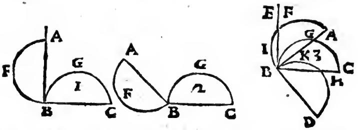
nihil

nihil aliud ſuperaddatur: verum accedat motus, & illius ope animaduertemus nos id aliqualiter obtinere poſſe. Nam ſi circulus reuoluatur ſuper rectam lineam, tūc agnoſcet intellectus ſi non permanenter, ſaltem ſucceſſiuè abſolutam fuiſſe rectæ ad periphæriam congruentiam. Et hic eſt vnus eorum modorum, quibus congruentia aliqualiter intellectui poteſt repræſentari, quem dicere poſſumus, motum ſimplicem.

Huic ſuccedit ſecundus modus, quem voco inflexionem, cum nempè concipimus alteram quantitatum æqualium propoſitarum in partes, ſeu componentia diuidi, quæ abſq. ſeparatione ſingillatim moueantur, & inflectantur ad congruentiam. Vt ſi recta linea quinq. palmorum inflectatur, & complectatur ambitum pentagoni æquilateri, cuius ſingula latera ſint vnius palmi. Sic verò patet quamlibet rectam cuilibet ex rectis compoſitæ adaptari poſſe, illam in tot rectas diuidendo, quot erunt in hac rectæ lineæ. Verum ſi recta ex. gr. æqualis periphæriæ circuli, eidem per inflexionem ſit adaptanda, tunc intelligimus illam rectam diuidendam eſſe in tot partes, ſeu in tot componentia, quæ omnem aſſignabilem numerum excedant; ſi enim illa certo quodam numero clauderentur, cum minimæ particulæ illius rectæ lineæ congruerent periphęriæ circuli, in hac eſſet aliquid recti, quod eſſet abſurdum.

Tertius, & vltimus modus eſt, quem appello fluxionem, ſcilicet cum nedum partes mouentur ad congruentiam, vt fit per inflexionem, ſed etiam loco viciſſim permutantur, nullo tamen ſpatio inter ipſa componentia interiecto (ſi enim hoc fieret, eam fluxionem rarefactioni coniunctam dicere poſſemus) quæ partes permutandæ hic pariter vel certo numero comprehenduntur, vel ſuperant omnem numerum.

Exemplum primi ſuppeditabit angulus cornicularis rectilineo æqualis. Ad cuius intelligentiam ſit, A B C, in prima ſequentium figurarum angulus rectus, in ſecunda obtuſus, & in tertia acutus. Et ſuper diametris æqualibus, BC, BA, ſemicirculi deſcribantur, BGC, BFA. Tandem verò in tertia figura erigantur duæ perpendiculares, BE,



quidem ipſi, BC, & BD, ipſi, BA, quæ ſit æqualis ipſi,BC, ſuper quam deſcribatur quoque ſemicirculus, BHD. Quoniam ergò angulus ſemicirculi, GBC, eſt æqualis angulo ſemicirculi,FBA,appoſito communi, ABG, in prima, & ſecunda figura, & eo ſubtracto in tertia, componetur in illis, & in hac relinquetur, angulus rectilineus, ABC, æqualis curuilineo, ſeu corniculari, FBG; quem ità rectilineo adaptabimus. In prima quidem, & ſecunda figura cum ſit communis angulus mixtilineus, ABG, ſufficit ſuperponere angulum,FBA, ipſi,CBG, ſic enim duæ partes.ſeu duo anguli,FBA,ABG,componentes cornicularem FBG, ad congruentiam aptatæ erunt, & ſubindè totum toti congruere dicemus. In tertia verò figura cornicularis, FBG, per rectam, BE, diuiditur in angulum, FBE, & EBG, angulum contactus. Sed eſt etiam angulus contactus, ABH, quia, AB,eſt, BD, perpendicularis. Ergò poterit,EBG,poni ſuper,ABH,nempè conſtituta,BE,in,BA,& cadente periphęria,BG,ſuper,BH,illique congruet.Similiter cum reliquus, FIBE, ſit æqualis angulo, HKBC, (ſunt enim ſemicirculi anguli,FBA,HBD,æquales,& rectilinei, EBA,CBD, pariter inter ſe æquales,cum,EBC,ABD,ſint recti, vndè ablato cummuni,ABC,relinquuntur æquales ipſi,EBA,CBD,) ſi extendatur, BE, ſuper, BC,periphæria, BIF,cadet ſuper, BKH,vndè duo anguli,FBE,EBG, ideſt totus angulus cornicularis,FBG,poſitus erit ſuper totum rectilineum, ABC, cui pariter congruet. Quod vt cernitur fit per fluxionem duarum partium cornicularem componentium, quæ euerſo ſitu ſuper rectilineum collocantur. Simile quoq. exemplum haberi poteſt in figuris rectilineis æqualibus.

Exem

Exemplum verò ſecundi cerni poteſt ex.gr.in circulo, & quadrato æqualibus, vt enim ſibi congruant fortè infinitas numero partes fluere neceſſe erit, quod ſaltem certiſſimum eſt cum quadratum tantum per fruſta rectilinea intelligemus ſuperponi: nunquam enim compoſitum ex rectilineis numero finitis(quod eſt ſemper rectilineum) congruet curuilineo,ſed neceſſe erit fluere infinita rectilinea, vt circulus, & quadratum ſibi congruant. His ergo modis aliqualiter mihi videtur in figuris ab intellectu congruentiam dictorumq. Axiomatum conuertibilitatem inſpici poſſe, eamq. tamquam exactam æqualitatis trutinam vbiq. recognoſci.

Deniq. quoad ſuperpoſitionem adhibitam in ipſa Prop. prima qualis ſit,quomodoq.intellectui conſtare poſſit, ſatis ſuperius dictum eſt in examine Sectionis 20. & 31. neque enim vt inquit ipſe,quod ſuperponitur in planis ſunt meræ lineæ,ſed ſuperficies:neq.quod ſuperponitur in ſolidis ſunt mera plana,ſed corpora,quorum hic non officit impenetrabilitas,ſumus enim in materia intelligibili,in qua licet hanc penetrationem concipere,ſicuti eam concepit Archimedes, & alij, qui hac ſuperpoſitione vſi ſunt.

CAPVT XII.

Proceditur à Sectione 33. vſq. ad 37. incluſiuè.

CVm in Libro Septimo meæ Geometriæ Propoſitionem primam ſuperius examinatam aliter oſtẽdiſſem; hoc eſt ſtylo Archimedeo,vt de illius veritate quoad figuras planas nullus Studioſo relinqueretur ambigendi locus, hanc quoq. Auctor noſter carpere voluit; quapropter videat prius Lector in Exerc. 2. Pag. 93. demonſtrationem Lemmatis primi, deinde examinet quid cõtra ipsũ obijciat Guldinus in hac Sec. 33. Inquit enim Pag. 347.

Sectio XXXIII. *Lemma hoc eaſdem planè patitur obiectiones, quas ipſa præcedens Propoſitio. Nihil enim demonſtratur de ſuperficiebus, ſed de lineis tantum, & de ſuperficie inter binas æquales rectas intercepta, non ſcimus quales ſint reliqui duo termini, qui vna cum binis rectis parallelis ſuperſi-*

ciem illam claudunt, ſemper enim manent diuiſibiles in infinitum. Huic tamen lemmati medebitur, ſi figuras illas æqualiter analogas deſcriptas ſupponamus per motum parallelæ lineæ illius, quæ dicitur baſis, eo ſcilicet modo, quo Auctor deſcribere docet parallelogramma mixtilinea in demonſtratione lemmatis ſecundi. Sic enim concludere poteſt non de lineis tantum, ſed etiam de ſuperficiebus, quas linea deſcribit mota; & ſic loco puncti, R, aſſumere poteſt partem lineæ curuæ, & aduerſarium ad abſurdum deducere: terminus enim lineæ motæ poſt ſe relinquit non punctum tantum, vt fit in figuris iſtis analogis, ſed lineam, & ipſa linea mota ſemper eſt in loco maiori ſe, hoc eſt in ſuperficie, &c.

Vide quæſo, benigne Lector, num hæc demonſtratio ſit de lineis tantum, & non de ſuperficiebus, vt Auctor putat, cum ipſum, quod hic ſuperponitur ſit ſuperficies, ſimilis enim eſt hæc demonſtratio ei, quam affert Euclides Lib. 1. Elem. ad Prop. 35. Inſimul autem intelliges quam neceſſe ſit has figuras deſcribere per motum parallelæ lineæ, vt demonſtratio concludat de ſuperficiebus, quemadmodum Auctor iſte vellet, perinde ac ſi non ſufficiat earum tradita definitio, ac ſuppoſitio quod ſint figuræ æqualiter analogę, niſi actu deſcribantur. Opponit deinde in eadem Pagina hæc Lemmati ſecundo, quod videas in eadem Exerc. 2. Pag. 95. nempe in Sec. 34. ſic inquiens.

Sectio XXXIV. *In demonſtratione lemmatis huius pag.* 14. *linea 6. dicitur:* Cum ergò figura comprehendens ſpatium, C Q P D, ſuperet ab eo comprehenſam parallelogrammis, BZ, 2 ♁, 3 Ω, △ M, *quod non videtur verum eſſe, ſuperat enim trilineis tantum, BCE, 2 EI, 3 IN, △ N♃, hoc eſt, ſubijcit, parallelogrammo, △ P: ſed qua ratione probetur, aut demonſtretur illa, vel parallelogramma, vel trilinea æqualia eſſe huic parallelogrammo, △ P, cum dicat*, hoc eſt parallelogrammo, △ P, *non apparet. Debet ergò demonſtrari trilinea illa ſimul ſumpta parallelogrammo, △ P, æqualia eſſe, vel minora. Ipſa porrò demonſtratio tota iiſdem ferè difficultatibus ſubiacet, quibus ipſa prima Propoſitio. Cum enim figuræ æqualiter analogæ definiantur tantum per lineas correſpondentes æquales in illis pariter exiſtentes, nihil determinare poſſumus de binis*

alijs

Digitized by Google

alijs lineis, in quibus prædicta lineæ terminantur, quæque vna cum binis parallelis figuram illam conſtituunt: ſola enim puncta intellectui repræſentantur.

Quod figura comprehendens ſpatium, C Q P D, ſuperet ab eo comprehenſam parallelogrammis, B Z, 2 ⊕, 3 ♌, Δ M, intelligendum eſt quod ſuperat ab eo ſpatio comprehenſam, hoc eſt inſcriptam, quam vtiq. ſuperat dictis parallelogrammis. Quod verò parallelogramma, BZ, 2 ⊕, 3 ♌, Δ M, æquentur parallelogrammo, Δ P, tamquam demonſtratu facile, Lectoris induſtriæ relictum eſt, cum penderet hoc ex Lemmate ant. Ex eo enim patet, BZ, ęquari ipſi, E &, nec non, 2 &, ipſi, I ℞, ac, 3 ℞, ipſi, N P, quia dicta parallelogramma bina ſunt in eadem baſi, & æquali altitudine, vnde, Δ P, æquatur ipſis, Δ M, 3 ♌, 2 ⊕, BZ, ſimul ſumptis.

Denique abſurdè hic quoque obijcit, nihil determinari poſſe de binis alijs lineis, quæ cum parallelis figuram conſtituunt, vt ex.gr. de lineis, AQ, DP, quæ cum parallelis, AD, QP, claudunt figuram, AQPD, quia figuræ æqualiter analogæ definiantur tantum per lineas correſpondentes æquales: hoc enim non tollit, quin ipſæ ſint figuræ, & vt tales conſiderari poſſint, vt fit in illius lemmatis demonſtratione, in qua nihil aliud de lineis ex.gr. AQ, DP, opus eſt determinare, niſi quod ſint lineæ, ſiue rectæ, ſiue curuæ, qualiſcumque earum curuitas exiſtat. Vndè non mera puncta in lineis, AQ, DP, ſed & ipſæ lineæ, nulla ſpeciei lineæ facta determinatione (quia hypotheſis nulli certę alligatur) hic conſideratæ fuerunt. Notandum eſt autem in dicta demonſtratione bis duci rectas, ΔX, ΓV, BK, quod aliquis reprehendere poſſet. Verum ſic dubitanti conſiderandum propono, præfatas lineas prius ſupponi ductas vtcumque, ſed baſibus parallelogrammorum æquidiſtantes; poſterius verò ea lege, vt bifariam diuidant parallelogrammorum è regione ſibi reſpondentium altitudines. Rurſus tranſit Auctor ad Lemma 3. in Sec. 35. hæc habens Pag. 348.

Sectio XXXV. *Senſus huius lemmatis eſt fieri poſſe, vt talis ducatur linea tangens; id quod & nos concedimus. Poſſibile præterea eſt inuenire verticem lineæ curuæ in figuram redacta,*

dactæ, & geometricè quidem plurium talium figurarum, de quarum ortu, ac geneſi conſtat, non autem per eam quæ in demonſtratione citatur Propoſitionem Libri Primi, de qua nos in Præfatione Libri Secundi noſtrorum Centrobarycorum. Cum ergo vertex figuræ geometricè inuentus non ſit, neque linea tangens geometricè detur, cadit id, quod huic lemmati ſubnectitur Corollarium. Hinc manifeſtum eſt quomodo ducenda ſit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea exiſtentem contingens, quæ quidem datæ rectæ lineæ ſit æquidiſtans. *Nihil enim manifeſtum eſt quam poſſibilitas.*

Ad hæc patet reſponſio per iam dicta Cap. 4. vbi oſtenſum eſt poſſibilitatem verticis inueniendi in figuris ſatis eſſe. Eſt autem hoc Lemma pag. 98. eiuſdem Exerc. 2. & ibidem pag. 99. eſt Lemmma 4. cui ſic contradicit ibidem in Sec. 36.

Sectio XXXVI. *in demonſtratione huius Lemmatis deſideratur in primis ratio, & modus deſcribendi lineam variè flexuoſam, A N E. per motum rectæ, F E, quæ quidem qua ratione & ſibi ipſi, & lineæ, S A, ſemper eſſe poſſit parallela, capit intellectus: quomodo autem punctum, E, deſcribat illam, ANE, aut aliam diuerſimodè flexuoſam lineam nullis præſcriptis conditionibus, intellectus non videt, maximè cum iam poſita ſit alia curua linea, SROIF, in puncto, F, lineæ, FE, motæ terminata. Dicitur quidem ad punctum, E, eſſe attendendum, vt deſcribat lineam, ENA, cum recta, AE, figuram comprehendentem, quæ propoſitæ figuræ, SPFR, ſit æqualiter analoga iuxtà regulam, F E. Sed quæro per quam viam incedere debeat punctum illud, E, vt vna cum, A E, quæ hic proponitur recta, comprehendat figuram ipſi, S P F R, æqualiter analogam? Si reſpondeatur producendas eſſe lineas, H I, QO, P R, vſque ad rectam, A E, vt ipſam ſecent in punctis, D, C, B, ex quibus in productis abſcindantur, D L, M C, B N, ipſis, H I, QO, P R, æquales; atque per hæc puncta, L, M, N, tranſeundum eſſe puncto, E, quod mouetur, quæ quidem hic pro inſtructione neceſſaria danda omittuntur: Sed quis huic puncto, E, viam monſtrabit inter, E, &, L, inter, L, &, M, inter, M, & N, & inter, N, &, A? Si dicatur plures eſſe ducendas lineas: redibit tamen rurſus eadem quæſtio, ſemper enim manebunt*

ſpa-

ſpatia, per quæ punctum, E ſine duce tranſire debet. Nihil ergò concludemus etiam hoc Lemmate: Multò minus admittetur Corollarium hoc. Hinc habetur figuram, S P F R, ipſi, A N E, æqualem eſſe, & vniuerſaliter figuras planas, in quibus earum regulæ æquidiſtantium quotcunque linearum conceptæ portiones integræ ſunt, inter ſe æquales eſſe. *Ergò vlterius progrediendum erit, quod ſi fecerimus perueniemus ad ipſam, quæ demonſtranda Archimedeo modo promiſſa fuit, Propoſitionem primam, ſupra Propoſitione noſtra quarta relatam, quæ ſub eodem nomine Propoſitionis Primæ Septimi Libri ſic proponitur.*

Suppoſito Lectorem hoc Lemma vbi ſupra vidiſſe, dico in eo, quod ſpectat ad progreſſum puncti, E, vt deſcribat lineam, E L M N A, eodem prorſus modo id perficiendum eſſe, quo Auctor noſter inquit, nẽpè a rectis, H D, Q C, P B, abſcindendo, D L, æqualem ſibi reſpondenti, IH, &, M C, ipſi, Q O, vt &, N B, ipſi, P R.

Hoc verò ſatis Lector ibidem intelligere poteſt, dum dicitur punctum, E, ità in ipſa, F E, incedere debere, vt deſcribat lineam, E N A, cum, A E, comprehendentem figuram æqualiter analogam ipſi, S P F R, regula, F E. Quid enim aliud eſt hoc, quam dicere, producta quacumque recta in, S P F R, aſſumpta, vſque ad, A E, ex eadem punctum, E, in tranſitu abſcindere debere æqualem ei, quæ eſt illi in directum in ipſa figura, S P F R? Et ſiquidem Problematicè id exequendum eſſet, certè omnes lineæ figuræ, S P F R, producendæ eſſent vſque ad, A E, & ex ſingulis abſcindendæ æquales ſibi reſpondentibus: ſed Theorematicè ſufficit ex vna intellectum percipere modum, quo in reliquis id præſtandum ſit. Non enim pro demonſtrationis veritate neceſſe eſt, has figuras æqualiter analogas actu deſcribere, ſed ſufficit intellectui illas ſupponere deſcriptas, quia ex eo, quod in vna recta fieri apprehendit, id in reliquis percipit eſſe poſſibile, & conſequenter nihil abſurdi inferri, ſi iſtæ figuræ tanquam factæ ſupponantur. Cum ergò, & hic Problematis poſſibilitas ſufficiat, nihilominus loquutus ſum tanquam Problematicè id præſtarem (quocumque modo id fieri poſſit) quia hoc demonſtrationis veritati non

derogat.

derogat. Tranſibit ergò punctum, E, inter, E, &,L, inter, L, &, M, &c. non alio duce, quam intellectu, qui percipit ipſum debere ſemper abſcindere rectam æqualem ſibi reſpondenti in figura, S P F R, etſi Problematicè id fortè nonniſi mechanicè, ſtante hac figurarum generalitate, & niſi ad ipſarum ſpecies deſcendamus,exequi ſit poſſibile. Hæc igitur nihil officiunt veritati ſubſequentis Corollarij, quo deindè vſus ſum ad priorem partem Propoſitionis Primæ Libri Septimi meæ Geometriæ demonſtrandam.

Deniq; Auctor inſurgit contra aliam demonſtrationem prioris partis eiuſdem Prop. ant. ex præcedentibus Lemmatibus conſtructam, quam videre licet in eadem Exerc. 2. Pag. 101. Sic autem de eadem effatur in Sec. 37. Pag. 349.

Sectio XXXVII *Oſtenſa quidem in charta per varias figuras (quas qui videre velit ipſummet conſulat Auctorem) ſed non demonſtrata pro communi ſaltem Geometrarum intellectu. Mirabiles quidem oſtendit figuras, quas vocat æqualiter analogas, ſed quæ ſint figuræ æqualiter analogæ, ſi quæramus more Geometrarum definitionem, reſpondetur illas eſſe figuras æqualiter analogas, quæ eas habeant proprietates, quas Prima Propoſitio Libri Septimi illis attribuit, quam retulimus Propoſitione noſtra quarta, Numero primo. Si quæſiero quomodo Geometricè deſcribantur, vnum affertur exemplum in parentheſi demonſtrationis Lemmatis 2. de parallelogrammo tantum hoc modo*; quo pacto data baſi,& curua linea tota in eodem plano cum ipſa baſi,ac vni extremorum eiuſdem conterminante, parallelogrammum curuilineum, ab ijſdem apprehenſum deſcribere docemur. *Quomodo autem reliqua, quæ non ſunt parallelogramma deſcribenda ſint, altum ſilentium. Monetur quidem linea paralleliter alteri,& ad eius extremum vnum attenditur, ſed quid ſit de altero? quod ipſum deberet eſſe via deſcriptionis. Pulchra fuiſſet huius operis ſiuè Lemma, ſiue Propoſitio. Data figura quacumque inter parallelas expoſita, deſcribere ei figuram aliam, quoad perimetrum quidem diuerſimodè diſſimilem, ſed æqualiter analogam.*

Fruſtra Auctor iſte vim facit in hac figurarum æqualiter analogarum geometrica deſcriptione, cum in gratiam demonſtrationis eaſdem vt factas, ſupponere tantum ſuffi-

ciat

ciat, nihil enim ex hoc ſequitur abſurdi, aut impoſſibilis. Quare cum ea, quæ hic opponit, nonniſi hiſce Problematicis deſcriptionibus innitantur, tamquam ex eiuſdem ſententia neceſſarijs, patet incongruè ab eodem pronuntiatum eſſe hanc tantum oſtenſam eſſe in charta per varias figuras, ſed non demonſtratam pro communi ſaltem Geometrarum intellectu, nihil enim apparet, in quo illi hæſitandum ſit. Poſteriorem autem partem eiuſdem Prop. 1. non diſſimili methodo confirmatam videre poteſt ſtudioſus in eadem Exer. 2. à pag. 120. vſq. ad pag. 174.

CAPVT XIII.

In quo examinantur obiecta à Sec. 38. vſq. ad 42. & vlt.

CVm Guldinus ea omnia, quæ in vtraq. Methodo Ind. ipſi negotiũ faciebant protuliſſet, deniq. talem ſubiunxit concluſionem in Sec. 38. & in eadem Pag. 349.

Sectio XXXVIII. *Viſis ergò iſtis, tam in Methodo Indiuiſibilium, quam in hoc Libro Septimo ab Indiuiſibilibus, iuxtà Auctoris ſententiam independente, occurrentibus plurimis difficultatibus, nolumus, neglectis proprÿs noſtris in Libris Centrobarycorum omiſſis parergis, inquirere vlterius; maximè cum hæc inquiſitio facta non ſit, proteſtor, ad confundendum, aut ſupprimendum Auctorem, quem magni facimus, ſed vt ex illis nouis Inuentis aliquid obtineremus, quo Vſum, Fructum, & Gloriam Centri grauitatis augeremus. Quare cum noſtrum propoſitum hac ratione aſſequi poſſe hac vice deſperaremus; incerta enim pro certis proponere nolumus: Ideò hoc labore ſuperſedendum eſſe iudicauimus. Reliqua huius negotÿ in aliud tempus, vti monuimus, ſi Deus vitam, & bonam valetudinem dederit reſeruantes. Modeſtè tamen ipſum Caualerium rogatum volo, ne id vitio vertat, quod ipſe vt fieret vltrò expetierat; & reliqua, quæ in fine Propoſitionis 11 Capitis præcedentis de Keplero diximus, ipſe etiam ſibi dicta eſſe putet: Scopum enim veritatem, eiuſq; cognitionem manifeſtam poſuimus; illum enim attigiſſe.* Hoc Mathematicarum dignitati, ac ſummæ certitudini, quam præ omnibus alijs hu-

manis ſcientijs, nemine Philoſophorum reclamante, ipſæ ſibi vindicarunt, maximè conuenire manifeſtum eſt. *Ipſo illo (in Præfatione Lib. 7.) hoc edicente.*

Quod Auctor iſte vtramq. Methodum Ind. tamquam incertam pronuntiarit, & ideò neglexerit, iam dixi mirandum non eſſe, cum non accuratè, vt ſæpè faſſus eſt, nec totam dictam Geometriam inſpexerit. Quod verò hæc mea cenſere voluerit, æqui boniq. facio, ſolius enim veritatis amore hanc eum ſuſcepiſſe prouinciam facilè mihi perſuadeo. Quod ſi accuratiorem, quam promiſerat, de his quoq. habuiſſet diſquiſitionem, multò gratior hæc fuiſſet: vel enim hæc Indiuiſibilia tamquam geometrica portenta perpetuis tenebris fuiſſent damnata, aut ab eodem quoq. approbata, è tot difficultatum latebris fælicius emerſiſſent. Is verò in eadem Pagina diluit in fine quamdam obiectionem, quam fortè aliquis ex Clauio in fauorem Indiuiſibilium contra ipſum afferre poſſet, quæ eſt huiuſmodi, vt patet in Sec. 39.

Sectio XXXIX. *Vnum tamen hoc loco, id nimirum, quod his omnibus ſcriptis vltimò memoriæ debilitatæ occurrit eſt; quod tam Caualerius, quam alij fortaſſis contrà ea, quæ adhuc diſputauimus obijcere poſſent, quod omninò diluendum ante finem huius Capitis videtur; Chriſtophorum videlicet Clauium, quem in omnibus, & vbiq. quaſi ex profeſſo defendere conſtituimus, vſum fuiſſe in aliquo ſaltem loco hoc, quem nos reiecimus argumentandi modo: Ipſum nimirum ex pluribus punctis concluſiſſe de lineis; immo vſum fuiſſe vocibus iſtis à nobis reprobatis,* omnia puncta, omnes lineæ; *& hoc non tam argumentando induxiſſe, quam vt principium propoſuiſſe, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum ſit, nemoque ſanæ mentis illud negare poſſit. In Scholio enim Propoſitionis* 28. *Lib. Primi Elementorum, vbi axioma,* 3. *Euclidis, quod indicarat tanquam principium aſſumendum non eſſe, demonſtrare conatur Geometricè; poſtquam Procli demonſtrationem (qui idem ſentit) retuliſſet, eamq. non ſatis validam, aut omnibus numeris abſolutam, quaſi reprobraſſet, ipſe Clauius Numero I. hoc ponit principium. Linea cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt.*

Cir-

Circa quam dubitationem non opus erat ipſum laborare,eam enim nunquam in fauorē Indiuiſibilium attuliſſem, cum loco Clauij ſupracitato manifeſtum ſit illum loqui de omnibus lineæ punctis non collectiuè,ſed diſtributiuè ſumptis, perinde ac in definitione circuli dicuntur omnes lineę à centro ad periphæriam ductæ inter ſe æquales, quod manifeſtum eſt non collectiuè, ſed diſtributiuè intelligendum eſſe. Hoc autem dico, ſi loquamur de priori Methodo Ind. in quo ipſa Indiuiſibilia collectiuè ſumuntur. Quoad poſteriorem verò Methodum,in qua vtimur Indiuiſibilibus tamquam diſtributiuè ſumptis, haud negandum eſt potius hunc Clauij loquendi modum ipſis fauere Indiuiſibilibus, quam aduerſari. At Guldinus hæc poſtea ſubiungit in Sec. 40. Pag. 350.

Sectio XXXX. *Ad quod reſpondendum iudico: Si hoc loco omnia puncta ſumantur ſimul collecta, vt facit Caualerius de ſuis punctis,aut lineis,idem de illis dicendum eſſe,quod hoc capite de ijſdem dicimus. Si vero intelligantur per omnia puncta, tot, quot aſſignari poſſunt, adhuc in eadem manemus ſententia, & dicimus nihilominus nihil probari per iſta puncta de linea, quia omnia puncta, cum ſint infinita, aſſignari nequeunt, ea autem, quæ aſſignantur finita, nullam componunt lineam,ſed adhuc ſemper inter duo proxima puncta duci poteſt linea.ſiue recta, ſiue curua, & hoc in infinitum. Ergo nihil conſtat de linea; atq. ex hoc capite claudicat hoc principium.*

Circa hæc autem nō aliud addam,niſi, ſi per tot puncta, quot aſſignari poſſunt, nihil de linea, Clauius concludere potuit: à pari nullum Geometram per tot linearum, quot intra circulum ab eodem puncto duci poſſunt,æqualitatem, de ipſo circulo quidquam concludere poſſe,quia quotcũq. lineæ nullam conſtituere poſſunt ſuperficiem, quemadmodum,inquit ipſe,quotcumq. puncta nullam vnquam faciũt lineam. His verò ibidem ſubdit paulò poſt in Sectione 41. huiuſmodi verba-

Nullus autem dubito Clauium hoc vidiſſe, vel ſi non vidit (nam quandoq. bonus dormitat Homerus) nihilominus tamen ac ſi ſibi, & iurè merito quidem non ſatisfeciſſet per hoc princi-

 pium,

pium, aliud Num. 2. ſubiungit his verbis. Si recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum moueatur, conſtituens in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet alterum illius extremum lineam quoq. rectam. Dignum nimirum Clauio principium, quodq; ſine illo priori intento ſuo & Geometris omnibus ſatisfacit; poteſt enim vt principium per ſe ſolum aſſumi eo in loco, quo Clauius ſupponit 28. Propoſ. Primi Libri Elem. demonſtratas, & ſi opus eſſet ab illis, & alijs Principijs præmiſſis dependens; nulla enim alia indiget probatione: Huic enim ſoli aſſentitur intellectus Geometræ illius, qui ſaltem illa de quibus diximus principia, & Propoſitiones percepit: non priori, licet Clauius addat: Eſt principium hoc æquè clarum, & euidens, atq. antecedens. Eſt enim hoc non æquè clarum, ſed longè clarius; quia per hoc ex motu rectæ lineæ ipſa ſuo vno termino, altero autem ità affixo rectæ alteri lineæ, vt neq; in motu, neq; conſiſtens in ea, aut ab ea dimoueri, aut ipſa linea mota inclinationem mutare poſſit, deſcribit lineam, de qua rectè concluditur eam fore rectam. Illud autem principium, ſi principium dicendum, non niſi ſola, ſolitariaq. aſſignat puncta, quæquidem omnia in eadem erunt linea recta, quę tamen prius cogitetur per duo ſaltem puncta, id quod vltro admittimus, ducta, & quantum opus eſt ad vtramque partem producta: Puncta tamen illa quotquot tandem fuerint; repetimus idem; nullam partem lineæ ductæ conſtituunt, ac proindè nihil ex illis de qualitate lineæ probare aut aſſumere poſſumus. Ergò ſine priori illo principio per poſterius, & reliqua ſequentia Clauius id quod propoſuit ſufficienter demonſtrat. Quod ad tuendam Clauij auctoritatem, & noſtram ſententiam roborandam nunc ſufficiat.

Si prius principium (cui poſterius æquè clarum dixit Clauius, licet hoc neget Guldinus) iuxta eundem repudiandum eſt, poſteriori retento: à pari definitio circuli tradita per æqualitatem linearũ repudianda erit petenta illa tantum, quæ aſſumit reuolutionem rectæ lineæ circa manens punctum, quod nemo non videt quam ſit abſurdum.

Deniq. in Sec. 42. & vltima habitam cenſuram placidis hiſce verbis concludit in eadem Pag. 350.

Sed vt finem tandem deſideratum aliquando attingamus,

cum

cum bona pace & Archimedis, & Euclidis, quos ſingulari honore proſecuti ſumus; immo & Pappi Alexandrini, quem prætermiſimus, Kepleri etiam, & Caualerij, quos vt amicos tractauimus, huic libro quarto, & toti Operi de Centro Grauitatis finem imponimus. Coronidem tamen ſuperimponimus, & Epilogi loco denuò in medium producimus Problema quoddam Arithmeticum, quod Anno 1622. Viennæ ad excitandos noſtros diſcipulos compoſuimus, & per vnum illorum publicè demonſtrare curauimus, ea ratione, vt ſequitur.

Quibus & ipſe addo me hæc ab eo, tamquam ab amico, ſolamq. veritatem affectanti dicta excepiſſe, vt & ſupra innuebam. Namq. amicorum eſt admonere mutuum. Ego enim in maiori lucro reponam amici liberè redarguentis cenſuram, quam blandientis adulatoris aſſenſum. Vndè cum Plauto in Trinummo ſic eum compellare poſſum.

Sed tu ex amicis certis mihi es certiſsimus,
Si quid me ſcis feciſſe inſcitè, aut improbè,
Si id non accuſas tu ipſe obiurgandus es.

Ego autem quoq. non contradicendi ſtudio, aut philautia deceptus, ſed ſolius veritatis amore, quæ obiectis reſponderi poſſe mihi viſa ſunt, ſilentio nequaquam prætereunda eſſe duxi.

CAPVT XIV.

In quo manifeſtatur inſignis quædam vtilitas, quæ ab Indiuiſibilibus in ipſius Guldini Centrobarycam, ni illa reſpuiſſet, poterat deriuari.

CVm noſtri Auctoris regula generalis ſæpius commemorata, quæ in eiuſdem Centrobaryca ponitur Pag. 147. tanti eſſet momenti, quanti in ipſa apparet, tota enim in ea fundatur; vnde nequaquam deceret illam demonſtratiuè non probatam relinquere, mihi monendus erat idem Auctor, dum viueret, quod, niſi renuiſſet, inſigne hoc beneficium ab ipſis Indiuiſibilibus obtinere poterat, ſaltem quoad figuras planas, earumq. Poteſtates. Id verò, eo iam mortuo, nunc reticerem, niſi ipſe dixiſſet Pag. 349. in Scholio

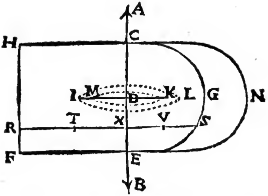
lio

lio ſe huiuſmodi Indiuiſibilia aggreſſum fuiſſe, vt aliquid obtineret, quo Vſus, Fructus, & Gloria Centri grauitatis augeretur, ſed fruſtra laboraſſe. Inquit enim ibidem. *Quare cum noſtrum propoſitum hac ratione aſſequi poſſe deſperaremus &c.* Vt ergo amplius eorum vtilitas appareat Studioſis, hacq. occaſione eiſdem indicetur qua ratione hunc ab Indiuiſibilibus fructum ad Gloriam Centri grauitatis augendam ſibi ipſe comparare potuiſſet, placuit in huius explicationem præſens Caput adiungere. Id verò eò libentius feci, quod non mei, ſed alterius opera & induſtria in huiuſmodi Indiuiſibilium cultura ſtrenuè laborantis, eiuſdem regulæ ſuppetias afferi poſſe demonſtrauit. Is autem fuit acri ingenio prædicus, & inſignis Geometra Ioannes Antonius Roccha, qui duobus annis antequam hic appareret dicta Guldini Centrobaryca præſens Lemma oſtenderat, ac mihi communicarat, à quo præfata Regula pendet, nempè.

Si figura plana ſuper aliqua ſui recta linea figuram ipſam ſecante libretur, erunt momenta ſegmentorum figuræ, vt ſunt ſolida rotunda ab ipſis ſegmentis, circa ſecantem lineam reuolutis, deſcripta.

Huius rationem vnuſquiſq. videre poteſt in Operibus Geometricis Torricellij Problemate 1. de Dimenſione Parabolæ, Pag. 77. Vt verò totam hanc rem percipere quoq. poſſint, qui carent dictis Operibus, ponitur hic ſequens demonſtratio, ex qua dicti Lemmatis veritas manifeſtatur, procedens iuxta mentem eiuſdem Rocchæ.

Supponatur recta, A B, tanquam axis, circa quem reuoluatur quæcumque plana figura, C G E, adiacens ipſi, C E, ſuæ altitudini, vt fiat ſolidum rotundum. Sit autem eiuſdem figuræ, C G E, centrum grauitatis, K, in dicta rotatione deſcribens periphæriam, KM, quam Guldinus appellauit viam rotationis centri grauitatis, K, vt &, K D, radium rotationis. Rurſus lateri, C E, in plano figuræ, C G E, ſit applicatum quodcumque parallelogrammum rectangulum, H C E F, cuius centrum grauitatis ſit, I, & recta, I D, ſit perpendicularis ipſi, A B, nempè ſit radius eiuſdem rotationis



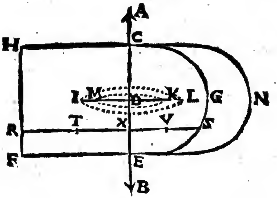
nis. Inſuper extendatur quæcunque recta linea, R S, ipſi, F E, parallela, ita vt eius portio, R X, ſit in parallelogrammo, H E, &, X S, in figura, C G E, quæ bifariam ſecentur in punctis, T, V. Momentum ergo ipſius, R X, ad momentum, X S, ſi vtrǫque circa, X, librari intelligantur, eſt in ratione compoſita ex ratione, R X, ad, X S, & ex ratione diſtantiarum centrorum grauitatis, T, V, earundem linearum, R X, X S, à puncto, X hoc eſt ex ratione ipſius, T X, ad, X V, vel, R X, ad, X S: Facilè enim hoc de quibuſcunque magnitudinibus eiuſdem generis probari poteſt, ex eo quod molium ęqualium momenta ſunt vt diſtantiæ à puncto librationis; & ab eodem æquè diſtantium molium momenta ſunt vt ipſę moles. Duæ autem rationes, R X, ad, X S, componunt rationem quadrati, R X, ad quadratum, X S: ergo momentum rectæ, R X, ad momentum rectæ, X S, eſt vt quadratum, R X, ad quadratum, X S, hoc eſt vt circulus deſcriptus radio, R X, ad circulum deſcriptum radio, X S. Hoc idem verò de cæteris vt ſic aſſumptis ipſi, F E, parallelis in dictis figuris eodem modo probabitur, ſuntque omnia antecedentia æqualia. Ergo momenta omnium linearum, H E, ad momenta omnium linearum figuræ, C G E, parallelarum ipſi, F E, hoc eſt momentum rectanguli,

guli, H E, ad momentum figuræ, C G E, (ijs circa, A B, axim libratis) erit vt omnes circuli, H E, nempè deſcripti tamquam à radijs ab omnibus lineis ipſius, H E, ad omnes circulos figuræ, C G E, nempè deſcriptos tanquam à radijs ab omnibus lineis ipſius, C G E, vt elicitur ex Prop. 26. Libri Secundi Geo. Ind. eiuſque Corollario 3. quæ Propoſitio habetur in Exerc. 1. Pag. 58; hoc eſt erunt vt rotundum ex, H E, ad rotundum ex, C G E, deſcriptum, ex Propo 3. eiuſdem Lib. Secundi.

COROLLARIVM.

Ex præoſtenſis patet veritas prædicti Lemmatis facta collatione ſegmentorum librata figuræ cum parallelogrammo, vt, H E, in eadem cum figura altitudine conſtituto, ac cum ijſdem pariter librato.

HIs demonſtratis remanet oſtendendum quomodo ex his inferatur regula Guldini quoad figuras planas, earumque Poteſtates, quod nunc patefiet. Namque figurarum, H E, C G E, momenta, iuxta ſuperius dicta, ſunt in ratione compoſita ex ratione ipſarum figurarum, H E, C G E, & radiorum, I D, D K, (nam hi ſunt diſtantiæ centrorum grauitatis, I, K, ab axe, A B,) hoc eſt periphæriarum, ſeu viarum notationis, I L, M K. Ergo dicta rotunda erunt in ratione compoſita ex ijſdem rationibus. Sed eædem rationes componunt quoque rationem corporum columnarium, hoc eſt (iuxta appellationem vſitatam in mea Geometria) cylindricorum, qui in baſibus dictis figuris, H E, C G E, altitudinibus verò ijſdem periphærijs, I L, M K, in rectum extenſis intelligi poſſunt, vt à me oſtenditur in Prop. 11. & 14. Libri Secundi dictæ Geo. Ind. explicaturq. in eadem Exerc. 1. num. 22. Ergo rotunda ex, H E, C G E, deſcripta, erunt vt dicti cylindrici. Rotundum autem ipſius, H E, equatur cylindrico in baſi, H E, altitudine periphæria, I L, quod ſic probo. Illud rotundum idem eſt cum cylindrico in baſi circulo radij,



dij, F E, & altitudine, C E. Hic verò cylindricus ęquatur cylindrico in baſi, H E, & altitudine via rotationis, I L, cum vtrique baſes habeant altitudinibus reciprocas. Etenim circulus radij, F E, habetur ex ductu ipſius, F E, in ſemiperiphæriam ab, F E, deſcriptam, hoc eſt in viam rotationis, I L; quia, I D, eſt dimidia ipſius, F E, & ſubinde etiam periphæria, I L, eſt dimidia periphæriæ radij, F E. Parallelogrammum quoque, H E, fit ex ductu eiuſdem, F E, in, E C, vnde vt circulus radij, F E, ad parallelogrammum, H E, ita reciprocè eſt via rotationis, I L, ad, E C. Cum ergo cylindricus in baſi, H E, altitudine via rotationis, I L, æquetur rotundo ipſius, H E; etiam cylindricus in baſi figura, C G E, altitudine via rotationis, M K, æquabitur rotundo ab eadem, C G E, deſcripto, ſunt enim hæc quatuor ſolida proportionalia, vt probatum eſt. Ergo ſi via rotationis, M K, ducatur in ipſam figuram, C G E, fiet rotundum ipſius, C G E. Hoc autem eſt conforme regulæ Guldini, quæ eſt huiuſmodi, nempè:

Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit Poteſtatem rotundam vno gradu altiorem Poteſtate, ſiue quantitate rotata, vt ait Pag. 147. Hoc eſt figura plana producit ſolidum rotundum.

COROLLARIVM I.

Ex hac demonſtratione innoteſcit, ſi propoſita figura plana non adiaceret ſuæ altitudini, qualis eſſe ſupponatur, C G E N C, cuius altitudo ſit, C E, aſſumpta in, A B, cuiq; adiaceat rectangulum, H E; quod tunc per ſupplementum factum à figura, C G E, adiacente ipſi, C E, completa figura, C N E, ipſi, C E, pariter adiacente, eodem modo, quo demonſtratur momenta figurarum, H E, C G E, eſſe vt rotunda ab ipſis effecta, ſic quoque oſtendi poſſe momenta figurarum, H E, C N E, eſſe vt earum rotunda. Vnde patebit, dempto momento figuræ, C G E, ex momento figuræ, C N B, & rotundo ipſius, C G E, ex rotundo, C N E, momenta figurarum, H E, C N E G C, eſſe vt rotunda ex, H E, C N E G C, deſcripta. Hæc ergo erunt in ratione compoſita ex ratione figurarum, H E, C N E G C, & diſtantiarum centrorum grauitatis ab axe, A B, librationis, hoc eſt viarum rotationis. Quapropter vt in ſuperiori demonſtratione concludetur viam rotationis centri grauitatis figuræ C N E G C, in eandem figuram ductam producere rotundum ab ea in rotatione circa, A B, deſcriptum, quomodocunque locetur ad alteram axis partem propoſita figura. Ex quibus manifeſtum euadit regulam Guldini quoad figuras planas, earumque ſolida rotunda vniuerſaliter veram eſſe.

COROLLARIVM II.

Inſuper ex eadem demonſtratione liquidò apparet, ſi pro quadratis, ſeu circulis ab, R X, X S &c. tamquam à radijs deſcriptis, ſubſtituerimus alias quaſcumque planas, ac ſimiles figuras, vni cuidam parallelas, & ab ijſdem, R X, X S &c. tamquam ab homologis deſcriptas, eodem modo, qui ſupra adhibitus eſt, nos concludere poſſe non tantum de ſolidis rotundis, ſed vniuerſaliſſimè de quibuſcunque ſolidis ſimilaribus genitis ex ijſdem figuris, H E, C G E, ut declaratur in ipſa Exerc. 1. num. 17. ea eſſe in ratione compoſita ex ratione genitricium figurarum, & ex ratione radiorum, nempè rectarum

Digitized by Google

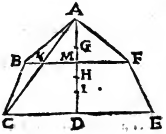
tarum inter axem librationis, & centra grauitatis earundem interceptarum. Ex quo denique patebit etiam per hanc uiam centri grauitatis, ope Indiuiſibilium, ad infinitas ſpecies ſolidorum (ſiue ſint recta, siue etiam ſcalena, nempe etiamſi, A B, non ſupponeretur perpendicularis ipſis, R X, X S, ſeu planis figurarum ab, eiſdem, R X, X S &c. tamquam ab homologis deſcriptarum) proceſſum fieri poſſe, non ſecus ac in methodo Ind. demonſtrationes circa ſolida rotunda ad infinitas ſpecies iugiter ampliari dicebatur in eadem Exerc. prima num. 38.

Scio autem præfata omnia ad ſtylum Archimedeum reduci poſſe (quod ſaltem indicatum Guldino ab ipſis Indiuiſibilibus, ſi illa reſpuiſſet, ſatis poterat deſeruire nempè conuerſa demõſtratione per Indiuiſibilia in Archimedeam, vt ſunt quæcunque per Ind. methodum oſtenduntur: Licet ille vbique affectans demonſtrationis oſtenſiuæ nobilitatem, quam ſola Indiuiſibilia poterant illi ſuppeditare, ab ijſdem recedere non debuiſſet. Fruſtra enim tunc Euclidis, & Archimedis Propoſitiones per abſurdum oſtenſas vt præfata oſtenſiuæ demonſtrationis nobilitate potirentur Libro Quarto reſtauraſſet, niſi & dicta regula generalis oſtenſiuè probata fuiſſet, ſecus enim omnes ab ea pullulantes demonſtrationes vitio radicis laboraſſent.

Hanc quidem regulam pluribus rationibus, ijs tamen non niſi probabilibus, quæ in concordantia cum aliorum inuentis plerumque fundantur, confirmare conatus eſt; hęc verò vbi deficit, remanet manca, & inperfecta demonſtratio, cum ad omnia nequeat ſe extẽdere. Obiter autem innuo, dum hoc nititur probare de ſolidis rotundis Pag. 175. eum ſic procedere. Probat enim conum partialem deſcriptum à triangulo, A B F, ad totum conum deſcriptum, ab, A B C, eſſe vt 1. ad 4. quià illius radius ad huius radium rotationis eſt vt 1. ad 4. hoc eſt, inquit, per Cor. 1. Prop. 3. Cap. 8. Libri Secundi Verum hoc Cor. pendet ex regula generali Pag. 147. quam hic per hoc medium intendit probare.

Deniq; præfatæ rationes non maiorem videntur habere probabilitatem, quam illæ, quas affert Libro Primo eiuſ-

dem Centrobarycæ Pag. 127. vt conſideranti innoteſcet, vbi aſſerit, data Sphæræ, Sphæroidis, aut Conoidis portione, ſi per axem, & centrum baſis ducatur planum, conceptæ figuræ centrum grauitatis eſſe quoquè centrum grauitatis ſuperficierum dictorum corporum, exceptis baſibus. Ait enim hoc ſimilitudinem probare, quam habent hæc ſolida cum Cono, eiuſque fruſta, in quibus eadem ſunt centra figurarum per axem, & conicæ ſuperficiei ſine baſe, vel baſibus; hocque ſubdit per inſcriptionem, et circumſcriptionem ſuperficierum conicarum, &c. probari poſſe. Quod an verum ſit ſubſequens demonſtratio ſatis, puto, indicabit.



Eſto enim triangulus ęquicruris, B A F, in baſe, B F, quam ſecet biſariam, A M, quæ extendatur vtcumque in, D, ſit autem circa, M D, quoque tamquam axim trapezium æquicrure, B C E F, itaut, AB, non ſit in directum ipſi, B C, nec, A F, ipſi, F E. Oportebit ergo iuxta Guldinum centrum grauitatis figuræ, A B C E F, per axem, A D, tranſeuntis, quod ſit, H, eſſe etiam centrum grauitatis compoſiti ex ſuperficie conica, B A F, & fruſti conici, B C E F, ſi currit dicta ſimilitudo, quod videamus an verum ſit. Supponamus centrum grauitatis trianguli, B AF, eſſe, G, & trapezij, B C E F, eſſe, I, quæ erunt quoque centra grauitatis ſuperficierum, nempe, G, conicæ, B A F, &, I, fruſti, B C E F, ſuperficiei per ibidem oſtenſa à Guldino. Erit ergo vt, I H, ad, H G, ita triangulum, B A F, ad trapezium, B C E F, & ita ſuperficies, B A F, ad ſuperficiem, B C E F, quod ſerua. Inſuper triangulus, A B F, ad trapezium, B C E F, eſt vt rectangulum ſub, A M, M B, ad rectangulum ſub, M D, & aggregato ex, B M, C D, (quia his rectangulis ſingillatim æquantur dictus triangulus, & trapezium) hoc eſt in ratione

tione compoſita ex ea, quam habet; A M, ad, M D, & ex ea, quam habet, B M, ad, B M, cum, C D, quod pariter ſerua. Superficies ſimiliter, B A F, æquatur circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter, A B, & B M, ex Archimede Libro primo de Sphæra, & cylindro, Prop. 14. & ſuperficies fruſti conici, B C E F, æquatur circulo, cuius radius medius eſt proportionalis inter, B C, & aggregatum ex, B M, C D, ex eiuſdem Libri Prop. 16. Erit ergo ſuperficies, A B F, ad ſuperficiem fruſti, B C E F, (ſubintellige ſemper ſine baſibus) vt ille circulus ad hunc circulum, vel vt quadratum illius radij ad quadratum radij iſtius, vel vt rectangulum ſub, A B, B M, ad rectangulum ſub, B C, & aggregato ex, B M, C D, hoc eſt in ratione compoſita ex ratione, A B, ad, B C, & ex ratione, B M, ad aggregatum ex, B M, C D. Si ergo triangulus, A B F, ad trapezium, B C E F, eſt vt ſuperficies, A B F, ad ſuperficiem fruſti, B C E F, cum oſtenſum ſit triangulum, B A F, ad trapezium, B C E F, habere rationem compoſitam ex ratione, A M, ad, M D, & ex ratione, B M, ad aggregatum ex, B M, C D, oportebit rationẽ, A M, ad, M D, &, B M, ad, B M, cum, C D, componere eamdem rationem, quam componunt rationes, A B, ad, B C, & B M, ad, B M, cum, C D. Ergo ablata communi ratione ipſius, B M, ad, B M, cum, C D, erit vt, A M, ad, M D, ita, A B, ad, B C, quod eſt abſurdum. Si enim iunxerimus, A C, quę ſecet, B M, productam, ſi opus ſit, in, K, cum vt, A M, ad, M D, ita ſit, A K, ad, K C, erit, A B, ad, B C, vt, A K, ad K C, vnde per Prop. 3. Sexti Elem. angulus, C B K, qui eſt obtuſus erit æqualis angulo, A B K, qui eſt acutus, quod eſſe non poteſt. Non ergo, H, centrum grauitatis figuræ, A B C E F, erit centrum grauitatis ſuperficiei, C B A F E, vt putat Guldinus. Ex quo patet hoc falsũ quoq; eſſe in inſcriptibilibus, & circumſcriptibilibus ſuperficiei ſphęricæ, ſphęrodis, & conoidis parabolici, vnde per has neutiquam intentum Guldinus obtinere potuiſſet.

Si ergo hoc ipſe animaduertiſſet, infimul quoq; agnouiſſet, quam parum in geometricis probabilibus rationibus, ſimilitudinibus, & analogijs, quas & ipſe Keplero exprobrauerat, fidendum ſit. Vnde rationibus demonſtratiuis ſuum

ſun-

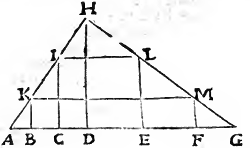
fundamentum probare non neglexiſſet, nec fortè adeò ab Indiuiſibilibus abhorruiſſet, à quibus tantum beneficium vbiq; retenta quæ adeò illi probabatur demonſtratione oſtenſiua obtinere poterat, niſi Archimedeam methodum, quam ob demonſtrationem ad impoſſibile ducentem auerſabatur, proſequi maluiſſet, qua per inſcriptionem, & circumſcriptionem &c. puto, & reliqua pars regulæ de lineis, earumq; Poteſtatibus, vniuerſaliter poterat demonſtrari. Verum hæc cum omni Guldini honore, ac reuerentia dicta eſſe volo, quem ob aureum hoc inuentum, plurimi facio, æternaq; fama dignum & ipſe cenſeo.

CAPVT XV.

In quo ſoluitur quædam difficultas, quæ contra Indiuiſibilia fieri poterat, licet eam Guldinus non animaduerterit, cum alia quadam ab Anonymo obiecta.

INter ea, quę contra Indiuiſibilia ab Auctore noſtro allata fuere, nihil eſt fortè, quod tantam habeat apparentiã, & ex Geometriæ proprijs magis procedat, quam hæc, quæ nunc producetur, licet eam ipſe non viderit, eſt autem huiuſmodi.

Sint duo triangula, H D G, H D A, in eadem altitudine, H D, ſed in baſibus, G D, maiori, &, D A, minori. Ipſi verò, H D, ducantur quotcumq; æquidiſtantes, B K, C I, & per K, I, puncta aliæ ipſi, A G, parallellæ extendantur,



KM,

K M, I L; & per, M, L, pariter ipſi, H D, æquidiſtantes, M F, L E. Quoniam ergo, K F, I E, ſunt parallelogramma, erunt, K B, M F, inter ſe æquales, vt &, I C, L E. Hoc verò eodem modo de quibuſcumq;alijs oſtendetur. Ergo omnes lineæ trianguli, H D A, ęquabuntur omnibus lineis trianguli, H D G, regula communi, H D, Vnde per Prop. 3. Libri Secundi Geo. Ind. quæ ponitur in Exerc. prima Pag.25. triangulus, H D A, erit ęqualis triangulo, H D G, quòd eſt abſurdum. Cum enim, G D, ſit maior, D A, ex hypotheſi, etiam triangulus, H D G, maior eſt triangulo, H D A, per Prop. primã Sexti Elem. Falſa eſt ergo dicta Propoſitio Geo. Ind. ſupracitata, ergo corruunt omnia, quę in illa fundantur, hoc eſt tota huiuſmodi Geometria.

Ad huius ergo ſolutionem difficultatis recolat ſtudioſus ea, quæ dicta ſunt in Exerc. prima, num. 13. 14. 15. ex eis enim intelliget me ſemper omnes lineas planarum figurarũ vſurpare ſub eodem tranſitu, nempe vel ſemper recto, vel ſemper obliquo, qui tranſitus explicatur in dicto Numero 13. Oſtenſum eſt autem num. 15. ex hoc ſequi, ſi non fiant, vel ſupponantur ſub eodẽ tranſitu, non eſſe inuicem ęqualiter diſtantes quaſcumq; duas vnius tranſitus, cum alijs duabus illis reſpondentibus, quæ ſunt alterius tranſitus: & quæ ſunt eiuſdem tranſitus ſemper æqualem diſtantiam inter ſe continere, quæ ſibi è regione reſpondent. Cum ergo duæ, K B, I C, non æqualiter diſtent inter ſe ac duæ, M F, L E, prædictis reſpondentes ideò erunt omnes lineæ triangulorum, H D A, H D G, hac ratione aſſumptæ, perinde ac ſi fierent ſub diuerſis tranſitibus, quapropter excluduntur à definitione, quam tradidi omniũ linearum planarum figurarum. Perperam ergo ſumptis omnibus lineis triangulorum H D A, H D G, mirum non eſt ea æqualia concludi, cum tamen ſint inæqualia. Hanc autem ſolutionem apprimè declarat tela filis contexta, è quã decerpta ſupponantur dicta triangula. Si enim ponamus in H A D, eſſe 100. fila ipſi, HD, parallela; erunt ſignata in, H A, 100. puncta, in triangulo, H A G, alia 100. fila ipſi, A G, æquidiſtantia, & ſubinde in, H G, alia 100. puncta, & in triangulo, H D G, pariter 100. fila. At ſi, D G, ſupponatur ex. gr. dupla

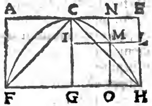
ipſius

Digitized by Google

ipſius, D A, erunt in triangulo, H D G, cum fingatur decerptus ex eadem tela, fila 200. Ergo 100. reliquuntur: quapropter hæc rariora erunt quam fila trianguli, H D A. Ita ergo res ſuo modo ſuccedit in omnibus lineis dictorũ triangulorum vt ſic acceptis, non enim ęqua ratione ſibi reſpondent, quemadmodum fit dum omnes lineę ſumuntur tamquam ſub eodem tranſitu effectæ.

Supradictam difficultatem mihimet obieci, aliam verò fecit quidam Anonymus ex Gallia, quæ, vt ex quodam amico intellexi, talis fuit.

Demonſtratum eſt Coroll. 2. Prop. 19. Libri Secundi Geo. Ind. quod omnes maiores abſciſſę ſint ad omnes abſciſſas in ratione dupla. Prop. 24. eiuſdẽ oſtenſum eſt quadrata omnia maiorum abſciſſarum eſſe ad omnia quadrata abſciſſarum in ratione tripla: Prop. prima Libri Quarti, (cuius Schema hic appono), G H, ſiue, C E, quadratum



ad, IM, aut, CN, quadratũ eſt vt, GC, ad, IC; ideoq; omnia quadrata parallelogrammi, C H, ſiue omnia quadrata maiorum abſciſſarum, C E, ad omnia quadrata dimidiæ parabolæ, C G H, ſiue ad omnia quadrata abſciſſarum, C E, erunt vt reliquę maiores abſciſſæ, G C, ad reliquas abſciſſas eiuſdem, G C. Sed quadratorum tripla eſt ratio, linearum dupla ex demonſtratis: itaq; ratio tripla æqualis eſt rationi duplæ, quod eſt abſurdum.

Ad quam difficultatem reſpondeo nõ benè accipi maiores abſciſſas, & abſciſſas ipſius, C E. Non enim parallelogrammum, C H, exhibet maiores abſciſſas, C E, & ſemiparabola, C G H, eiuſdem abſciſſas, vt putat Anonymus: ſed abſciſſæ exhibentur à triangulo ipſi, C E, adiacente, vt ab ipſo, C E H, (ſi, H E, ſupponatur æqualis ipſi, E C,) & maiores abſciſſæ tunc etiam à parallelogrammo, C H, exponentur, iuxta dicta in præfato Cor. Propoſitionis 19. Libri Secundi, quod habetur in Exerc. prima Pag. 36. Circa quod Cor. vide ibidem dicta num. 25. Cum ergo abſciſsas hic rectè non acceperit, ideò potuit abſurdum ex his

colli-

colligere, quod nempè ratio tripla eſset æqualis rationi duplæ. Verum, vt admonui in dicto nu.25. poſsumus ſine iſtis abſciſſis Propoſitiones demonſtrare, ſi illæ aliqualiter Lectori negotium faciant.

Sed iam tempus eſt vt huic diſsertationi finẽ imponam, in qua non alium ſcopum habui, quam vt ipſa veritas eluceſceret, Indiuiſibiliumq; vſum tibi amplius, benigne Lector, aperirem, quò de his æquius dijudicare poſses. Iam tibi notum eſt quibus rationibus priorem Methodum Ind. probauerim, & ab oppoſitionibus vindicari poſse exiſtimauerim: quod ſi non ſufficiat, habes poſteriorem methodum, liberam à conceptu infinitorum Indiuiſibilium collectiuè ſumptorum. At ſi hæc tibi adhuc non ſatisfaciant, recole quæ iuxta Archimedis ſtylum in confirmationem vſus Indiuiſibilium allata ſunt, præcipuè in Exerc. 2. His enim te omni circa eadem ambiguitate expoliari poſse reor. Hæc ad inueniendum plurimum valere vel ipſe Guldinus faſsus eſt Lib.4.Pag. 331. tu autem quoq; perpende num & ad demonſtrandum recipi poſsint, nempè vel ſub ea forma, qua à me vſurpata fuerunt, vel ſaltem relatiuè ad methodum Archimedeam, iuxta quam confirmata ſunt; ac deniq; eis vtere prout tibi libuerit, in his enim iurgijs, & diſputationibus potius philoſophicis, quam geometricis mihi ferè ſemper ægrotanti, nequaquam quod ſupereſt tempus inaniter terendum eſse cenſeo. Iudices erunt tot præſtantes Geometrę, quot ſcimus hac noſtra ętate florere, quorũ gratiam meis hiſce Indiuiſibilibus conciliare pluribus dictis fruſtra tentauero, niſi ab eiſdem accuratè examinata, eorum ſuffragijs approbentur.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXERCITATIO QVARTA

In qua, ad Indiuiſibilium vtilitatem, & energiam amplius declarandam, vſus eorundem in Poteſtatibus Coſſicis, ſeu Algebraicis explicatur.

INter ea, quæ ſubtiliſſimus Keplerus Geometris inueſtiganda propoſuit, famoſa extat duorum inſignium ſolidorum mēſura, quæ ab eodem in Stereometria Doliorum ſub nomine fuſi parabolici, & hyperbolici (quia ille gignitur ex parabola, hic verò ex hyperbola, ambabus hiſ e figuris circa proprias baſes reuolutis) promulgata fuere. Huiuſmodi ergò ſolidorum menſuræ ſpeculandæ dum aliquando & ipſe incumberem, factum eſt vt mentis ligone geometrici campi terram effodiens, in theſaurum præter omnem expectationem inciderim, maiori apud me in pretio habitum, quam prędictorum ſolidorum anxiè quæſita, & poſtmodum obtenta menſura, vt in ſequentibus apparebit, ſi tamen pro hyperbolico ipſius hyperbolæ quadraturam ſuppoſueris. Cum enim præcipuè fuſum parabolicum animo circumuoluerem, animaduerti illius menſuram haberi poſſe, ſi in propoſito

hac tranſire P. Niceronium, Perſpectiuæ Curioſæ eleganti Opere conſpicuum, quem cum de his certiorem feciſſem, placuit illi & dictæ progreſſionis, & fuſi parabolici rationem Pariſijs proponere inueſtigandam præſtanti Geometræ Ioāni de Beaugrand, quem prius & ipſe de facie noueram. Cumque ego ad alia ſtudia vi coactus non amplius de his cogitarem, en repentè literis erudituſſimi P. Merſennij admoneor dictum Beaugrand è vita ceſſiſſe, ab eoque eiuſdem Beaugrād per Niceronium illi propoſitorum peractam demonſtrationem inſimul recipio. Dolui vehementer tanti ingenij virum, quanti fuiſſe declarant hæ ad me miſſæ demonſtrationes, perijſſe. Qui cum circa hæc laborandi occaſionem præripuiſſet, multò minus de his amplius cogitaui. Denique multo tranſacto tempore iterum ad hæc animum intendens hac occaſione animaduerti doctrinam Lib. Sec. meæ Geom. Ind. quæ tantum circa lineas, & quadrata verſatur, ad omnes poteſtates Coſſicas planarum figurarum extendi poſſe. Operi ergo manum admouens, ſequentes Propoſ. meliori, qua mihi licuit, ſtudui ratione concinnare. Quibus & ipſius Beaugrand inuenta, ne perirent, ac ne tuo dignis ingenio, benigne Lector, te fraudarem, fideliter inſerenda curaui. Hæc ergo omnia in tui commodum elaborata libenti animo excipe, & ſi quæ offenderis, haud ita, vt velles, affabrè diſpoſita, æqui boniq; conſule, &c. Vale.

PRO-

PROPOSITIO I.

In ſerie numerorum ab vnitate continuè proportionalium; ductis inter ſe duobus quibuſcumq; producitur in eadem ſerie numerus, cuius exponens conflatur, ſimul additis exponentibus multiplicatorum numerorum.

VIdeatur ſequens Tabella, in cuius prima ſerie ſunt numeri, 0.1.2.3.4.&c. qui dicuntur exponentes numerorum ab vnitate continuè proportionalium, quos exhibet ſecunda ſeries, nempè, 1.2.4.8.16. &c. Illis verò in tertia ſerie ſubſcribuntur characteres, dignitatum, ſiuè poteſtatum, vt vocant, Coſſicarum, ſeu Algebraicarum, quarũ l. ſignificat latus. q. quadratum. c. cubum. qq. quadratoquadratum. q c. quadratocubum, &c. Eſto ergo ex. gr. quod ducamus q. in c. hoc eſt 4. in 8. Dico fieri qc. nempè 32. cuius exponens 5. fit ſimul iunctis exponentibus 2. & 3. ipſorum q. & c. Quoniam enim vt vnitas ad alterum ductorum numerorum, vt ad 4. ita reliquus ductus 8. eſt ad productum 32. vt patet ex elementis Arithmeticis: ideò tot proportiones æquales primæ proportioni, nempè ei, quam habet 1 ad 2. component proportionem vnitatis ad 4. quot ex iiſdem componunt proportionem ipſius 8. ad 32. nempè duę. Oſtenditur autem numerus dictarum proportionum ab vnitatibus, ex quibus conſtant exponentes numerorum dictarum proportionum, nimirum exponens 1. ſignificat inter vnitatem, & 2. contineri vnam proportionem, exponens 2. indicat duas proportiones inter 1. & 4. & ſic deinceps: ergo ſicuti exponens ipſius 4. nempè 2. ſuperat 0. exponentem vnitatis duabus vnitatibus, ita exponens numeri 8. qui eſt 3. ſuperabitur ab exponente producti 32. per duas vnitates. Erit ergo exponens producti ipſe 5. qui conflatur ex 2. & 3. exponentibus multiplicatorum numerorum 4. & 8.

Tabel-

Digitized by Google

Tabella Poteſtatum Coſsicarum.

Exponentes	0	1	2	3	4	5	6.	7
Poteſtates	1	2	4	8	16	32	64	128
Characteres	0	l	q	c	qq	qc	cc	qqc

COROLLARIVM I.

HInc & in lineis res ſuo modo facilè percipi poteſt. Quod nempè, linea poſita tanquã latere, ſi illa ducatur in ſeipſam producet quadratum, ducta in quadratum faciet cubum, & vlterius procedendo in poteſtatibus imaginarijs, ducta in cubum faciet quadratoquadratum, &c. Sicuti quadratum quoq; ductum in cubum faciet quadratocubum. Cubus in quadratoquadratũ faciet quadratoquadratocubũ, &c.

COROLLARIVM II.

VNde hinc quoque manifeſtum ſit, ſi pro vna linea ſubſtituamus omnes lineas oblatæ figuræ planæ, reſpectu datæ regulæ: vel pro eius quadrato, cubo, quadratoquadrato, &c. eiuſdem figuræ omnia quadrata, vel omnes cubos, vel omnia quadratoquadrata, &c. quod ductis inuicem omnibus lineis oblatæ figuræ in omnes lineas eiuſdem, fient omnia illius quadrata: ſimiliter omnes lineæ ductæ in omnia quadrata facient omnes cubos: eædemque ductæ in omnes cubos facient omnia quadratoquadrata, &c. Sicuti omnia quadrata ducta in omnes cubos facient omnes quadratocubos, vt & omnes cubi ducti in omnia quadratoquadrata facient omnes quadratoquadratocubos, &c. eiuſdem oblatæ figuræ planæ reſpectu datæ regulæ.

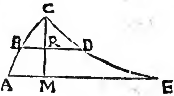
SCHOLIVM.

ADuerto autem quod in poſterum, breuitatis cauſa, pro ſignificandis dictis nominibus, tantum primas literas ſcribemus. Pro linea ergo, quadrato, cubo, quadratoquadrato, &c.

Digitized by Google
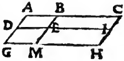
rarum ad o. p. alterius erunt, vt quęcunquè ex poteſtatibus antecedentibus ad ſuam poteſtatem conſequentem.

VNiuerſalior eſt hæc, quam Prop. 4. Lib. Secundi Geomet. Ind. quę habetur quoq. in Exerc. 1. Pag. 27. vbi enim illa de ſolis lineis, vel ſolidorum planis propoſita eſt, hęc extenditur ad o. p. Ita vt aſſumpta denuò illius figura, ſi fuerit ex gr. vt c. AM, ad c. ME, ita c. BR, ad c. RD, concludemus o. c. figuræ, CAM, ad o. c. figuræ, CME, eſſe vt vnum antecedentium ad vnum conſequentium, nempè vt c. AM, ad c. me, vel vt c. BR, ad c. RD.



COROLLARIVM I.

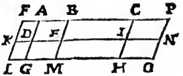
EX hac elicitur parallelogrammorum in eadem altitudine exiſtentium o. p. eiuſdem gradus, vt o. c. vel o. qq. &c. regula baſi, eſſe inter ſe, vt baſium poteſtates eiuſdem gradus. Vt in parallelogrammis, AM, MC, o. qq. parallelogrammi, AM, ad o. qq. parallelogrammi MC, regula, GH, erunt vt qq. GM, ad qq. MH. Ducta enim ipſi, GH, vtcumque parallela DF, eſt qq. DE, ad qq. EF, vt qq. GM, ad qq. MH.



COROLLARIVM II.

SEd & hoc verum eſſe percipitur, ſcilicet factum ſub o. p. parallelogrammi, FM, & ſub o. p. parallelogrammi, AM, ad factum ſub o. p. parallelogrammi, PM, & ſub

o. p. parallelogrammi, C M, eſſe vt factum ſub poteſtatibus, L M, M G, ad factum ſub poteſtatibus O M, M H, vel vt factum ſub poteſtatibus, K E; E

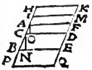


D, ad factum ſub poteſtatibus, N E, E I, exiſtentibus homologis poteſtatibus eiuſdem gradus. Et hoc quia vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia.

PROPOSITIO IV.

Parallelogrammorum in eadem, vel æqualibus baſibus exiſtentium o. p. eiuſdem gradus, regula baſi, ſunt vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata, cum illa ſunt æquiangula.

QVod docet Prop. 10. Lib. Sec. Geomet. Ind. de ſolis q. ſeu figuris ſimilibus, hoc vniuerſaliter pronuntiat hæc Prop. de o. p. Vt in præſenti ſchemate expoſitis parallelogrammis, A D, B D, in eadem baſi, C D, altitudinibus, A O, C N, vel lateribus, A C, C B, baſi, C D, æquè inclinatis. Dico nedum, regula, CD, o. q. eorumdem eſſe vt dictas altitudines, vel latera baſi, C D, æquè inclinata, ſed & o. c. item o. q q. & o. q c. ſeu o. quaſcunque poteſtates eorundem parallelogrammorum. Quod ſic probatur ad modum quo dicta Prop. oſtenſa fuit. Producantur ergo, C A, C B, indefinitè ad partes oppoſitas, ex quibus ſummantur quotcunque partes æquales, A I, I H, nempè æquales ipſi, C A, & B P, æqualis ipſi, B C, compleanturque parallelogramma, A M, I K, BQ. Sunt igitur parallelogramma, C F, A M, I K, in æqualibus altitudinibus, ac baſibus, & ideò ſingulorum



o. p.

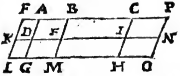
o. p. eiuſdem gradus erunt vt baſium poteſtates hoc eſt æquales. Pari ratione oſtendemus o. p. parallelogrammorum, B D, B Q, eſſe æquales. Altitudines autem parallelogrammorum, C F, A M, I K, ſunt æquales ipſi, A O, & ipſorum, C E, P Q, ipſi, C N. Habemus ergo æquemultiplices primæ, & tertiæ, ſcilicet compoſitum ex altitudinibus parallelogrammorum, C F, A M, I K, & compoſitum ex o. p. parallelogrammorum, C F, AM, I K, quorum illæ ſunt ęquemultiplices altitudinis, A O, ac o. p. parallelogrammorum, C F, A M, I K, ſeu parallelogrammi, C K, ſunt multiplices o. p. parallelogrammi, C F. Sic oſtendemus compoſitum ex altitudinibus parallelogrammorum, B D, P E, tam multiplex eſſe altitudinis, C N, quam multiplex eſt compoſitum ex o. p. parallelogrammorum, B D, P E, ſeu parallelogrammi, P D, o. p. parallelogrammi, B D. Si autem multiplex primæ, nempè aggregatum ex altitudinibus parallelogrammorum, C F, A M, I K, fuerit æquale multiplici ſecundę, nempè aggregato ex altitudinibus parallelogrammorum, B D, P E, hoc eſt ſi altitudo parallelogrammi, C K, fuerit æqualis altitudini parallelogrammi, P D, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, hoc eſt etiam o. p. parallelogrammi, C K, erunt æquales o. p. parallelogrammi, P D, quia illæ ſunt vt poteſtates baſium; ſi maior, maius, & ſi minor, minus. Ergo prima ad ſecundam erit vt tertia ad quartam. Hoc eſt vt altitudo, A O, ad altitudinem, C N, & conſequenter vt quoque, A C, ad, C B, cum hęc baſi, C D, ęqualiter inclinantur (quia tunc triangula, A O C, C N B, ſunt æquiangula) ita erunt o. p. parallelogrammi, C F, ad o. p. eiuſdem gradus parallelogrammi, B D. Quæ etiam verificarentur ſi parallelogramma, C F, B D, eſſent in æqualibus baſibus, vt per ſe patet. Quod, &c.

Cor. 1. ant.

Per ant.

Digitized by Google

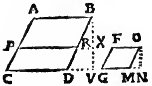
COROLLARIVM.



EX hac innoteſcit, ſi denuò exponatur Schema Corollarij 2. Prop. ant. intelligaturque K N, ſecare vtcumq. altitudinem ex. gr. parallelogrammorũ FM, AM, factũ ſub, o.p. K M, M D, ad o.p. M D, eſſe vt pot. K E, ad pot. E D, hoc eſt vt factum ſub o.p. F E, E A, ad o p E A. Vndè permutando, factum ſub o p. K M, M D, ad factum ſub o p. F E, E A, erit vt o p. M D, ad o. p. D B. Sed hæ oſtenſa ſunt eſſe vt altitudines parallelogrammorum, M D, Per Cor. 2. ant. *D B, ſeu vt latera, M E, E B, aquè ipſi, K E, inclinata. Ergo & factum ſub o. p. K M, M D, ad factum ſub o. p. F E, E A, erit vt dicta altitudines, vel latera, M E, E B. Exiſtentibus tamen eiuſdem gradus tam poteſtatibus parallelogrammorum, K M, K B, interſe, vt &, K E, quam poteſtatibus ipſorum, D M, D B, vt &, D E, interſe, licet hæ eſſent diuerſi gradus à prædictis.*

PROPOSITIO V.

Quorumlibet parallelogrammorum o. p. eiuſdem gradus, regulis baſibus, habent inter ſe rationem compoſitam ex ratione altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum, cum illa ſunt æquiangula; & ex ratione poteſtatum baſium, eiuſdem gradus cum prædictis poteſtatibus.



SInt quæcumq. parallelogrãma, AD, FM, quorũ altitudines, B V, O N, baſes verò, ac regulæ, C D, G M. Dico o. p. parallelogrammi, AD, ad, o. p. parallelogrammi, F M, eiuſdem gra-

gradus habere rationem compoſitam ex ratione altitudinis, B V, ad altitudinem, O N, vel, B D, ad, O M, cum ſunt æquiangula, & ex ratione poteſtatis, C D, ad poteſtatem, G M, eiuſdem gradus cum prædictis poteſtatibus. Hæc autem reſpondet Prop. 2. Lib. Secundi Geomet. Ind. quæ ad modum ipſius tali ratione probatur. Abſcindatur tà, B V, verſus, V, ipſa, V X, ęqualis ipſi, O N, & per, X, ducatur, X P, parallela, C D, ſecans, B D, in, R; erit autem D R, æqualis ipſi, O M, ſi parallelogramma ſint æquiangula, quod facilè probari poteſt. Erit etiam parallelogrammum, P D, in eadem baſi cum parallelogrammo, A D, ſed in eadem altitudine cum parallelogrammo, F M. Igitur o. p. parallelogrammi, A D, ad o. p. parallelogrammi, F M, habebunt rationem compoſitam ex ratione o. p. parallelogrammi, A D, ad o. p. eiuſdem gradus parallelogrammi, P D, ideſt ex ea, quam habet, B V, ad V X, vel, O N; ſeu ex ea, quam habet, B D, ad, D R, vel, O M, ſi parallelogramma ſint æquiangula, & ex ratione o. p. parallelogrammi, P D, ad o. p. parallelogrammi, F M, ideſt ex ratione poteſtatis, C D, ad poteſtatem, G M. Ergo o. p. parallelogrammorum, A D, F M, ſunt in ratione compoſita ex ratione altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum, cum ſunt æquiangula, & ex ratione poteſtatum baſium. Quod, &c. Prop. ant. Cor. 1. Prop. 3.

PROPOSITIO VI.

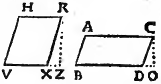
Parallelogramorum, quorum baſium quæcunque poteſtates eiuſdem gradus, altitudinibus iuxta eaſdem baſes aſſumptas, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocantur, o. p. eiuſdem gradus, regulis eiſdem baſibus, ſunt æquales. Et quorum parallelogrammorum, regulis baſibus, o. p. ſunt æquales, baſium quoque poteſtates eiuſdem gradus cum prædictis

alti-

altitudinibus, vel lateribus baſibus æqualiter inclinatis, reciprocantur.

Reſpondet hæc Prop. 12. eiuſdem Libri Sec. Geomet. Ind. ſicque iuxta illius normam de quibuſcunque poteſtatibus probatur.

Sint parallelogramma, H X, A D, quorum baſium, V X, B D, non ſolum quadrata (ad quæ ſola, figuraſque ſimiles, contrahitur dicta Prop.) ſed quæcunque po-



teſtates eiuſdem gradus, altitudinibus, R Z, C O, vel lateribus, R X, C D, æquè baſibus inclinatis, reciprocentur. Dico o. p. parallelogrammorum, H X, A D, eiuſdem gradus cum prædictis, eſſe æquales. Nam o. p. ipſius, H X, ad o. p. ipſius, A D, habent rationem compoſitam ex ratione, R Z, ad, C O, vel, R X, ad, C D, cum parallelogramma ſunt æquiangula, & ex ratione poteſtatis, V X, ad poteſtatem, B D, eiuſdem gradus cum prædictis, hoc eſt per hypotheſim ex ratione, C O, ad, R Z, vel, C D, ad, R X. Duæ autem hæ rationes, nempè, R Z, ad, C O, &, C O, ad, R Z; vel duæ, R X, ad, C D, &, C D, ad, R X, componunt rationem æqualitatis. Ergo o. p. ipſius, H X, erunt æquales o. p. ipſius, A D.

Sint nunc o. p. dictorum parallelogrammorum æquales. Dico baſium, V X, B D, poteſtates eiuſdem gradus cum prædictis, ipſis, R Z, C O, vel ipſis, R X, C D, ęquè baſibus inclinatis, reciprocari. Etenim o. p. ipſius, H X, ad o. p. ipſius, A D, cum illis adęquentur, ſunt vt, R Z, ad, R Z, vel vt, R X, ad, R X. Habet autem, R Z, ad, R Z, deforis ſumpta, C O, rationem compoſitam ex ratione, R Z, ad, C O, & ex ratione, C O, ad, R Z. Ex his ergo componetur quoque ratio o. p. ipſius, H X, ad o. p. ipſius, A D, vel pro, R X, deforis ſumpta, C D, eadem componetur ex rationibus, R X, ad, C D, &,

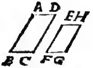
C D,

CD, ad, RX. Sunt autem o. p. HX, ad o. p. AD, in ratione compoſita ex ratione, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD; & ex ratione poteſtatis, VX, ad poteſtatem, BD. Ergo eandem rationem componunt rationes, RZ, ad, CO, &, CO, ad, RZ, vel, RX, ad, CD, &, CD, ad, RX, ei quam componunt rationes, RZ, ad, CO, vel, RX, ad, CD, & poteſtatis, VX, ad poteſtatem, BD. Ablata ergo hinc inde communi ratione, RZ, ad, CO, remanebit ratio poteſtatis, VX, ad poteſtatem, BD, æqualis rationi ipſius, CO, ad, RZ, vel, CD, ad, RX. Igitur baſium poteſtates altitudinibus, vel lateribus æquè baſibus inclinatis, reciprocantur. Quæ oſtendenda erant. Per ant.

PROPOSITIO VII.

Similium parallelogrammorum o. p. quæcunque eiuſdem gradus, regulis homologis lateribus, ſunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, vt eſt multiplex vnitatis numerus exponentis poteſtatis aſſumptæ, vnitate auctus.

HÆc pariter correſpondet Propoſitioni 12. eiuſdem Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ conſimili eiuſdem methodo ſic oſtendetur.



Sint ſimilia parallelogramma, AC, EG, quorum latera homologa, itidemque baſes, BC, FG, ſint regulę. Dico o. p. eorundem eſſe in multiplici ratione proportionis, BC, FG, vt eſt multiplex vnitatis numerus exponentis poteſtatis aſſumptæ, vnitate auctus. Hoc eſt ex. gr. dico eorum o. l. eſſe in ratione duplicata rationis, BC, ad, FG; o. q. eſſe in triplicata, o. c. in quadruplicata, o. qq. in quintupli-

cata,

cata, o. q c. in ſextuplicata ratione eiuſdem rationis, B C, ad, F G, & ſic deinceps in o. p. eorundem parallelogrammorum. Quoniam enim parallelogramma, A C, E G, ſunt ſimilia, ideò erunt æquiangula, & circa æquales angulos habebunt latera proportionalia; ipſa verò, B C, C D; F G, G H, erunt latera æqualiter ad inuicem inclinata, quorum baſes, B C, F G, aſſumuntur tanquam regulæ. Habebunt ergo o. p. ipſius, A C, ad o. p. ipſius,
5. huius. E G, rationem compoſitam ex ratione, D C, ad, H G, & ex ratione poteſtatis, B C, ad poteſtatem, F G, eiuſdem gradus cum prædictis, ideſt ex ratione compoſita ex tot rationibus ipſius, B C, ad, F G, quot vnitates habet exponens aſſumptæ poteſtatis (vnitates enim exponentium ſingulæ indicant ſingulas rationes æquales primæ in inſtituta progreſſione geometrica) quibus rationibus ſi addatur ratio ipſius, D C, ad, H G, quæ eſt æqualis rationi ipſius, B C, ad, F G, hoc eſt ſi prædictis rationibus addatur inſuper vna ratio ipſius, B C, ad, F G; & ſi prædicto exponenti poteſtatis aſſumptæ, pro addita ratione adiungatur vnitas: erunt o. p. ipſius, A C, ad o. p. ipſius, E G, in ratione compoſita ex omnibus dictis proportionibus, hoc eſt ex tot proportionibus ipſius, B C, ad, F G, componetur, quot vnitates habebit dictus exponens vnitate auctus. Ergo ſimilium parallelogrammorum o. p. regulis homologis lateribus, erunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, vt erit multiplex vnitatis numerus exponens aſſumptę poteſtatis, vnitate auctus. Quod, &c.

COROLLARIVM.

H*Inc ſequitur o. p. AC, E G, eſſe vt pot. laterum, B C, F G, vno gradu altiores. Vt o. q. AC, E G, erunt vt o. c B C, F G, o. c. vt o. qq. &c. Nam hæ pot. laterum habent eandem multiplicem rationem ſupradicta rationis laterum.*

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Cuiuſcunque parallelogrammi o. p. regula quocunque latere, ad o. p. eiuſdem gradus, regula altero laterum, cum prædicto latere angulum continente, erunt vt poteſtas primæ regulæ ad poteſtatem ſecundæ: exiſtentibus ambabus hiſce poteſtatibus eiuſdem gradus, & immediatè inferioris gradu eiuſdem parallelogrammi aſſumptæ poteſtatis.



ESto parallelogrammum quodcunque, AD, duæque regulæ, CD, DB. Dico o. p. parallelogrammi, A D, regula, CD, ad o. p. eiuſdem parallelogrammi, eiuſdemq; gradus, regula, D B, eſſe vt poteſtatem ipſius, C D, ad poteſtatem ipſius, DB, ſed his exiſtentibus vno gradu inferioribus aſſumpta parallelogrammi poteſtate. Etenim o. p. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. p. eiuſdem, regula, DB, (perinde ac ſi eſſent duo parallelogramma in baſibus, C D, D B,) habent rationem compoſitam ex ratione ipſius B D, ad, D C, & ex ratione poteſtatis, 5. huius.
C D, ad poteſtatem, D B, eiuſdem gradus cum prædictis. Sed vt, D B, ad, D C, aſſumpta tanquam communi baſi poteſtate ipſius, D B, ſed vno gradu inferiori, ita eſt factum ſub, D B, & hac poteſtate, ad factum ſub, C D, & eadem ipſius, D B, poteſtate. Ergo o. p. parallelogrammi, AD, regula, CD, ad o. p. eiuſdem, AD, regula, DB, & eiuſdem gradus, habent rationem compoſitam ex ratione poteſtatis, CD, eiuſdem gradus ad factum ſub, BD, & poteſtate, BD, ſed vno gradu inferioris, & ex ratione huius facti ad factum ſub, CD, & eadem, BD, poteſtate.



Quapropter o. p. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. p. eiuſdem parallelogrammi, eiuſdemque gradus, regula, D B, erunt vt poteſtas, C D, eiuſdem gradus, hoc eſt vt factum ſub, C D, & poteſtate, C D, vno gradu inferiore, ad factum ſub, C D, & poteſtate ipſius, D B, vno gradu inferioris poteſt. parallelogrammi. Cum verò horum duorum factorum eadem ſit altitudo, nempè, C D, illa erunt vt baſes, ſcilicet vt poteſtates ipſorum, C D, D B, vno gradu inferiores parallelogrammi poteſtatibus. Sed vt illa duo facta, ita oſtenſæ ſunt eſſe o. p. parallelogrammi, AD, regulis, CD, DB. Ergo o. p. parallelogrammi, AD, regula, CD, ad o. p. eiuſdem parallelogrammi, eiuſdemque gradus, regula, DB, erunt vt poteſtas ipſius, CD, ad poteſtatem ipſius, D B, vtriſque tamen vno gradu poteſtatibus parallelogrammi, A D, inferioribus. Hoc eſt ex. gr. o. qc. parallelogrammi, A D, regula, C D, ad o. qc. eiuſdem, A D, regula, D B, erunt vt qq. ipſius, C D, ad qq. ipſius, DB, & ſic in reliquis. Quod, &c. Reſpondet autem hæc Propoſitioni 29. Libri Sec. Geomet. Ind. quæ de ſolis quadratis ibidem enuntiatur.

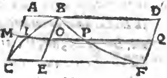
SCHOLIVM.

Qvoniam verò in Exerc. 1. omnes iſtæ Propoſitiones ſuperiorem Propoſitionem 2. ſubſequentes prætermiſſæ fuerunt: ideò ex hìc vniuerſaliter in o. p. parallelogrammorum demonſtratis, intelliget Studioſus illi defectui ſuppleri. Sub hac enim vniuerſali cognitione percipit quoq; hæc ſingulariter vera eſſe prò o. q. figuriſuè ſimilibus datorum parallelogrammorum, reſpectu datarum regularum, ad quæ illæ propoſitiones ibidem tantum extendebantur.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Si duo quæcunque parallelogramma fuerint inter ſe, & cum eiſdem duabus quibuſcunque inſcriptis figuris, in eadem altitudine, regula ſumpta linea, cui altitudo perpendicularis eſt: regulæ verò parallelæ quælibet ductæ in inſcriptis figuris, vel earum quæcunque poteſtates, omnes tamen eiuſdem gradus, fuerint binæ ſemper in eadem ratione. Erunt dictorum parallelogrammorum poteſtates dictarum figurarum poteſtatibus proportionales.



Sint parallelogramma, A E, ED, in eadem inter ſe, & cum ipſis inſcriptis figuris, BCE, BEF, altitudine, regula ſumpta, CF. Ipſi verò, C F, parallelæ quæcunque ductæ in figuris, B C E, BEF, vt, I O, O P, ſint vt, C E, EF, vel harum quatuor rectarum linearum quæcunque poteſtates, omnes tamen eiuſdem gradus, ſint proportionales. Dico o. p. parallelogrammi, A E, ad o. p. figuræ, BCE, fore vt o. p. parallelogrammi, D E, ad o. p. figuræ, BEF. Hoc autem elicitur ex Prop. 3. ſuperiori, per eam enim concluduntur tam o. p. figurarum, B C E, BFE, inter ſe, quam o.p. parallelogrammorum, AE, ED, inter ſe eſſe vt poteſtates, C E, E F, baſium. Ergo illæ erunt inter ſe proportionales, quapropter permutando, o. p. parallelogrammi, A E, ad o. p. figuræ, B C E, erunt vt o. p. parallelogrammi, D E, ad o. p. figuræ, B F A. Et hæc reſpondet propoſitioni 25. Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ ponitur in Exerc. 1. Pag. 56. Quod, &c.

C, ad, D, E, F, vt, G, H, I, ad, K, L, M. Patet ergo propoſitum in his quatuor magnitudinum ordinibus, ſiue tres, ſiue quatuor, ſiue quotcunq; termini exponantur, dummodo æquales numero termini in ſingulis ordinibus, ſibi inuicem correſpondeant. Hæc quoquè demonſtrat Torricellius Probl de Dim. Parabolæ, Lem.18. & 29.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt, ſi, A, B, C, ſint magnitudines. ſingulæ inter ſe æquales, vt &, G, H, I, inter ſe; ideò, A, B, C, ad, D, E, F, eſſe vt, G, H, I, ad, K, L, M. Tunc enim, A, ad, B, eſt vt, G, ad, H, &, B, ad, C, vt, H, ad, I, &c. propter eorum æqualitatem.

SCHOLIVM.

A	F
B	G
C	H
D	I
E	K

SEd & hoc verum eſſe comperitur. Si fuerint quotcunq; magnitudines eiuſdem generis, A, B, C, D, E, & tot aliæ, F, G, H, I, K, pariter inter ſe eiuſdem generis, ſiuè eiuſdem, ſiuè diuerſi à genere prædictorum; & ſi vt, A, ad, B, ita fuerit, F, ad, G; & vt, B, ad, C, ita, G, ad, H, & ſic deinceps in reliquis. Erunt quotcunq; A, B, C, ad quotcunq; D, E, vt aliæ tot, F, G, H, quot, A, B, C, ipſis, A, B, C, correſpondentes, ad tot alias, I, K, ipſis, D, E, correſpondentes.

Namq; cum ſit, A, ad. B, vt, F, ad, G, componendo, A, B, ad, B, erunt vt, F, G ad, G; &, B, ad, C, eſt vt, G, ad, H, ergo ex æquo, A, B, ad, C, erunt vt, F, G, ad, H, & componendo, A, B, C, ad, C, erunt vt, F, G, H, ad, H. At, C, ad, D, eſt vt, H, ad, I. Ergo ex æquo, A, B, C, ad, D, erunt vt, F, G, H, ad, I. Et quoniam, D, ad, E, eſt vt, I, ad, K, ex æquo erunt, A, B, C, ad, E, vt, F, G, H, ad, K. Ergo colligendo conſequentia, erunt, A, B, C, ad, D, E, vt, F, G, H, ad, I, K.

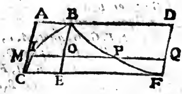
Cum

Digitized by Google

Cum verò, A, B, C, D, E, ſunt eiuſdem generis cum, F, G, H, I, K, quoniam permutando, A, ad, F, eſt vt, B, ad, G, et, C, ad, H, etc. et vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia, idcirco, A B C, ad, F G H, erunt vt, D, ad, I, hoc eſt vt, D, E, ad, I, K, et ideò permutando, patet per viam ant. Prop. A, B, C, ad, D, E, eſſe vt, F, G, H, ad, I, K: licet hoc quoq; manifeſtum ſit per eandem ſuperiorem demonſtrationem.

PROPOSITIO XI.

Expoſitis adhuc omnibus, quæ ſunt in ſchemate Prop. 9. regula, C F, ſit poteſtas, M O, ad poteſt. O I, eiuſdem gradus, vt poteſt. q o. ad poteſt. o p. eiuſdem inter ſe gradus, ſed à prædictis diuerſi. Dico o. p AE, ad o. p. figuræ, B C E, eiuſdem gradus cum poteſt. M O, O I, eſſe vt o. p. D E, ad o. p. figuræ, B E F, eiuſdem gradus cum poteſt. q o, o p.



VT ex. gr. ſit c. MO, ad c. O I, vt q. QO, ad q. OP, & ſic in cæteris ipſi, C F, parallelis. Dico o. c. A E, ad o. c figuræ, B E C, eſſe vt o. q. DE, ad o. q. figuræ, BEF, licet ſint poteſtates diuerſi gradus. Hoc autem patet per Cor. Propoſitionis ant. Habemus enim quatuor ordines magnitudinum, in quibus ſunt termini numero æquales, hoc eſt quot in vno tot in alio ordine, & ſunt æquales magnitudines primi ordinis, nempè o. c. A E, ſinguli inter ſe, vt & tertij ordi-

nis

nis, nempè o. q. D E, ſingula inter ſe ſunt æqualia; & quæcunq; magnitudo primi ordinis, vt c. M O, ad ſibi reſpondentem in ſecundo ordine, nempè ad c. O I, eſt vt correſpondens in tertio ordine, ſcilicet vt q. Q O, ad ſibi reſpondentem in quarto ordine, nempè ad q. O P. Ergo o. c. AE, ad o. c. figuræ, B E C, erunt vt o. q. DE, ad o. q. figuræ, B E F. Quod, &c.

COROLLARIVM I.

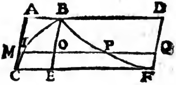
Ex hac intelligitur, expoſito quocumque parallelogrammo, cum illi inſcripta figura, vt in eodem ſuperiori Schemate parallelogrammo, A E, cum figura, B I C E, ſumptaque regula baſi, C E, facta ſub o. p. parallelogrammi, A E, ad inſtar altitudinis; & ſub alijs quibuſcunque o. p. eiuſdem parallelogrammi, A E, tanquam baſi, necnon ſub eiuſdem o. p. A E, vt communi altitudine, & ſub o. p. figuræ, B I C E, vt alia baſi, eiuſdem tamen gradus cum poteſt. A E, tanquam altera baſi, eſſe vt o. p. A E, & inſcripta figura, B I C E, prædicti gradus. Vt ex. gr. ſi ſumamus o. q. A E, tanquam communem altitudinem, & concipiamus duo facta, vnum nempè ſub o. q. A E, & ſub o. qc. eiuſdem, A E, vt baſi; aliud verò ſub eiſdem o. q. A E, & ſub o. qc. figuræ, B I C E; erit primum factum ad ſecundum, vt o. qc. A E, ad o. qc. figuræ, B I C E. Hoc enim deducitur ex eodem Cor. Prop. ant.

COROLLARIVM II.

Patet inſuper eadem verificari, etiamſi baſis data figuræ non æquaretur ipſi, C E, (tunc autem non eſſet inſcripta) currit enim in hoc quoque caſu ratio eiuſdem Corollarij.

CO-

Digitized by Google



COROLLARIVM III.

SImiliter ſi prò communi altitudine ſumerentur non o. p. parallelogrammi, A E, ſed alterius cuiuſcunque parallelogrammi in eadem cum, A E, altitudine conſtituti, vt o p. ipſius, E D, pateret ob eandem rationem factum ex gr. ſub communi altitudine o. q parallelogrammi, E D, & ſub baſi o. qc. parallelogrammi, A E, ad factum ſub eadem altitudine, & ſub o. qc. datæ figuræ, eſſe vt o. qc. parallelogrammi, A E, ad o. qc. datæ figuræ.

COROLLARIVM IV.

AC denique ſi fieret collatio eiuſdem parallelogrammi, vt, A E, cum duabus quibuſcunque figuris, vt, B C E, B F E, cum ipſo æqualtis, conſtaret eadem ratione hæc duo facta, nempè ſub altitudine ex. gr o q parallelogrammi, A E, baſibus verò o qc figurarum, BCE, BFE eſſe vt o. qc. earundem figurarum. Namque factum ſub o. q A E, & o qc B C E, ad factum ſub o q A E, & ſub o. qc. eiuſdem, A E, eſt vt o. qc. figuræ, B C E, ad o. qc A E, per dicta in Cor. 1. & 2. ſuperiori. Sed factum ſub o. q. A E, & ſub o. qc. A E, ad factum ſub o q. A E. & ſub o. qc figuræ, B F E, eſt vt o. qc. A E, ad o. qc. figuræ, B F E, per eadem Corollaria.

Ergo

Ergo ex æquo factum ſub o. q. A E, & ſub o qc. figura, B C E, ad factum ſub o. q. A E, & ſub o. qc. figura, B F E, erit vt o. qc. figura, B C E, ad o. qc. figura. B F E, & ſic in cæteris pot. Hæc eadem verò, ſed tantum circa rectangula attinguntur quoque Lib. Septimo Geomet. Ind. ad Prop. 13. & in eiuſdem Corollarijs.

PROPOSITIO XII.

Quæcunque ſectio fit in propoſita quacunque recta linea, eiuſdemque poteſtatibus quibuſcunque; eadem ſubintelligitur fieri in o. l. earumque poteſtatibus eiuſdem gradus, cuiuſcunq. oblatæ planę figurę.

VT ex.gr. ſicuti in Prop. 23. Lib. Sec. Geo. Ind. quæ habetur in Exer. 1. Pag. 46. & cuius Schema denuò hic apponimus, dum probatum præſupponebatur Secundo Elem. ſecta linea, vt, B D, in puncto, F, q. B D, æquari quadratis, B F, F D, & duobus rectangulis, ſeu factis, ſub, BF, FD, hoc ipſum extendimus ibidem ad figuram, ABIDA, dicentes in eiuſdem Corollarij Sec. 4. o. q. figuræ, ABIDA, per vnicam lineam, AFI, diuiſæ, æquari o. q. figurarum, A B I, A I D, & duobus rectangulis, ſeu factis ſub dictis figuris, ABI, AID: ita ſi ſciamus ex.gr. in quę fruſta diuidatur, ſeu reſoluatur qq. ipſius, BD, ſectæ vtcumq. in, F, intelligemus in talia quoq. fruſta diuidi poſſe, ſeu reſolui per lineam, A F I, o. qq. figuræ, A B C D A, regula, B D, & ſic in reliquis poteſtatibus quibuſcunque. Quod, &c.



PROPOSITIO XIII.

Si recta linea in vno puncto vtcumque ſecta ſit, q. totius æquatur quadratis partium, ac duobus factis ſub partibus.

HOc oſtenditur ab Euclide Libro Secundo Elem. Prop. 4.

PROPOSITIO XIV.

Si recta linea in vno puncto vtcunque ſecta ſit, c. totius æquatur cubis partium, ac tribus factis ſub qualibet partium, & q. reliquæ. Vel æquatur cubis partium, & tribus factis ſub tota, & ducto partium inter ſe.

HÆc à me demonſtratur Lib. Sec. meæ Geomet. Prop. 38. quæ inde petatur.

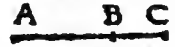
PROPOSITIO XV.

Si recta linea in vno puncto vtcumque ſecta ſit, qq. totius æquatur qq. partium, vnacum 6. factis ſub q. partium, & 4. factis ſub ſingulis partibus, ac c. reliquæ partis.

HAnc & ipſe methodo Euclidiana ſic oſtendo. Sit recta, A C, diuiſa vtcumq. in, B, Dico qq. ipſius, A C,

Digitized by Google

A C, æquari qq. A B, &c, B C, vna cum 6. factis



ſub q. A B, & q. B C, ac 4. factis ſub, C B, & c. B A, ac 4. factis ſub, A B, & c. B C. Namque qq. A C, hoc eſt factum ſub, A C, & c. A C, (quia exponentes lineæ, A C, & c. A C, ſunt 1. & 3. qui ſimul iuncti faciunt 4. exponentem qq. qua ratione intelligemus aliquando commutari poteſtates) æquatur factis ſub partibus, A B, B C, & 2. huius. eodem c. A C. Cum verò c. A C, ſecetur in c. A B, c. B Per ant. C, ter factum ſub, A B, & q. B C, ac ter factum ſub, C B, & q. B A; ideò factum ſub, A B, quantitate indiuiſa, & ſub c. A C, quantitate diuiſa, æquabitur facto ſub, A 2. huius. B, & ſingulis partibus diuiſæ. Hoc eſt factum ſub, A B, & c. A C, æquabitur facto ſub, A B, & c. A B, nempè q q. A B, item ter facto ſub, A B, & ducto ipſius, A B, in q. B C, hoc eſt ter facto ſub q. A B, & q. B C; inſuper ter facto ſub, A B, & ducto q. A B, in, B C, ſcilicet ter facto ſub, C B, & c. B A, & ſemel ſub, A B, & c. B C. Similiter factum ſub, B C, & c. A C, æquabitur facto ſub, B 2. huius. C, & c. D C, ideſt qq. B C, item ter facto ſub, B C, & ducto ipſius, B C, in q. B A, hoc eſt ter facto ſub q. A B, & q. B C; inſuper ter facto ſub, B C, & ducto q. B C, in, B A, hoc eſt ter facto ſub, A B, & c. B C, & ſemel ſub, B C, & c. B A. Hæc verò omnia ſimul iuncta faciunt qq. A B, qq. B C, 6. facta ſub q. A B, & q. C B, 4. facta ſub, C B, & c. B A, ac 4. facta ſub, A B, & c. B C, quibus æquatur qq. A C. Quod, &c.

SCHOLIVM.

CVm ad ea, quæ mihi demonſtranda propoſueram non eſſet neceſſe procedere vltra qq. propterea quæ in reliquis poteſt. oſtendi poterant prætermiſi. Verum tamen eſt quod ſi quis voluerit per hanc viam Euclidianam procedere, difficiliorem ſemper eam offendet in altioribus pot. propter factorum varietatem, ac multiplicitatem occurrentem. Facilius autem hoc obtinebit per multiplicationes Algebraicis

Ll 2 *fami-*

Digitized by Google

familiares, quas exhibet ſequens Tabella. In ea autem per, a. b. intelligimus partes data lineæ: nempe per a. partem, A B, & per b. partem, B C; quas multiplicamus in ſeipſas, & adinuicem, ſicuti & hinc facta iterum per a. b. multiplicari ſupponimus, & ſic deinceps in infinitum, in qua pariter trium præcedentium Propoſitionum veritas apparet.

l	a ✱ b a ✱ b						
	aq + a a	in b in b	 + bq				
q	aq + a 2 a + b	in b	+ bq				
	ac ✱ aq 2 aq	in b in b	+ a + a 2	in bq in bq	 + bc		
c	ac + aq 3 a + b	in b	✱ a 3	in bq	+ bc		
	aqq + ac 3 ac	in b in b	+ a q 3 ✱ a q 3	in bq in bq	+ a + a 3	in bc in bc	 + b qq
qq	aqq + ac 4	in b	+ aq 6	in bq	+ a 4	in bc	+ bqq

Et ſic infinitum.

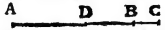
PROPOSITIO XVI.

Si recta linea biſariam, & non biſariam ſecta fuerit, quadrata inæqualium partium æquantur 2. q. dimidiæ, & 2. q. ſectionibus intermediæ.

HAEc oſtenditur Libro Secundo Element. Propoſitione 9.

PROPOSITIO XVII.

Si recta linea bifariam, & non bifariam ſecta fuerit, Cubi inæqualium partium æquantur 2. c. dimidiæ lineæ, & 6. factis ſub ipſamet dimidia, & ſub q. ſectionibus interiecta.



HAnc etiam more Euclidiano ſic demonſtro. Sit recta, A C, diuiſa bifariam in, D, & non bifariam in, B. Dico c. A B, cum c. B C, æquari 2. c. A D, & 6. factis ſub, A D, & q. D B. Etenim c. A B, æquatur c. A D, c. D B, & 3. factis ſub, A D, & q. D B, vna cum 3. ſub, B D, & q. D A. Sed 3. facta ſub, A D, vel, C D, & q. D B, æquantur 3. factis ſub, C B, & q. B D, & 3. c. B D. Similiter 3. facta ſub, B D, & q. D A, vel q. D C, æquantur 3. factis ſub, B D, & q. D B, ideſt 3. c. D B; item 3. factis ſub, D B, & q. B C, & 3. ſub, D B, & 2. rectangulis, D B C, ideſt, 6. ſub, D B, & rectangulo, D B C, nempè 6. ſub, C B, & q. B D. Vnde colligendo partes c. A B, inueniemus ipſum æquari 9. factis ſub, C B, & q. B D, 3. ſub, D B, & q. B C, 7. c. D B, & vni c. A D. Simul autem iungendo vnum c. D B, cum c. B C, in principio habito, cum 3. factis ſub, D B, & q. B C, & cum 3. factis ſub, C B, & q. B D, fit c. D C, vel c. D A, & remanent 6. c. D B, & 6. facta ſub, C B, & q. B D, quæ componunt 6. facta ſub, C D, vel, A D, & q. D B, & prius habebamus c. A D. Ergo c. A B, cum c. B C, æquatur, 2. c, A D, cum 6. factis ſub, A D, & q. D B. quod, &c.

14. huius

2. huius.

2. huius.

14. huius

2. huius.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea biſariam, & non biſariam ſecta fuerit qq. inæqualium partium æquantur 2. qq. dimidiæ, 2. qq. ſectionibus interiectæ, & 12. factis ſub q. dimidiæ, & ſub q. eiuſdem ſectionibus interiectæ.



SIt pariter recta, A C, biſariam ſecta in, D, & non biſariam in, B. Dico qq. A B, cum q q. B C, æquari 2. qq. A D, 2. qq. D B, & 12. factis ſub q. A D, & ſub q. D B. Namque qq. A B, æquatur qq. A
15.huius D, qq. D B, 6. factis ſub q. A D, & q. D B, 4. factis ſub, A D, & c. D B, vna cum 4. factis ſub B D, & c. D A. Seruentur ex his qq. A D, & qq. D B, ac reliqua examinentur. Sunt ergo 6. facta ſub q. A D, hoc eſt ſub q. D C, &
4. huius. ſub q. D B, æqualia 6. factis ſub q. D B, & ſub eodem q.
13.huius D B, hoc eſt 6. qq. D B; item 6. factis ſub q. DB, & q.BC, & 6. factis ſub q. D B, & ſub 2. rectangulis, D B C, nempè 12. factis ſub q. D B, & rectangulo, D B C, ideſt 12.factis
2. huius. ſub, C B, & c. D B. Et 4. facta ſub, AD, vel, CD, & c.DB, æquantur 4. factis ſub, C B, & c. B D, & 4. factis ſub, D
2. huius. B, & c. D B, hoc eſt 4. qq. D B. Inſuper 4. facta ſub, BD,
14.huius & c. D A, vel c. D C, æquantur 4. factis ſub, B D, & c. D B, hoc eſt 4. qq. DB, & 4. factis ſub, B D, & c. B C; item 4. factis ſub, D B, & ducto ipſius, D B, in 3. q. B C, ſcilicet 12. factis ſub q. D B, & q. B C, & 4. factis ſub, B D, & ducto 3. q. D B, in, B C, ideſt 12. factis ſub, C B, & ſub c. B D. Collectis ergo partibus qq. A B, & ſeiunctis, quæ ſunt eiuſdem generis, inueniemus ipſum reſolui in ſeruatum qq. A D, in 15. qq. D B, in 18. facta ſub q. D B, & q. BC, in 4. facta ſub, D B, & c. B C, ac in 28. facta ſub, C B,

in

in c. B D, quibus iungendum eſt vnum qq. BC. Nunc ergo ſecernamus vnum qq. A D, ſeruatum, ac 2. qq. DB. Cum verò hæc ſint 15. remanebunt 13. qq. D B. Videamus ergo qualiter ex reſiduis componantur vnum qq. A D, & 12. facta ſub q. A D, & q. D B. Iungatur qq. B C, cum vno qq. B D, cum 6. factis ſub q. C B, & q. B D, cum 4. factis ſub, C B, & ſub c. B D, & cum 4. factis ſub, D B, & ſub c. B C, quæ componunt qq. C D, vel, D A; & remanebunt adhuc 24. facta ſub, C B, & ſub c. B D, 12. facta ſub q. C B, & q. B D, cum 12. qq. D B. Sed 12. facta ſub q. D B, & q. B C, 24. facta ſub, C B, & c. B D, idest 24. facta ſub q. D B, & ſub rectangulo, D B C, idest 12. facta ſub q. D B, & 2. rectangulis, D B C, cum 12. factis ſub eodem q. D B, & q. D B, ſcilicet cum 12. qq. D B, conſtituunt 12. facta ſub q. D B, & ſub q. D C, vel ſub q. D A. Ergo qq. AB, cum qq. BC, æquatur 2. qq. AD, 2. qq. DB, & 12. factis ſub q. A D, & ſub q. D B. Quod, &c.

15. huius

2. & 13. huius.

C O R O L L A R I V M.

Has autem æquationes transferri quoque poſſe ad o. q q. figuræ cuiuſcunque, iuxta datam regulam, in qua o. l. bifariam, & non bifariam ſectæ ſint, vt & eas, quæ in proximis 4. Propoſitionibus conſideratæ fuerunt, ad ſimiles figuræ datæ poteſtates pariter extendi, patet per Propoſ. 12 ſuperiorem.

S C H O L I V M.

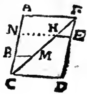
Cvm verò propter demonſtranda mihi non opus eſſet procedere vltra qq. vt ſuperius dixi, propterea in his quoque Prop. conſtiti in ipſis qq. Verum ſi quis vlterius procedere velit, id ei licebit facilius per multiplicationem conſuetam in Algebra vt ſupra quoque innuebatur, & vt amplius patebit inferius.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Si in quocunque parallelogrammo ducatur diameter, baſiſque ſumatur prò regula: omnes lineæ parallelogrammi duplæ erunt omnium linearum cuiuſuis factorum triangulorum.

PAtet hæc per dicta in Prop. 19. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 35. Cum enim ibi oſtẽdatur circa illius Schema (quod hic denuò exhibetur) o. l. triangulorum, A C F, F C D, regula, C D, inter ſe adæquari, ideo, componendo, o. l. vtriuſque trianguli, hoc eſt o. l. parallelogrammi, A D, duplæ erunt o. l. cuiuſuis triangulorum, ACF, F C D. Quod, &c.



PROPOSITIO XX.

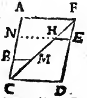
In eodem Schemate, regula eadem: omnia quadrata parallelogrammi, A D, tripla erunt omnium quadratorum cuiuſuis dictorum triangulorum, A C F, F C D.

HAEc oſtenditur in Prp. 24. Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 50.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

In eodem Schemate, regula eadem: omnes cubi parallelogrammi, A D, quadrupli erunt omnium cuborum cuiuſuis dictorum triangulorum, A C F, F C D.



ETenim o. c. parallelogrammi, A D, æquantur o. c. triangulorum, A C D F, F C D, & 3. factis ſub, o. l. trianguli, AC F, & ſub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, A C F. Sunt autem o. c. A D, hoc eſt factum ſub o. l. A D, & ſub o. q. A D, ad factum ſub ijſdem o. l. A D, & ſub o. q. trianguli, F D C, vt o. q. parallelogrammi, A D, ad o. q. trianguli, F D C (quia communis eſt altitudo, nempè o. l. A D,) hoc eſt in ratione tripla. o. c. ergo, A D, tripli erunt facti ſub o. l. A D, & ſub o. q. F D C, trianguli: & hoc æquatur facto ſub o. l. trianguli, F A C, & ſub o. q. trianguli, F D C, vna cum facto ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. eiuſdem trianguli, F DC, hoc eſt vna cum o. c. trianguli, F D C. Ergo o. c. A D, tripli erunt o. c. trianguli, F D C, & facti ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F D C. Quapropter reſoluendo o. c. A D, in ſuas partes, erunt o. c. A C F, o. c. F C D, 3. facta ſub o. l. trianguli, ACF, & ſub o. q. F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, A C F, tripli o. c. F C D, ſimul cum facto ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F D C. Sed & 3. facta ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F C D, ſunt tripla vnius iſtorum factorum. Ergo & reliquum reliqui triplum erit. Nempè o. c.

14. huius Cor. 18. huius.

Cor. 1. 11. huius

2. huius.

14. huius & Cor. 18. huius

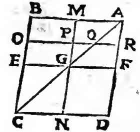
ACF, o. c. FCD, & 3. facta ſub o. l. trianguli FCD,& ſub o. q. trianguli, FAC, ſimul, tripli erunt o. c. trianguli, FCD. Sunt verò o. c. trianguli, ACF, cum o. c. trianguli, FCD, dupli o. c. trianguli, FCD, ergo reſiduum, ſcilicet 3. facta ſub o. l. trianguli, FCD, & ſub o. q. trianguli, ACF, æqualia erunt o. c. trianguli, FCD. Quapropter 3. facta ſub o. l. trianguli, FAC, & ſub o. q. trianguli, FCD, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, FCD, & ſub o. q. trianguli, FAC, & cum o. c. triangu-
14.huius & Cor. lorum, FAC, FDC, hoc eſt o. c. parallelogrammi, AD,
18.huius quadrupli erunt o. c. trianguli, FCD, vel trianguli, FAC. Cum enim factum ſub o. l. ACF, & o. q. FCD, æquetur facto ſub o. l. FCD, & o. q. ACF, propter æqualitatem coalternè reſpondentium linearum, & quadratorum in ipſis triangulis, FAC, FCD, ideo 3. facta ſub, o. l. ACF, & o. q. FCD, 3. factis ſub o. l. FCD, & o. q. FAC, adæquantur. Vnde patet, &c. Quod, &c.

PROPOSITIO XXII.

Similiter in quocunque parallelogrammo ducta diametro, ac regula baſi: omnia quadratoquadrata parallelogrammi quintupla ſunt omnium quadratoquadratorum cuiuſuis triangulorum per ipſam diametrum conſtitutorum.

SIt parallelogrammum, BD, in eoque ducta diameter, AC, & regula, CD. Dico o. qq. BD, eſſe quintupla o. qq. trianguli, ACD, vel, ABC. In hac autem methodum ſequar Propoſitionis 24. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ eſt in Exerc. 1. Pag. 50. Quoniam verò illa vtitur Prop. 22. eiuſdem, ideò, & in hac eandem Prop. 22. adhibebimus, ſed quatenus illa quoque de o. p. verificatur, & ſubinde de o. qq. Hoc enim facilè oſtendetur, ſi in eadem

Prop.



Prop. 22. quæ habetur in Exerc. 1. pag. 40. vbicunq; aſſumuntur o. q. ſubſtituantur o. p. & vniuerſaliter pateſiat in illius Schemate exceſſum o. p. figuræ circumſcriptæ triangulo, O E S, ſuper o. p. inſcriptæ, æquari o. p. (ſubintellige o. p. eiuſdem gradus cum tota hac Prop.) parallelogrammi D S, regula, E S. Namq; o. p. L P, vel, G Q, cum exceſſu o. p. G Q, ſuper o. p. G Q, faciunt o. p. G Q, vel, I R: & hæc cum exceſſu o. p. F R, ſuper eaſdem, faciunt o. p. F R, vel, H S: ac deniq; o. p. H S, cum exceſſu o. p. D S, ſuper o. p. H S, faciunt o. p. D S. Cætera verò omnia pendent ex ſuperioribus Prop. quas facilè in dicta demonſtratione, o. p. applicata, ſtudioſus animaduertet. Cor. 1. 3. huius.

Hoc ſuppoſito vt ad hanc demonſtrandam procedamus bifariam ſecabimus diametrum, A C, in, G, & per, G, ducemus ipſis, C D, D A, parallelas, A F, quidem ipſi, C D, &, M N, ipſi, A D, & aliam quamcunq; O R, eidem C D, æquidiſtantem, ſecantemq; MN, AC, in punctis, P, Q. Erit ergo, OR, bifariam ſecta in, P, & non bifariam in, Q: & eadem ratione o. l. parallelogrammi, B D, erunt bifariam ſectæ per lineam, M N, & non bifariam per, A C. Quapropter o. qq. triangulorum, A B C, ADC, æquabuntur o. qq. BN, & triangulorum, AMG, 18. huius. cũ Cor. G N C, bis vna cum 12. factis ſub o. q. B N, & ſub o. q. triangulorum, A M G, G C N: vnde dimidium dimidio æquabitur, hoc eſt o. qq. trianguli, ADC, tantum, æquabuntur o. qq. BN, & triangulorum, AMG, GNC, ſemel tantum, vna cum 6. factis ſub o. q. B N, & ſub o. q. eorundem triangulorum, A M G, G N C. Quoniam verò parallelogramma, B D, M F, ſunt ſimilia, ideò o. qq. BD, ad o. qq. M F, habebunt rationem multiplicem rationis 7. huius laterum homologorum, C D, G F, (quæ eſt vt 2. ad 1.) vt eſt multiplex vnitatis, numerus exponentis qq. qui & 4. vnitate auctus, nempè 5. Si ergo fiat vt 1. ad 2. ita 2.

ad 4.4. ad 8.8. ad 16. & 16. ad 32. quintam proportio-
nalem ipſorum 1. & 2. conuertendo, o. qq. BD, ad o. qq.
MF, erunt vt 32. ad 1. Et quia o. qq. parallelogrammo-
rum, BA, MF, ad o. qq. triangulorum, ACD, AGF, ha-
bent eandem rationem, per ſuppoſitam Prop. 22. Lib. Sec.
Geo. Ind. applicatam o. p. ideò permutando, & o. qq.
trianguli, ACD, ad o. qq. trianguli, AGF, erunt vt 32.
ad 1; vt etiam ad o. qq. trianguli, AMG: vnde eadem
o. qq. trianguli, ACD, ad o. qq. triangulorum, AMG,
GCN, erunt vt 32. ad 2. ſeu vt 16. ad 1.

Verum o. qq. ACD, æquantur o. qq. BN, & o. qq.
triangulorum, AMG, GNC, vna cum 6. factis ſub o. q.
BN, & ſub o. q. eorundem triangulorum, AMG, GNC,
vt probatum eſt: ergo hæc ad o. qq. triangulorum, AMG,
GCN, erunt vt 16. ad 1. Et diuidendo, o. qq. BN, vna
cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GNC, ad
o. qq. AMG, GCN, erunt vt 15. ad 1. Eſt verò factum
Cor. 1. 11. huius. ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q. BN, &
ſub eiſdem o. q. BN, hoc eſt ad o. qq. BN, vt o. q. BD,
ad o. q. BN, ideſt vt q. DC, ad q. CN, nempè vt 4. ad 1:
& factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BN, ad 6. facta ſub
Cor. 1. 11. huius. o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GCN, eſt vt o. q. BN, ad
ſexcuplum o. q. AMG, GCN, hoc eſt vt 1. ad 2, quod
20. huius ſic probatur. Nam o. q. BG, tripla ſunt o. q. trianguli,
AMG, & o. q. EN, tripla o. q. GCN, vnde o. q. BN,
tripla ſunt o. q. AMG, GNC, ergo ad horum ſexcuplum
erunt vt 3. ad 6. hoc eſt vt 1. ad 2. Et quia probatum eſt
factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q.
BN, & ſub o. q. BN, quod eſt o. qq. BN, eſſe vt 4. ad 1.
Ergo ex æquali factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad 6.
facta ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GNC, erit vt 4.
ad 2. Colligendo igitur conſequentia, factum ſub o. q.
BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q. BN, & ſub o. q.
BN, vna cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG,
GCN, erit vt 4. ad 3. ſeu vt 20. ad 15. Sed & ſupra oſten-
ſum eſt idem factum ſub o. q. BN, & o. q. BN, ideſt o. qq.
BN, cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GCN,
ad o. qq. AMG, GCN, eſſe vt 15. ad 1. Ergo denuò col-
ligen-

ligendo hæc conſequentia, factum ſub o. q. B N, & ſub o. q. B D, ad o. qq. B N, ad o. qq. A M G, G C N, & ad 6. facta ſub o. q. B N, & ſub o. q. A M G, G C N, ideſt ad o. qq. trianguli, A C D, quæ ex dictis conſequentibus componuntur, vt ſuperius probatum eſt, erit vt 20. ad 16.

Deniq; cum q. D C, ſit quadruplum q. C N, etiam o. q. B D, quadrupla erunt o. q. B N. Vt verò o. q. B D, ad o. q. B N, ita (ſumptis velut communi altitudine o. q. B D,) factum ſub o. q. B D, & o. q. B D, ad factum ſub o. q. B D, & ſub o. q. B N. Ergo factum ſub o. q. B D, & o. q. B D, hoc eſt o. qq. B D, erit ad factum ſub o. q. BD, & o. q. B N, vt 80. ad 20. Factum verò ſub o. q. B D, & ſub o. q. B N, ad o. qq. trianguli, A C D, oſtenſum eſſe vt 20. ad 16. Ergo o. qq. BD, ad o. qq. trianguli, A C D, vel, A B C, erunt vt 80. ad 16. hoc eſt vt 5. ad 1. nempè quintupla. Quod oſtendendum erat. Cor. 1. 3. huius. Cor. 1. 11. huius.

COROLLARIVM I.

EX dictis in principio ſuperioris demonſtrationis circa Prop. 22. Lib. Sec. Geo. Ind. o. p. applicatam, patet quorumcunq; parallelogrammorum o. p. ad o. p. triangulorum, quæ à diametris conſtituuntur, eiuſdem tamen gradus, eſſe in eadem ratione. Et conſequenter patet illas eſſe in eadem ratione ad o. p. eiuſdem gradus quorumcunq; triangulorum in eadem, vel æqualibus baſibus, & altitudine cum illis exiſtentium, regulis baſibus. Nam ſub duobus cuiuſcunq; trianguli lateribus poteſt compleri parallelogrammum, vt data triangula ſint conſtituta à diametro. Quapropter o. p. datorum triangulorum ſe habebunt inter ſe, vt o. p. circumſcriptorum parallelogrammorum, & ſubinde vt o. p. quorumcunq; parallelogrammorum in iiſdem, vel æqualibus baſibus, eademq; altitudine exiſtentium.

COROLLARIVM II.

1. *INſuper ex præcedenti Corollario intelligimus quæcunq. circa o. p. parallelogrammorum oſtenſa ſunt, eadem*

quo-

quoque verificari circa o. p. triangulorum cum illis in æquali altitudine exiſtentium, regulis iiſdem.

2. *Igitur in illis o. p. regulis baſibus, erunt vt poteſt. baſium, eiuſdem gradus. Immo & facta ſub o. p. datorum, æquèaltorum triangulorum, erunt interſe vt facta ſub poteſ. baſium, vt in Cor. 1. & 2. Prop. 3. dicebatur de o. p. parallelogrammorum.*

3. *Similiter eadem, vel æqualibus baſibus, & regulis exiſtentium triangulorum o p. eiuſdem gradus erunt vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata, ſi talia ſint. Immò, & facta ſub o. p. triangulorum in eadem, vel æqualibus baſibus exiſtentium, regula baſi, vel baſibus, erunt vt altitudines, ſeu vt dicta latera, &c. Vt in Cor. Prop. 4. dicebatur circa parallelogramma.*

4. *Quorumlibet quoque triangulorum, regulis baſibus, o. p. eiuſdem gradus habebunt inter ſe rationem compoſitam ex ratione altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum, & ex ratione poteſt. baſium, eiuſdem gradus cum prædictis.*

5. *Triangulorum, regulis baſibus, quorum ipſarum baſium poteſt. eiuſdem gradus, altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocantur o. p. eiuſdem gradus, erunt æquales. Et quorum o. p. erunt æquales, baſium quoq. poteſt eiuſdem gradus cum prædictis altitudinibus, vel lateribus æquè baſibus inclinatis, reciprocabuntur.*

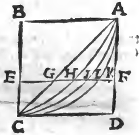
6. *Similium triangulorum o. p. regulis homologis lateribus, erunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, vt erit vnitatis multiplex, numerus exponentis poteſt. aſſumptæ, vnitate auctus.*

7. *Cuiuſcunque trianguli o. p. regula quocunque latere, ad o p eiuſdem, eiuſdemque gradus, regula altero reliquorum laterum, erunt vt poteſt. 1. regula ad poteſt. Secundæ Exiſtentibus ambabus hiſce poteſt. eiuſdem gradus interſe, at immediatè inferioris gradu aſſumptæ in triangulo poteſtatis.*

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

In quocunque parallelogrammo, vt, BD, regula baſi, CD, ſi agatur ipſi, CD, quæcunque parallela, EF, & ducatur diameter, AC, quam illa ſecet in, G; erit vt, DA, ad, AF, ita, CD, vel, EF, ad, FG. Dicatur autem, AC, diagonalis prima. Rurſus vt q. DA, ad q. AF, ita fiat, EF, AD, FH, & ita vbique fieri intelligitur in parallelis ipſi, CD, ita vt omnes homologæ ipſi, HF, terminentur ad curuam, AHC. Pariter vt c. DA, ad c. AF, ita quoque fiat, EF, ad, FI, & ſic in cæteris, deſcripta curua CIA. Et vt qq. AD, ad qq. AF, ita ſit, EF, ad, FL, & ſic in cæteris, deſcripta curua, CLA. Quod & in reliquis poteſt. fieri ſupponi poteſt. Dicatur autem, CHA, diagonalis 2. CIA, diagonalis 3. CLA, diagonalis 4. &c. Similiter triangulum, AGCD, vocetur 1. ſpatium diagonalium parallelogrammi, BD, trilineum, AHCD, 2. ſpatium, AICD, tertium, ALCD, 4. &c. Dico ergo parallelogrammum, BD, duplum eſſe primi ſpatij, triplum ſecundi, quadruplum 3. quintuplum quarti, &c.



QVod enim parallelogrammum, BD, duplum ſit 1. ſpatij, ACD, patet quia per Prop. 19. o. l. BD, duplæ

familiares, quas exhibet ſequens Tabella. In ea autem per, a. b. intelligimus partes datæ lineæ: nempe per a. partem, A B, & per b. partem, B C; quas multiplicamus in ſeipſas, & adinuicem, ſicuti & hinc facta iterum per a. b. multiplicari ſupponimus, & ſic deinceps in infinitum, in qua pariter trium præcedentium Propoſitionum veritas apparet.

l	a + b a + b						
	aq + a a	in b in b	 + bq				
q	aq + a 2 a + b	in b	+ bq				
	ac + aq 2 aq	in b in b	+ a + a 2	in bq in bq	 + bc		
c	ac + a q 3 a + b	in b	+ a 3	in bq	+ bc		
	aqq + a c 3 ac	in b in b	+ a q 3 + a q 3	in bq in bq	+ a + a 3	in bc in bc	 + b qq
qq	aqq + a c 4	in b	+ aq 6	in bq	+ a 4	in bc	+ b qq

Et ſic infinitum.

PROPOSITIO XVI.

Si recta linea biſariam, & non biſariam ſecta fuerit, quadrata inæqualium partium æquantur 2. q. dimidiæ, & 2. q. ſectionibus intermediæ.

HAEc oſtenditur Libro Secundo Element. Propoſitione 9.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XVII.

Si recta linea biſariam, & non biſariam ſecta fuerit, Cubi inæqualium partium æquantur 2. c. dimidiæ lineæ, & 6. factis ſub ipſamet dimidia, & ſub q. ſectionibus interiectæ.



HAnc etiam more Euclidiano ſic demonſtro. Sit recta, A C, diuiſa biſariam in, D, & non biſariam in, B. Dico c. A B, cum c. B C, æquari 2. c. A
D, & 6. factis ſub, A D, & q. D B. Etenim c. A B, æqua- 14. huius
tur c. A D, c. D B, & 3. factis ſub, A D, & q. D B, vna
cum 3. ſub, BD, & q. D A. Sed 3. facta ſub, A D, vel, 2. huius.
C D, & q. D B, æquantur 3. factis ſub, C B, & q. B D,
& 3. c. B D. Similiter 3. facta ſub, B D, & q. D A, vel q. 2. huius.
D C, æquantur 3. factis ſub, B D, & q. D B, ideſt 3. c. D
B; item 3. factis ſub, D B, & q. B C, & 3. ſub, D B, &
2. rectangulis, D B C, ideſt, 6. ſub, D B, & rectangulo,
D B C, nempè 6. ſub, C B, & q. B D. Vnde colligendo
partes c. A B, inueniemus ipſum æquari 9. factis ſub, C B,
& q. B D, 3. ſub, D B, & q. B C, 7. c. D B, & vni c. A
D. Simul autem iungendo vnum c. D B, cum c. B C, in
principio habito, cum 3. factis ſub, D B, & q. B C, & cum
3. factis ſub, CB, & q. BD, fit c. DC, vel c. DA, & remanent 14. huius
6. c. D B, & 6. facta ſub, C B, & q. B D, quæ compo-
nunt 6. facta ſub, C D, vel, A D, & q. D B, & prius ha- 2. huius.
bebamus c. A D. Ergo c. A B, cum c. B C, æquatur, 2. c,
AD, cum 6. factis ſub, AD, & q. DB. quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Si recta linea biſariam, & non biſariam ſecta fuerit qq.
inæqualium partium æquantur 2. qq. dimidiæ,
2. qq. ſectionibus interiectæ, & 12. fac-
tis ſub q. dimidię, & ſub q. eiuſ-
dem ſectionibus interiectæ.

Sit pariter recta,
AC, biſariam



ſecta in, D, & non biſariam in, B. Dico qq. AB, cum q
q. BC, æquari 2. qq. AD, 2. qq. DB, & 12. factis ſub
15.huius q. AD, & ſub q. DB. Namque qq. AB, æquatur qq. A
D, qq. DB, 6. factis ſub q. AD, & q. DB, 4. factis ſub,
AD, & c. DB, vna cum 4. factis ſub BD, & c. DA. Ser-
uentur ex his qq. AD, & qq. DB, ac reliqua examinen-
tur. Sunt ergo 6. facta ſub q. AD, hoc eſt ſub q. DC, &
4. huius. ſub q. DB, æqualia 6. factis ſub q. DB, & ſub eodem q.
13.huius DB, hoc eſt 6. qq. DB; item 6. factis ſub q. DB, & q. BC,
& 6. factis ſub q. DB, & ſub 2. rectangulis, DBC, nempè
12. factis ſub q. DB, & rectangulo, DBC, ideſt 12. factis
2. huius. ſub, CB, & c. DB. Et 4. facta ſub, AD, vel, CD, & c. DB,
æquantur 4. factis ſub, CB, & c. BD, & 4. factis ſub, D
2. huius. B, & c. DB, hoc eſt 4. qq. DB. Inſuper 4. facta ſub, BD,
14.huius & c. DA, vel c. DC, æquantur 4. factis ſub, BD, & c. D
B, hoc eſt 4. qq. DB, & 4. factis ſub, BD, & c. BC; item
4. factis ſub, DB, & ducto ipſius, DB, in 3. q. BC, ſcili-
cet 12. factis ſub q. DB, & q. BC, & 4. factis ſub, BD, &
ducto 3. q. DB, in, BC, ideſt 12. factis ſub, CB, & ſub c. B
D. Collectis ergo partibus qq. AB, & ſeiunctis, quæ
ſunt eiuſdem generis, inueniemus ipſum reſolui in ſerua-
tum qq. AD, in 15. qq. DB, in 18. facta ſub q. DB, & q.
BC, in 4. facta ſub, DB, & c. BC, ac in 28. facta ſub, CB,
in

in c. B D, quibus iungendum eſt vnum qq. BC. Nunc ergo ſecernamus vnum qq. A D, ſeruatum, ac 2. qq. DB. Cum verò hæc ſint 15. remanebunt 13. qq. D B. Videamus ergo qualiter ex reſiduis componantur vnum qq. A D, & 12. facta ſub q. A D, & q. D B. Iungatur qq. B C, cum vno qq. B D, cum 6. factis ſub q. C B, & q. B D, cum 4. factis ſub, C B, & ſub c. B D, & cum 4. factis ſub, D B, & ſub c. B C, quæ componunt qq. C D, vel, D A; & remanebunt adhuc 24. facta ſub, C B, & ſub c. B D, 12. facta ſub q. C B, & q. B D, cum 12. qq. D B. Sed 12. facta ſub q. D B, & q. B C, 24. facta ſub, C B, & c. B D, ideſt 24. facta ſub q. D B, & ſub rectangulo, D B C, ideſt 12. facta ſub q. D B, & 2. rectangulis, D B C, cum 12. factis ſub eodem q. D B, & q. D B, ſcilicet cum 12. qq. D B, conſtituunt 12. facta ſub q. D B, & ſub q. D C, vel ſub q. D A. Ergo qq. AB, cum qq. BC, æquatur 2. qq. AD, 2. qq. DB, & 12. factis ſub q. A D, & ſub q. D B. Quod, &c.

15. huius

2. & 13. huius.

COROLLARIVM.

Has autem æquationes transferri quoque poſſe ad o. qq. figuræ cuiuſcunque, iuxta datam regulam, in qua o. l. bifariam, & non bifariam ſectæ ſint, vt & eas, quæ in proximis 4. Propoſitionibus conſideratæ fuerunt, ad ſimiles figuræ datæ poteſtates pariter extendi, patet per Propoſ. 12 ſuperiorem.

SCHOLIVM.

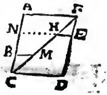
Cvm verò propter demonſtranda mihi non opus eſſet procedere vltra qq. vt ſuperius dixi, propterea in his quoque Prop. conſtiti in ipſis qq. Verum ſi quis vlterius procedere velit, id ei licebit facilius per multiplicationem conſuetam in Algebra vt ſupra quoque innuebatur, & vt amplius patebit inferius.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Si in quocunque parallelogrammo ducatur diameter, baſiſque ſumatur prò regula: omnes lineæ parallelogrammi duplæ erunt omnium linearum cuiuſuis factorum triangulorum.

PAtet hæc per dicta in Prop. 19. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 35. Cum enim ibi oſtē-datur circa illius Schema (quod hic denuò exhibetur) o. l. triangulorum, A C F, F C D, regula, C D, inter ſe adæquari, ideo, componendo, o. l. vtriuſque trianguli, hoc eſt o. l. parallelogrammi, A D, duplæ erunt o. l. cuiuſuis triangulorum, ACF, F C D. Quod, &c.



PROPOSITIO XX.

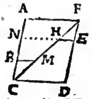
In eodem Schemate, regula eadem: omnia quadrata parallelogrammi, A D, tripla erunt omnium quadratorum cuiuſuis dictorum triangulorum, A C F, F C D.

HAEc oſtenditur in Prp. 24. Lib. Sec. Geomet. Ind. quæ habetur in Exerc. 1. Pag. 50.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

In eodem Schemate, regula eadem: omnes cubi parallelogrammi, A D, quadrupli erunt omnium cuborum cuiuſuis dictorum triangulorum, A C F, F C D.



ETenim o. c. parallelogrammi, A D, æquantur o. c. triangulorum, A C D F, F C D, & 3. factis ſub, o. l. trianguli, AC F, & ſub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, A C F. Sunt autem o. c. A D, hoc eſt factum ſub o. l. A D, & ſub o. q. A D, ad factum ſub ijſdem o. l. A D, & ſub o. q. trianguli, F D C, vt o. q. parallelogrammi, A D, ad o. q. trianguli, F D C (quia communis eſt altitudo, nempè o. l. A D,) hoc eſt in ratione tripla. o. c. ergo, A D, tripli erunt facti ſub o. l. A D, & ſub o. q. F D C, trianguli: & hoc æquatur facto ſub o. l. trianguli, F A C, & ſub o. q. trianguli, F D C, vna cum facto ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. eiuſdem trianguli, F DC, hoc eſt vna cum o. c. trianguli, F D C. Ergo o. c. A D, tripli erunt o. c. trianguli, F D C, & facti ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F D C. Quapropter reſoluendo o.c. A D, in ſuas partes; erunt o. c. A C F, o. c. F C D, 3. facta ſub o. l. trianguli, ACF, & ſub o. q. F C D, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, F D C, & ſub o. q. trianguli, A C F, tripli o. c. F C D, ſimul cum facto ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F D C. Sed & 3. facta ſub o. l. trianguli, A C F, & ſub o. q. trianguli, F C D, ſunt tripla vnius iſtorum factorum. Ergo & reliquum reliqui triplum erit. Nempè o. c.

14. huius Cor. 18. huius.

Cor. 1. 11. huius

2. huius.

14. huius & Cor. 18. huius

ACF, o. c. FCD, & 3. facta ſub o. l. trianguli FCD, & ſub o. q. trianguli, FAC, ſimul, tripli erunt o. c. trianguli, FCD. Sunt verò o. c. trianguli, ACF, cum o. c. trianguli, FCD, dupli o. c. trianguli, FCD, ergo reſiduum, ſcilicet 3. facta ſub o. l. trianguli, FCD, & ſub o. q. trianguli, ACF, æqualia erunt o. c. trianguli, FCD. Quapropter 3. facta ſub o. l. trianguli, FAC, & ſub o. q. trianguli, FCD, vna cum 3. factis ſub o. l. trianguli, FCD, & ſub o. q. trianguli, FAC, & cum o. c. triangulorum, FAC, FDC, hoc eſt o. c. parallelogrammi, AD, quadrupli erunt o. c. trianguli, FCD, vel trianguli, FAC. Cum enim factum ſub o. l. ACF, & o. q. FCD, æquetur facto ſub o. l. FCD, & o. q. ACF, propter æqualitatem coalternè reſpondentium linearum, & quadratorum in ipſis triangulis, FAC, FCD, ideo 3. facta ſub, o. l. ACF, & o. q. FCD, 3. factis ſub o. l. FCD, & o. q. FAC, adæquantur. Vnde patet, &c. Quod, &c.

14. huius & Cor. 18. huius

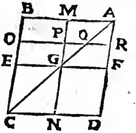
PROPOSITIO XXII.

Similiter in quocunque parallelogrammo ducta diametro, ac regula baſi: omnia quadratoquadrata parallelogrammi quintupla ſunt omnium quadratoquadratorum cuiuſuis triangulorum per ipſam diametrum conſtitutorum.

SIt parallelogrammum, BD, in eoque ducta diameter, AC, & regula, CD. Dico o. qq. BD, eſſe quintupla o. qq. trianguli, ACD, vel, ABC. In hac autem methodum ſequar Propoſitionis 24. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ eſt in Exerc. 1. Pag. 50. Quoniam verò illa vtitur Prop. 22. eiuſdem, ideò, & in hac eandem Prop. 22. adhibebimus, ſed quatenus illa quoque de o. p. verificatur, & ſubinde de o. qq. Hoc enim facilè oſtendetur, ſi in eadem

Prop.

Prop. 22. quæ habetur in Exerc. 1. pag. 40. vbicunq; aſſumuntur o. q. ſubſtituantur o. p. & vniuerſaliter patefiat in illius Schemate exceſſum o. p. figuræ circumſcriptæ triangulo, O E S, ſuper o. p. inſcriptæ, æquari o. p. (ſubintellige o. p. eiuſdem gradus cum tota hac Prop.) parallelogrammi D S, regula, E S.



Namq; o. p. L P, vel, G Q, cum exceſſu o. p. G Q, ſuper o. p. G Q, faciunt o. p. G Q, vel, I R : & hæc cum exceſſu o. p. F R, ſuper eaſdem, faciunt o. p. F R, vel, H S : ac deniq; o. p. H S, cum exceſſu o. p. D S, ſuper o. p. H S, faciunt o. p. D S. Cætera verò omnia pendent ex ſuperioribus Prop. quas facilè in dicta demonſtratione, o. p. applicata, ſtudioſus animaduertet. Cor. 1. 3. huius.

Hoc ſuppoſito vt ad hanc demonſtrandam procedamus bifariam ſecabimus diametrum, A C, in, G, & per, G, ducemus ipſis, C D, D A, parallelas, A F, quidem ipſi, C D, &, M N, ipſi, A D, & aliam quamcunq; O R, eidem C D, æquidiſtantem, ſecantemq; MN, AC, in punctis, P, Q. Erit ergo, OR, bifariam ſecta in, P, & non bifariam in, Q: & eadem ratione o. l. parallelogrammi, BD, erunt bifariam ſectæ per lineam, M N, & non bifariam per, A C. Quapropter o. qq. triangulorum, A B C, ADC, æquabuntur o. qq. BN, & triangulorum, AMG, 18. huius. cũ Cor. G N C, bis vna cum 12. factis ſub o. q. B N, & ſub o. q. triangulorum, A M G, G C N: vnde dimidium dimidio æquabitur, hoc eſt o. qq. trianguli, ADC, tantum, æquabuntur o. qq. BN, & triangulorum, AMG, GNC, ſemel tantum, vna cum 6. factis ſub o. q. B N, & ſub o. q. eorundem triangulorum, A M G, G N C. Quoniam verò parallelogramma, B D, M F, ſunt ſimilia, ideò o. qq. BD, ad o. qq. M F, habebunt rationem multiplicem rationis 7. huius laterum homologorum, C D, G F, (quæ eſt vt 2. ad 1.) vt eſt multiplex vnitatis, numerus exponentis qq. qui & 4. vnitate auctus, nempè 5. Si ergo fiat vt 1. ad 2. ita 2.

Mm 2 ad

ad 4.4. ad 8.8. ad 16. & 16. ad 32. quintam proportionalem ipſorum 1. & 2. conuertendo, o. qq. BD, ad o. qq. MF, erunt vt 32. ad 1. Et quia o. qq. parallelogrammorum, BA, MF, ad o. qq. triangulorum, ACD, AGF, habent eandem rationem, per ſuppoſitam Prop. 22. Lib. Sec. Geo. Ind. applicatam o. p. ideò permutando, & o. qq. trianguli, ACD, ad o. qq. trianguli, AGF, erunt vt 32. ad 1; vt etiam ad o. qq. trianguli, AMG: vnde eadem o. qq. trianguli, ACD, ad o. qq. triangulorum, AMG, GCN, erunt vt 32. ad 2. ſeu vt 16. ad 1.

Verum o. qq. ACD, æquantur o. qq. BN, & o. qq. triangulorum, AMG, GNC, vna cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. eorundem triangulorum, AMG, GNC, vt probatum eſt: ergo hæc ad o. qq. triangulorum, AMG, GCN, erunt vt 16. ad 1. Et diuidendo, o. qq. BN, vna cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GNC, ad o. qq. AMG, GCN, erunt vt 15. ad 1. Eſt verò factum
Cor. 1. 11. huius. ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q. BN, & ſub eiſdem o. q. BN, hoc eſt ad o. qq. BN, vt o. q. BD, ad o. q. BN, ideſt vt q. DC, ad q. CN, nempè vt 4. ad 1: & factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BN, ad 6. facta ſub
Cor. 1. 11. huius. o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GCN, eſt vt o. q. BN, ad ſexcuplum o. q. AMG, GCN, hoc eſt vt 1. ad 2, quod
20. huius ſic probatur. Nam o. q. BG, tripla ſunt o. q. trianguli, AMG, & o. q. EN, tripla o. q. GCN, vnde o. q. BN, tripla ſunt o. q. AMG, GNC, ergo ad horum ſexcuplum erunt vt 3. ad 6. hoc eſt vt 1. ad 2. Et quia probatum eſt factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BN, quod eſt o. qq. BN, eſſe vt 4. ad 1. Ergo ex æquali factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad 6. facta ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GNC, erit vt 4. ad 2. Colligendo igitur conſequentia, factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BD, ad factum ſub o. q. BN, & ſub o. q. BN, vna cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GCN, erit vt 4. ad 3. ſeu vt 20. ad 15. Sed & ſupra oſtenſum eſt idem factum ſub o. q. BN, & o. q. BN, ideſt o. qq. BN, cum 6. factis ſub o. q. BN, & ſub o. q. AMG, GCN, ad o. qq. AMG, GCN, eſſe vt 15. ad 1. Ergo denuò colligen-

ligendo hæc conſequentia, factum ſub o. q. B N, & ſub o. q. B D, ad o. qq. B N, ad o. qq. A M G, G C N, & ad 6. facta ſub o. q. B N, & ſub o. q. A M G, G C N, ideſt ad o. qq. trianguli, A C D, quæ ex dictis conſequentibus componuntur, vt ſuperius probatum eſt, erit vt 20. ad 16.

Deniq; cum q. D C, ſit quadruplum q. C N, etiam o. q. B D, quadrupla erunt o. q. B N. Vt verò o. q. B D, ad o. q. B N, ita (ſumptis velut communi altitudine o. q. B D,) factum ſub o. q. B D, & o. q. B D, ad factum ſub o. q. B D, & ſub o. q. B N. Ergo factum ſub o. q. B D, & o. q. B D, hoc eſt o. qq. B D, erit ad factum ſub o. q. BD, & o. q. B N, vt 80. ad 20. Factum verò ſub o. q. B D, & ſub o. q. B N, ad o. qq. trianguli, A C D, oſtenſum eſſe vt 20. ad 16. Ergo o. qq. BD, ad o. qq. trianguli, A C D, vel, A B C, erunt vt 80. ad 16. hoc eſt vt 5. ad 1. nempè quintupla. Quod oſtendendum erat. Cor. 1. 3. huius. Cor. 1. 11. huius.

COROLLARIVM I.

Ex dictis in principio ſuperioris demonſtrationis circa Prop. 22. Lib. Sec. Geo. Ind. o. p. applicatam, patet quorumcunq; parallelogrammorum o. p. ad o. p. triangulorum. quæ à diametris conſtituuntur. eiuſdem tamen gradus, eſſe in eadem ratione. Et conſequenter patet illas eſſe in eadem ratione ad o. p. eiuſdem gradus quorumcunq; triangulorum in eadem, vel æqualibus baſibus, & altitudine cum illis exiſtentium, regulis baſibus. Nam ſub duobus cuiuſcunq; trianguli lateribus poteſt compleri parallelogrammum, vt data triangula ſint conſtituta à diametro. Quapropter o. p. datorum triangulorum ſe habebunt inter ſe, vt o. p. circumſcriptorum parallelogrammorum, & ſubinde vt o. p. quorumcunq; parallelogrammorum in iiſdem, vel æqualibus baſibus, eademq; altitudine exiſtentium.

COROLLARIVM II.

1. *INſuper ex præcedenti Corollario intelligimus quæcunq. circa o. p. parallelogrammorum oſtenſa ſunt, eadem*

quo-

quoque verificari circa o. p. triangulorum cum illis in æquali altitudine exiſtentium, regulis iiſdem.

2. Igitur in illis o. p. regulis baſibus, erunt vt poteſt. baſium, eiuſdem gradus. Immo & facta ſub o. p. datorum, æquèaltorum triangulorum, erunt interſe vt facta ſub poteſ. baſium, vt in Cor. 1. & 2. Prop. 3. dicebatur de o. p. parallelogrammorum.

3. Similiter eadem, vel æqualibus baſibus, & regulis exiſtentium triangulorum o p. eiuſdem gradus erunt vt altitudines, vel vt latera æqualiter baſibus inclinata, ſi talia ſint. Immò, & facta ſub o. p. triangulorum in eadem, vel æqualibus baſibus exiſtentium, regula baſi, vel baſibus, erunt vt altitudines, ſeu vt dicta latera, &c. Vt in Cor. Prop. 4. dicebatur circa parallelogramma.

4. Quorumlibet quoque triangulorum, regulis baſibus, o. p. eiuſdem gradus habebunt inter ſe rationem compoſitam ex ratione altitudinum, vel laterum æqualiter baſibus inclinatorum, & ex ratione poteſt. baſium, eiuſdem gradus cum prædictis.

5. Triangulorum, regulis baſibus, quorum ipſarum baſium poteſt. eiuſdem gradus, altitudinibus, vel lateribus æqualiter baſibus inclinatis, reciprocantur o. p. eiuſdem gradus, erunt æquales. Et quorum o. p. erunt æquales, baſium quoq. poteſt eiuſdem gradus cum prædictis altitudinibus, vel lateribus æquè baſibus inclinatis, reciprocabuntur.

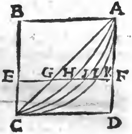
6. Similium triangulorum o. p. regulis homologis lateribus, erunt in ratione multiplici rationis laterum homologorum, vt erit vnitatis multiplex, numerus exponentis poteſt. aſſumptæ, vnitate auctus.

7. Cuiuſcunque trianguli o. p. regula quocunque latere, ad o p eiuſdem, eiuſdemque gradus, regula altero reliquorum laterum, erunt vt poteſt. 1. regula ad poteſt. Secundæ Exiſtentibus ambabus hiſce poteſt. eiuſdem gradus inter ſe, at immediatè inferioris gradu aſſumptæ in triangulo poteſtatis.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

In quocunque parallelogrammo, vt, BD, regula baſi, CD, ſi agatur ipſi, CD, quæcunque parallela, EF, & ducatur diameter, AC, quam illa ſecet in, G; erit vt, DA, ad, AF, ita, CD, vel, EF, ad, FG. Dicatur autem, AC, diagonalis prima. Rurſus vt q. DA, ad q. AF, ita fiat, EF, AD, FH, & ita vbique fieri intelligitur in parallelis ipſi, CD, ita vt omnes homologæ ipſi, HF, terminentur ad curuam, AHC. Pariter vt c. DA, ad c. AF, ita quoque fiat, EF, ad, FI, & ſic in cæteris, deſcripta curua CIA. Et vt qq. AD, ad qq. AF, ita ſit, EF, ad, FL, & ſic in cæteris, deſcripta curua, CLA. Quod & in reliquis poteſt. fieri ſupponi poteſt. Dicatur autem, CHA, diagonalis 2. CIA, diagonalis 3. CLA, diagonalis 4. &c. Similiter triangulum, AGCD, vocetur 1. ſpatium diagonalium parallelogrammi, BD, trilineum, AHCD, 2. ſpatium, AICD, tertium, ALCD, 4. &c. Dico ergo parallelogrammum, BD, duplum eſſe primi ſpatij, triplum ſecundi, quadruplum 3. quintuplum quarti, &c.



QVod enim parallelogrammum, BD, duplum ſit 1. ſpatij, ACD, patet quia per Prop. 19. o. l. BD, duplæ

duplæ ſunt o. l. A C D, & ideò per Prop. 3. Lib. Secun. Geom. Ind. B D, duplum eſt ſpatij, ACD.

Quod verò, B D, ſit triplum ſecundi ſpatij, A L C D, probatur, quia vt q. D A, ad q. A F, ſiue vt q. E F, ad q. F G, ita eſt, E F, ad F H, & ſic in cæteris, ergo vt o.
11.huius q. B D, ad o. q. trianguli, A C D, ita erunt o. l. B D, ad o. l. ſpatij, A H C D, & ſubinde ita, B D, ad, A H C D, o. q. verò, B D, tripla ſunt o. q. trianguli, A C D, ergo &, B D, ſpatij, A H C D, triplum erit.

Eadem ratione oſtendemus o. l. BD, ad o. l. tertij ſpatij, A I C D, eſſe vt o. c. B D, ad o. c. trianguli, A C D; ideſt
21.huius ipſum, B D, ſpatij, A I C D, quadruplum eſſe.

Similiter probabimus o. l. B D, ad o. l. ſpatij, ALCD,
22.huius eſſe vt o.qq.B D, ad o.qq. trianguli, A C D; nempe ipſum, B D, ſpatij, ALCD, quintuplum eſſe.

Et ſic ſi probetur o. p. B D, deinceps ſubſequentes o. p. trianguli, A C D, cum illis eiuſdem gradus, eſſe ſextuplas,
11.huius ſeptuplas, octuplas, &c. eodem modo oſtendetur parallelogrammum, B D, eſſe ſextuplum quinti ſpatij, ſeptuplum ſexti, octuplum ſeptimi, & ſic in infinitum.

COROLLARIVM.

Ex his innoteſcit quoque ratio, B D, ad primum ſpatium reſiduum, B C A, ſecundum, B C H A, tertium, B C I A quartum, B C L A, &c. erit enim, B D, duplum primi reſidui, ſpatij ſexquialterum ſecundi ſexquitertium tertij ſexquiquartum quarti, &c. Similiter habetur ratio inter hæc reſidua, & ſua ſpatia. Namque primum reſiduum, A B C G A, æquale eſt primo ſpatio, A G C D: ſecundum reſiduum, B C H A, duplum eſt ſecundi ſpatij: tertium tertij triplum: quartum quarti quadruplum, &c. Inter diagonalis verò manifeſtum eſt, A C, eſſe rectam lineam, C H A, parabolam cuius vertex, A, per conuerſam Corollarij Prop. primæ Libri Quarti Geomet. Ind. Eſt enim ex hypotheſi, C D, ad, H F, vt q. D A, ad, q. A F. Ipſæ deniquè, E F, G F, H F, I F, L F, &c. Sunt continuè proportionales, vt facilè oſtendi poteſt.

SCHO-

SCHOLIVM.

HAEc à me præmiſſa ſunt circa linearum, parallelogrammorum, & triangulorum poteſtates, cum ijs detegendis occaſionem attulerit, vt in præfatione dictum eſt, inquiſitio menſuræ fuſi parabolici, prò qua mihi erat inuenienda proportio o qq. parallelogrammi dati ad o. qq. alterutrius triangulorum per eiuſdem diametrum conſtitutorum. Licet autem ad hanc inueniendam pauca ex demonſtratis Prop. ſufficerent, non tamen cætera, quæ hac occaſione inuenta ſunt circa dictas poteſtates, negligenda, vel ſupprimenda duxi; tum quia ſcitu digna videntur, & ad alia problemata ſoluenda fortè non omninò euadent inutilia, tum vt ampliaretur doctrina mea Geom. Ind. eiuſdemque methodus illuſtrior appareret. Inuenta ergo dicta proportione o. qq ſequentem Prop. circa menſuram fuſi parabolici immediatè libuit demonſtrare.

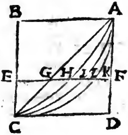
PROPOSITIO XXIV.

Si parallelogrammum, & parabola fuerint in eadem baſi, & circa eundem axim; conuertantur autem circa baſim. Cylindrus genitus ex parallelogrammo ad ſolidum genitum ex parabola, quod à Keplero dicitur fuſus parabolicus, erit vt 15. ad 8.

EXponatur denuò figura Prop. ant. in qua curua CH A, eſt linea parabolica, vertice, A, vt dictum eſt; quapropter, AHCB, erit planum parabolicum, ſeu ſemiparabola. Supponatur autem nunc, AB, axis, & conuerti parallelogrammum, BD, cum ſemiparabola, AHCD, circa ſemibaſim, BC, vt fianr ex, BD, cylindrus,

Digitized by Google

& ex, A H C B, ſemifuſus parabolicus. Dico cylindrum ad hunc ſemifuſum, (vt erit, & cylindrus huius duplus ad integrum fuſum) eſſe vt 15. ad 8. Cæteris enim manentibus vt in ant. Prop. quia, E F, ad, F H, eſt vt q. D A, ad q. A F, hoc eſt vt q. E F, ad q. F G, ergo q. E F, ad q. F H, erit vt qq. E F, ad qq. F G; & ſic oſtendemus eſſe in cęteris quibuſcunq. ipſi CD, tanquam regulę parallelis. Ergo o.q.B D, ad o. q. trilinei, AH



11.huius C D, erunt vt o.qq.trianguli, ACD, hęc verò ſunt in ratio-
22.huius ne quintupla; ergò, & o.q.BD, quintupla erunt o.q.trilinei,
11.huius AHCD. Sunt verò o.q.BD, ideſt factum ſub o.l.BD, & o.l.B
23.huius D, ad factum ſub o. l. B D, & o. l. A H C D, vt, B D, ad, A H C D, nempè tripla, hoc eſt o. q. B D, ad factum ſub. o.
2.huius. l. B D, & ſub o. l. A H C D, erunt vt 15. ad 5. Sed factum ſub, o. l. B D, & ſub o. l. AHCD, æquatur facto ſub o. l. A H C B, A H C D, & o. q. A H C D. Ergo ad hæc o. q. B D, ſunt vt 15. ad 5. Sed o. q. B D, oſtenſa ſunt eſſe quintupla o. q. A H C D, ergo o. q. B D, ad factum ſub o. l. A H C B, A H C D, erunt vt 15. ad 2. & ad duo facta, vt 15. ad 4. Cum verò o. q. B D, ad o. q. A H C D, ſint vt 15. ad
13.huius 3. erunt colligendo, o. q B D, ad o. q. A H C D, cum 2.
& Cor. factis ſub o. l. A H C B, A H C D, vt 15. ad 7. Ergo o. q. B
18.huius D, ad reſiduum, nempè ad o. q. A H C D, erunt vt 15. ad 8. Ergo & quodcunque ſolidum ſimilare genitum ex, B D, ad ſibi ſimilare genitum ex, A H C B, erit vt 15. ad 8. per Prop. 33. Lib. Sec. Geom. Ind. quæ ponitur in Exerc. prima Pag. *69*. Et ſubindè Cylindrus ex, B D, ad ſemifuſum parabolicum genitum ex ſemiparabola, A H C B, vt & duplum ad duplum, hoc eſt cylindrus genitus ex parallelogrammo parabolæ integræ circumſcripto, qui eſt prædicti duplus, ad fuſum genitum ex ipſa parabola, erit vt 15. ad 8. quod, &c.

CO-

COROLLARIVM.

Conſtat ex hac demonſtratione inuentam proportionem 15. ad 8. nedum eſſe inter dictum cylindrum, & fuſum, ſed etiam inter quæcumq; ſolida inuicem ſimilaria genita ex dicto parallelogrammo, & parabola; & hoc ſiue, A B, ſit axis, ſiue tantum diameter.

SCHOLIVM.

Hoc demonſtrato, vt continuetur præfata doctrina, afferentur hic ea, quæ à me inuentis ſuperaddidit prænominatus Io. de Beaugrand, ex quibus Lector intelliget hanc Ind. methodum etiam apud inſignes Geometras vſu receptam, & excultam fuiſſe, qui tali ratione proceſſit, qualis in ſequentibus apparet.

Primum Lemma Beaugrand.

Data recta linea bifariam, & non bifariam diuiſa, inuenire cui ſit æquale aggregatum poteſtatum eiuſdem gradus (quicunq; ſit ille) inæqualium partium.

Sit recta, R V, diuiſa bifariam in, S, & non bifariam in, T, oportet inuenire cui ſit æquale aggregatum poteſtatum eiuſdem gradus (quicunq; ſit ille) partium



inæqualium, R T, T V. Ad hoc inquirendum conſiderabimus, R T, veluti ſummam, &, T V, veluti differentiam rectarum, R T, T V. Vt autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram literalem, partem, R S,

Digitized by Google

rectæ, R V, vocantes. a. & partem, S V, b. denominantes. Erit ergo, R T, a † b, & , T V, a — b. Volens itaq; inuenire cui æquetur q. R T, adiunctum q. T V, compono facta à binomia radice, a † b, nempè a a † 2 a b † b b; necnon & ab a — b. ſcilicet a a — 2 a b, † b b. Hæc q. ſimul iuncta faciunt 2 a a † 2 b b. Hinc itaq; colligitur q. R T, plus q. T V, æquale eſse 2 q. R S, plus 2 q. T S. Quod eſt illud ipſum, quod Euclides Lib. Sec. demonſtrauit.

Si velim ſcire cui æquetur c. R T, c. T V, aggregatus, ſimiliter effingo c. abs radice a † b, qui erit a a a † 3 a a b, † 3 a b b, † b b b. Vt & abs radice a — b, & c. erit a a a — 3 a a b, † 3 a b b — b b b. Cubis ſimul additis oritur hæc ſumma, 2 a a a, † 6. a b b. Vnde manifeſtum eſt c. R T, additum c. T V, æquari 2. c. R S, plus ſextuplo facti ex, R S, in q. S T. Et ita in quouis poteſtatum gradu progrediendo optatum conſequemur, vt exemplis ſubiectis liquidò apparet.

Exemplum primum in Quadratocubis.

qcubus abs a ✠ b facit	qcubus abs a — b facit	Summa qcubi ex a ✠ b & qcubi ex a — b
✠ a^{v}	✠ a^{v}	✠ 2 a
✠ 5 a^{iv} b	— 5 a^{iv} b	
✠ 10 a^{iii} b^{ii}	✠ 10 a^{iii} b^{ii}	✠ 20 a^{iii} b^{ii}
✠ 10 a^{ii} b^{iii}	— 10 a^{ii} b^{iii}	
✠ 5 a b^{iv}	✠ 5 a b^{iv}	✠ 10 a b^{iv}
✠ b^{v}	— b^{v}	

Exem-

Digitized by Google

Exemplum ſecundum in Cubocubis.

ccubus abs a + b facit	ccubus abs a — b facit	Summa ccubi a + b & ccubi a — b
+ a^{VI}	+ a^{VI}	+ 2 a^{VI}
+ 6 a^{V} b	— 6 a^{V} b	
+ 15 a^{IV} b^{II}	+ 15 a^{IV} b^{II}	+ 30 a^{IV} b^{II}
+ 20 a^{III} b^{III}	—20 a^{III} b^{III}	
+ 15 a^{II} b^{IV}	+ 15 a^{II} b^{IV}	+ 30 a^{II} b^{IV}
+ 6 a b^{V}	— 6 a b^{V}	
+ b^{VI}	+ b^{VI}	+ 2 b^{VI}

Exemplum tertium in Cubocubocubis.

cccubus abs a + b facit	cccubus abs a — b facit	Summa cccubi a + b & cccubi a — b
+ a^{IX}	+ a^{IX}	+ 2 a^{IX}
+ 9 a^{VIII} b	— 9 a^{VIII} b	
+ 36 a^{VII} b^{II}	+ 36 a^{VII} b^{II}	+ 72 a^{VII} b^{II}
+ 84 a^{VI} b^{III}	—84 a^{VI} b^{III}	
+126 a^{V} b^{IV}	+126 a^{V} b^{IV}	+252 a^{V} b^{IV}
+126 a^{IV} b^{V}	—126 a^{IV} b^{V}	
+ 84 a^{III} b^{VI}	+ 84 a^{III} b^{VI}	+168 a^{III} b^{VI}
+ 36 a^{II} b^{VII}	—36 a^{II} b^{VII}	
+ 9 a b^{VIII}	+ 9 a b^{VIII}	+ 18 a b^{VIII}
+ b^{IX}	— b^{IX}	

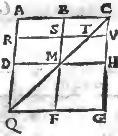
Digitized by Google

SCHOLIVM.

Ex his ergo Lector harum multiplicationum Algebraicarum non ignarus, intelliget hanc viam multò faciliorem eſſe quàm Euclidianam, cuius longiorem texturam in Propoſ. 17. & 18. proſecuti ſumus. Sequuntur nunc tres Prop. circa poteſtates qq. ſuccedentes eiuſdem Beaugrand.

PROPOSITIO XXV.

Si exponatur quodcunq; parallelogrammum, A G, cum diametro, Q C, & ſit regula, Q G, o. qc. parallelogrammi, A G, ſextupli erunt o. qc. trianguli, C Q G, vel, C A Q.



Secetur, C Q, biſariam in, M, & per, M, ducantur rectæ, D H, B F, hæc ipſis, A Q, C G, illa verò ipſis, A C, Q G, parallela. Deinde extendatur intra, A G, vbicunq; velimus recta, R S T V, ipſi, Q G, æquidiſtans. Quoniam ergo, q c.
Per primũ exẽplum. R T, plus qc. T V, æqualis eſt 2. qc. R S, plus 20. factis ſub c. R S, & q. S T, plus 10. factis ſub, R S, & qq. S T, prætereaq; ducta eſt vbicunq; R V, ſequitur o. qc. triangulorum, A Q C,
Cor. 18. huius. C Q G, æquales eſſe bis o. qc. A F, plus 20. factis ſub o. c. A M, & ſub o. q. trianguli, B M C, plus 20. factis ſub o. c. D F, & ſub o. q. trianguli, Q M F, plus 10. factis ſub o. l. A M, & o. qq. B M C, plus 10. factis ſub o. l. D F, & o. qq. trianguli, Q M F.

Verum o. qc. A Q C, æquantur o. qc. C Q G. Item factum ſub o. c. A M, & ſub o. q. B M C, æquatur facto

ſub

ſub o. c. D F, & ſub o. q. Q M F. Item factum ſub o. l. A M, & ſub o. qq. BMC, æquatur facto ſub o. l. D F, & ſub o. qq. Q M F. Igitur æqualia æqualibus ſubſtituendo, bis o. qc. trianguli, C Q G, æquantur bis o. qc. A F, plus 40 factis ſub o. c. D F, & ſub o. q. Q M F, plus 20. factis ſub o. l. D F, & ſub o. qq. Q M F. Et factum ſub o. c. D F, & ſub o. q. Q M F, ad o. qc. D F, ita ſe habet quemadmo- Cor. 1.
dum o. q. Q M F, ad o. q. D F, hoc eſt vt 1. ad 3. Igitur 40. 11. huius
facta ſub o. c. D F, & ſub o. q. Q M F, æquantur $\frac{40}{3}$ o. qc. 20. huius
D F, hoc eſt $\frac{20}{3}$ o. qc. A F.

Rurſus factum ſub o. l. D F, & ſub o. qq. Q M F, ad o. Cor. 1.
qc. D F, eam habet rationem, quam o. qq. Q M F, ad o. 11. huius
qq. D F, hoc eſt 1. ad 5. Quare 20. facta ſub o. l. D F, & ſub 22. huius
o. qq. Q M F, æquantur o. qc. D F, quater ſumptis, hoc eſt bis o. qc. A F.

Iam æqualia æqualibus ſubrogentur. Bis o. qc. C Q G, æquantur bis o. qc. A F, plus $\frac{20}{3}$ o. qc. A F, plus o. qc. A F, bis. Ideò addendo, & triplicando, ſexies o. qc. C Q G, æquantur 32. vicibus aſſumptis o. qc. A F. Sed o. qc. A F, ad o. qc. A G, eam habent rationem, quam qc. Q F, ad Cor. 1.
qc. Q G, hoc eſt quam 1. ad 32. Quapropter o. qc. A F, 32 3. huius.
vicibus aſſumpti, æquantur o. qc A G. Quamobrem ſexies. o. qc. C Q G, æquantur o. qc. A G. Vnde o. qc. A G, ſexcupli ſunt o. qc. trianguli, C Q G, vel, C A Q. Quod demonſtrandum erat.

Huius quoque, & proximè præcedentium poteſt. ſatis elegantes miſit ad me demonſtrationes per Indiuiſibilia, in Exerc. ant. prænominatus Roccha, quarum methodo & ad alias procedi poteſt.

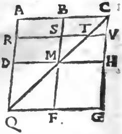
PRO-

PROPOSITIO XXVI.

In eodem Schemate antecedenti o. cc. AG, ſeptupla ſunt o. cc. trianguli, CQG, vel CAQ.

NAmque cc. R T, plus cc. T V, æquatur 2. cc. R S, plus 30. factis ſub qq. R S, & q. ST, plus 30. factis ſub q. R S, & qq. S T, plus 2. cc. S T, atque, R V, ducta eſt vtcumque: patet ergo o. cc. A Q C, plus o. cc. C Q G, æquales eſſe o. cc. A F, bis, plus 30. factis ſub o. qq AM, & ſub o. q. B M C, plus 30. factis ſub o. qq. D F, & ſub o. q. Q M F, plus 30. factis ſub o. q. A M, & ſub o. qq. B M C, plus 30. factis ſub o. q. D F, & ſub o. qq. Q M F, plus o. cc. B M C, bis, & plus o. cc. Q M F, bis. Ideòque propter identitatem parallelogrammorum, A M, D F, nec non & triangulorum, A Q C, C Q G, ac triangulorum, B M C, Q M F; o. cc. C Q G, bis æquales erunt bis, o. cc. A F, plus 60. factis ſub o. qq D F, & o. qq. Q M F, plus 60. factis ſub o. q. D F, & ſub o. qq. Q M F, plus quater o. cc. Q M F. Sed vt factum ſub o. qq. D F, & ſub o. q. Q M F, ad o. cc. D F: ita ſunt o. q. Q M F, ad c. q. D F, hoc eſt ita 1. ad 3. Quare 60. facta ſub o. qq. D F, & ſub o. q. Q M F, æqualia ſunt 20. vicibus aſſumptis o. cc. D F, hoc eſt decies o. cc. A F.

(Margin: Per exēplum ſecundum. Cor. 18. huius. — Cor. 1. 11. huius)



Rurſus vt factum ſub o. q. D F, & ſub o. qq. Q M F, ad o. cc. D F, ita o. qq. Q M F, ad o. qq. D F, hoc eſt 1. ad 5. Igitur 60. facta ſub o. q. D F, & ſub o. qq. Q M F, æquantur 12. o. cc. D F, hoc eſt 6. o. cc. A F. Iterum cum triangula, Q M F, C Q G, ſint ſimilia, o. cc. Q M F, erunt æquales

(Margin: Cor. 1. 11. huius — 7. huius)

les $\frac{1}{128}$ o. cc. CQG. Igitur 4. o. cc. QMF, æquantur $\frac{1}{32}$ o. cc. CQG. Iam æqualia æqualibus ſubſtituantur, 2. o. cc. CQG, ſunt æquales 2. o. cc. AF, plus 10. o. cc. AF, plus 6. o. cc. AF, plus $\frac{1}{32}$ o. cc. CQG. Igitur $\frac{63}{32}$ o. cc. CQG, æquantur 18. o. cc. AF. Omnia diuidantur in 9. & ducantur in 32; manifeſtum eſt ergo 7. o. cc. CQG, æquari 64. o. cc. AF. Aſt o. cc. AF, ad o. cc. AG, ita ſe habent vt cc. QF, ad cc. QG, hoc eſt vt 1. ad 64. Quapropter o. cc. AG, ęquantur 64. o. cc. AF. Ideoq. 7. o. cc. AQC, æquantur o. cc. AG. Vnde o. cc. AG, ſeptupli ſunt o. cc. AQC, vel, CQG. Quod, &c. Cor. 1. 3. huius.

Cum eſſet ſimilis ratio in reliquis poteſtatibus, hic non in alijs contexuit demonſtrationem, at maioris claritatis gratia in cubocubocubis, quam nunc ſubiungimus, eam exarauit.

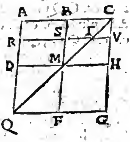
PROPOSITIO XXVII.

In eodem Schemate o. ccc. AG, decupli ſunt o. ccc. trianguli, CQG, vel, CAQ.

ETenim ccc. RT, plus ccc. TV; æquatur 2. ccc. RS, plus 72. factis ſub qqc. RS, & ſub q. ST, plus 252. factis ſub qc. RS, & ſub qq. ST, plus 168. factis ſub c. RS, & ſub cc. ST, plus 18. factis ſub, RS, & ſub qcc; ST, prætereaq. RV, ducta eſt vtcumque. Per exēplum 3.

Hinc colligitur o. ccc. AQC, plus o. ccc. CQG, æquari 2. o. ccc. AF, plus 72. factis ſub o. qqc. AM, & ſub o. q. BMC, plus 72. factis ſub. o. qqc. DF, & ſub o. q. QMF, plus 252. factis ſub o. qc. AM, & ſub o. qq. BMC, plus 252. factis ſub o. qc. DF, & ſub o. qq. QMF, plus 168. factis ſub o. c. AM, & ſub o. cc. BMC, plus 168. factis ſub o. c. DF, & ſub o. cc. QMF, plus 18. factis ſub o. l. Cor. 18. huius.

A M, & ſub o. qcc, B M C, plus 18. factis ſub o. l. D F, & ſub o. qcc. Q M F.



Et propter identitatem triangulorum, A Q C, C Q G, item triangulorum, B M C, Q M F, necnon parallelogrammorum, A M, D F, 2.o. cc. A Q C, ſunt æquales 2.o. ccc. A F, plus 144. factis ſub. o. qqc. D F: & ſub o. q. Q M F, plus 504. factis ſub o. qc. D F, & ſub o. qq. Q M F, plus 336. factis ſub o. c. D F, & ſub o. cc. Q M F, plus 36. factis ſub o. l. D F, & ſub o. qcc. Q M F.

Verum eodem, quo ſupra vſus ſum ratiocinio, concluditur 144. facta ſub o. qqc. D F, & ſub o. q. Q M F, æquari 48. o. ccc. D F, hoc eſt 24. o. ccc. A F. Item 504. facta ſub o. qc. D F, & ſub o. qq. Q M F, æquari $\frac{504}{10}$ o. ccc. D F, ſeu $\frac{252}{5}$ o. ccc. F A. Item 336. facta ſub o. c. D F, & ſub o. cc. Q M F, æquari 48. o. ccc. D F, vel 24. o. ccc. A F. Item 36. facta ſub o. l. D F, & ſub o. qcc. Q M F, æquari 4. o. ccc. D F, hoc eſt 2. o. ccc. A F.

Igitur æqualia æqualibus ſubrogando 2.o. ccc. A Q C, ſunt æquales 2. o. ccc. A F, plus 24. o. ccc. A F, plus $\frac{252}{5}$ o. ccc. A F, plus 24. o. ccc. A F, plus 2. o. ccc. A F.

Igitur 10. o. ccc. A Q C, æquantur 512. o. ccc. A F. Et quia o. ccc. A F, ad o. ccc. A G, ſunt vt ccc. Q F, ad ccc. Q G, hoc eſt vt 1. ad 512: ideo 10. o. ccc. A Q C, æquantur o. ccc. A G. Ergo o. ccc. A G, decupli ſunt o. ccc. trianguli, A Q C, vel, C Q G. Quod, &c.

Cor. 1. 3. huius.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis ergo in ſuppoſitis hucuſq; poteſtatibus, & ſubinde in omnibus, cum ſemper ſit eadem ratio; patet in quocunq; parallelogrammo, ducta diametro, regulaq; aſſumpta quocunq; laterum; o. p. parallelogrammi o. p. eiuſdem gradus cuiuſlibet triangulorum à diametro conſtitutorum,

rum, fore multiplices ſecundum numerum, numerò gradus poteſtatis vnitate maiorem. Et ſubindè innoteſcit Prop. 23. ſuperius traditam pro o. p. pariter verificari.

S C H O L I V M.

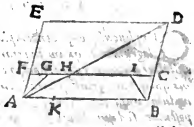
CVm hucuſq; o. p. contemplati fuerimus tam in parallelogrammis, quam in triangulis, ſupereſt, vt nunc parallelogrammum cum trapezio conferamus, conſiderando in his quoq; rationem o p. eorundem. Hoc autem ſubiungimus nedum, quia id & ordo, & complementum huius doctrinæ poſtulat, ſed quia ſicuti fuſi parabolici menſura pendebat ex Prop. 22. ita menſura ſegmentorum eiuſdem fuſi ſecti planis axi parallelis, pendet ex nota ratione o qq. parallelogrammi, & trapezij in eadem altitudine, & baſi cum eo ſtantis. Horum autem, ac reliquarum poteſt rationem exhibet iuxta noſtram inuentionem ſubſequens Propoſitio.

PROPOSITIO XXVIII.

In quocunq; parallelogrammo in eadem baſi, & altitudine cum trapezio, cuius oppoſitæ baſes ſint inuicem parallelæ, exiſtente, regula ſumpta baſi: o. p. parallelogrammi ad o. p. trapezij, eiuſdem gradus, erunt vt factum ſub multiplici differentiæ dictarum oppoſitarum baſium, ſecundum numerum poteſtatis vno gradu maioris, & ſub poteſtate aſſumpti gradus maioris baſis, ad differentiam poteſtatum vno gradu maiorum aſſumpta poteſt. earundem oppoſitarum baſium.

SIt parallelogrammum, F A B C, in eadem baſi, A B, & altitudine cum trapezio, A G I B, cuius oppoſitæ

baſes, A B, G I, ſint parallelæ, & ſit regula, A B. Dico o. p. parallelogrammi, F B, ad o. p. trapezij, A G I B, eiuſdem gradus, eſſe vt factum ſub multiplici differentiæ ipſarum, A B, GI, quæ ſit, FH, ſecundum numerum poteſt. vno gradu maioris, & ſub pot. aſſumpti gradus ipſius, AB; ad differentiam poteſtatum ipſarum, AB, GI, vno gradu maiorum aſſumpta poteſtate. Iungantur puncta, A, H, recta, AH, & producantur, A H,



B C, vſq; ad concurſum in, D, compleaturq; parallelogrammum, E B. Cum ergo, F H, ſit differentia ipſarum, A B, G I, erit, H C, æqualis ipſi, G I, & o. p. quæcunq; trapezij, AGIB, æquabuntur o. p. eiuſdem gradus trapezij, A H C B. Hoc verò oſtendetur eodem modo, quo Prop. 27. Lib. Sec. Geo. Ind. poſita in Exerc. 1. Pag. 60. probata eſt de huiuſmodi trapeziorum o. q. Vnde hoc ſuppoſito ſatis erit oſtendere o. p. F B, ad o. p. trapezij, A H C B, habere dictam rationem. Et quoniam o. p. F B, ad o. p. trapezij, A H C B, habent rationem compoſitam ex rationibus o. p. FB, ad o. p. EB, o. p. EB, ad o. p. trianguli, DAB, & o. p. trianguli, DAB, ad o. p. trapezij, AH C B, eiuſdem ſemper gradus his o. p. ſuppoſitis. o. p. verò, 4. huius. FB, ad o. p. EB, ſunt vt, CB, ad, BD, vel, HF, ad, AB. Et o. p. EB, ad o. p. trianguli, DAB, ſunt in ratione mul-
Cor. 27. huius. tiplici ſecundum numerum vno gradu maiorem numero aſſumptæ poteſtatis. Vt o. l. E B, duplæ ſunt o. l. trianguli, DBA: o. q. ſunt tripla: o. c. quadrupli, &c. Si ergo totuplex fiat, A B, vt ipſius, A K, quotuplices ſunt o. p. E B, o. p. D B A. Ex æquo o. p. F B, ad o. p. trianguli, DBA, erunt vt, FH, ad, A K, ideſt vt multiplex ipſius, F H, quotuplex eſt, B A, ipſius, A K, ad ipſam, A B. Itaq; o. p. F B, ad o. p. D B A, erunt vt multiplex ipſius, F H, quotus eſt numerus poteſtatis vno gradu maioris aſſũpta poteſtate ad, AB. Vt o. l. FB, ad o. l. trianguli, DBA, erunt

vt

vt dupla, F H, ad, A B; o. q. E B, ad o. q. D B A, vt tripla, F H, ad, A B, o. c. &c. vt quadrupla, F H, o. c. vt quintupla, &c. Remanent comparandæ o. p. D A B, ad o. p. trapezij, AHCB. Et quia triangula, ABD, HCD, ſunt ſimilia, ideò o. p. trianguli, DBA, ad o. p. trianguli, DCH, ſunt vt pot. A B, ad pot. H C, ambabus tamen vno gradu maioribus præaſſumptis poteſtatibus. Et per conuerſionem rationis o. p. DBA, ad o. p. trapezij, AHCB, erunt vt poteſtas, A B, ad differentiam poteſtatum, A B, H C. Et quia prius probatum fuit o. p. F B, ad o. p. D B A, eſſe vt multiplex, F H, ſecundum numerum poteſtatis vno gradu maioris aſſumpta pot. ad, A B, ideſt (ſumpta pot. AB, eiuſdem gradus tanquam communi altitudine) vt factum ſub dicta multiplici, FH, & ſub pot. AB, ad factum ſub, AB, & eadem pot. A B, nempè ad pot. AB, vno gradu maiorem. Poſtremò verò demonſtratum fuit o. p. D B A, ad o. p. AHCB, eſſe vt pot. AB, vno gradu altiorem ad differentiam pot. A B, H C, vno gradu maiorum. Ideò ex æquo o. p. F B, ad o. p. trapezij, AHCB, & ſubindè ad o. p. trapezij propoſiti, AGIB, erunt vt factum ſub multiplici, F H, ſecundum numerum pot. vno gradu maioris, & ſub pot. A B, aſſumpti gradus, ad differentiam poteſtatum, A B, H C, vel, G I, vno gradu maiorum aſſumpta poteſtate. Vt o. l. F B, ad o. l. trapezij, A G I B, erunt vt factum ſub dupla, F H, &, A B, ad differentiam quadratorum, A B, H C. o. q. FB, ad o. q. A G I B, vt factum ſub tripla, F H, & q. A B, ad differentiam cuborum, A B, H C, o. c. ad o. c. vt factum ſub quadrupla, F H, & c. AB, ad differentiam qqtorum, AB, H C, o. qq. ad o. qq. vt factum ſub quintupla, F H, & qq. A B, ad differentiam qqc. AB, HC. Et ſic deinceps in infinitum. Quod oſtendere oportebat.

Cor. 7. huius. & num. 6. Cor. Secundi 22. huius

Reſpondet hæc Propoſitioni 28. *Lib. Sec. Geo. Ind. quæ habetur in Exerc.* 1. *Pag.* 67. *tantumq; attingit o. q.*

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Expoſita quacunq; parabola, HBE, in baſi, HE, & circa axim BG, cum illi circumſcripto parallelogrammo, AE, ductaq; quacunq; in, AE, ipſi, BG, parallela, vt, CF, ſecante parabolicam lineam, BE, in K; ſi conuertatur, AE, & parabola, HBE, circa baſim, HE, ex, AE, fiet cylindrus, & ex parabola, HBE, fuſus parabolicus. Sed ex, CE, fiet cylindrus prædicti pars, & ex trilineo, KFE, fiet ſegmentum dicti fuſi, ſecti plano per, CF, ducto, & ad axem, HE, dicti fuſi erecto. Igitur ſi exponatur quacunq; magnitudo, L, & vt factum ſub tripla, FE, & q. EG, ad differentiam cuborum, EG, GF, ita fiat, L, ad, MO. Vt verò factum ſub quintupla, FE, & qq. EG, ad differentiam qcuborum, EG, GF, ita quoq; fiat eadem, L, ad, MN, ſumaturq; ipſi, ON, æqualis, OP, vt fiat, MP, quæ erit minor, MQ, æquali ipſi, L, vt probabitur. Dico vt, L, ad, PQ, ita eſſe cylindrum ex, CE, ad ſegmentum genitum ex trilineo, KFE.

Cor. primæ Lib. 5. c Geo. Ind. Cor. 1. 11. huius.

DVcatur, BE, diameter, quam ſecet, CF, in, I. Et quia eſt, FC, ad, CK, vt q. DB, ad q. BC, hoc eſt vt q. FC, ad q. CI, & idem contingit in cæteris quibuſcunq, ipſi, BG, parallelis in parallelogrammo, CE. Ideò vt o. l. CE, ad o. l. DCKE, quadrilinei, ita erunt o. q. CE, ad o. q. trapezij, CDEI. Similiter quia vt q. FC, ad q.

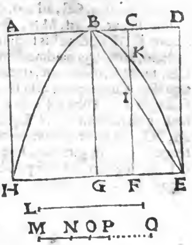
ad q. CK, ita eſt qq. F C, ad qq. C I; ideò vt o. q. C E; ad o. q. quadrilinei, C D E K; ita erunt o. qq. C E, ad o. qq. trapezij, C D E I. Vt verò o. q. CE, ad o. q. trapezij, C D E I, ita eſt factum ſub tripla, F I, & q. E D, ad differentiam cuborum, D E, C I; & ita factum ſub tripla, EF, & q. EG, ad differentiam cuborum, E G, G F, quia, F E, reſpondet ipſi, F I, EG, ipſi, ED, &, GF, ipſi, C I, in eadem proportione, ob ſimilitudinem interiorum triangulorũ. Vt verò factum ſub tripla, F E, & q. E G, ad differentiam cuborum, E G, G F, ita ex hypotheſi eſt, L, ad, M O. Ergo o. q. CE, ad o. q. trapezij, C D E I, & ſubindè o. l. C E, ad o. l. quadrilinei, C D E K, ſeu o. q. CE, ad factum ſub o. l. CE, & trilinei, C D E K, erunt vt, L. ad, MO. Sed factum ſub o. l. CE, CDEK, æquatur facto ſub o. l. trilinei, FKE, & quadrilinei, CDEK, plus o. q. CDEK. Ergo o. q. CE, ad factum ſub o. l. F K E, KEDC, cum o. q. CDEK, ſunt vt, L, ad, MO, quod ſerua.

Cor. 1. 11. huius.

Per ant.

Cor. 1. 11. huius.

2. huius.



Inſuper quia o. qq. CE, ad o. qq. trapezij, CDEI, oſtenſa ſunt eſſe, vt o. q. C E, ad o. q. quadrilinei, C D E K, & illa ſunt vt factum ſub quintupla, F E, & qq. E G, ad differentiam qcuborum, EG, GF, hoc verò eſt vt, L, ad, MN. Ergo o. q. CE, ad o. q. C KED, erunt vt, L, ad, M N. Patet autem, cum o. q. C E, ad factum ſub o. l. C E, & o. l. C D E K, probata fuerint eſſe, vt, L, ad, M O; factum autem ſub o. l. C E, & o. l. C D E K, ſuperet o. q. C D E K, cum probatum fuerit æquari facto ſub o. l. FKE, KCDE, & o. q. KCDE, ideò, MO, ſuperare, MN. Sunt ergo o. q. CE, ad factum ſub o. l. trilinei, FKE, & quadrilinei, KC

Per ant.

DE,

DE, vt, L, ad, NO, & ad idem factum bis, vt, L, ad, NP. Eadem verò o. q. CE, ad o. q. quadrilinei, KCDE, oſtenſa ſunt eſſe, vt, L, ad, M N. Ergo colligendo, o. q. C E, ad o. q. CDEK, & ad bis factum ſub, CDEK, KEF, erunt vt, L. ad, MP. Quemadmodum vero illa ſunt minora o. q. CE, ita, M P, minor erit, quam, L, vel, M Q, eidem, L, æqualis. Cum ergo o. q. C E, ad o. q. C D E K, cum bis facto ſub o. l. CDEK, KEF, ſit vt, L, ad, MP; erunt per conuerſionem rationis o. q. CE, ad o. q. trilinei, KEF, vt, L, ad, PQ. Sic pariter erunt omnia ſolida ſimilaria, & conſequenter etiam rotunda, hoc eſt cylindrus genitus ex, C E, ad ſegmentum fuſi parabolici genitum ex, K E F. Quod oſtendere oportebat.

13. huius. cum 18. huius. 33. Exercit. 1.

COROLLARIVM.

Manifeſtum ergo eſt inuentam proportionem verificari pariter de omnibus ſolidis ſimilaribus genitis ex parallelogrammo, C E, & trilineo, K E F, etiamſi, BG, ſit tantum diameter: quæ proportio nota erit, ſi, GE, G F, F E, cum angulo, CFE, notæ ſupponantur.

SCHOLIVM.

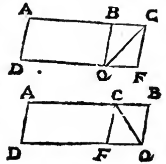
Et quoniam prænominatus Beaugrand ſimul cum allatis ab eo demonſtrationibus, elegantiſſimam quoque miſit pro menſura fuſi parabolici, illiuſque ſegmentorum, vt in Præfat. innuebatur, idcircò vt Lector eadem quoque perfrui poſſit, eandem hic apponemus, præmiſſo tamen eiuſdem inſigni Lemmate, quod tale eſt.

Secundum Lemma Beaugrand.

Sed aliam, inquit ipſe, ſatis elegantem, & vniuerſaliſſimam, quam Prop. 30. Lib. Sec. Geom. Ind. de lineis

neis rectis tantum enuntiauit, ſubnectere eſt animus. Hanc autem concipiam per modum canonis, ſeu regulæ inueniendi (expoſitis parallelogrammis, A Q, Q C, æquèaltis, & ducta diametro, Q C, aſſumptaquè, D F, tanquam communi regula) rationem facti ſub o.p. A Q, B F, ad factum ſub o.p. trapezij, A D Q C, & trianguli, C Q F. Dummodo ſupponantur o.p. A Q, eiuſdem eſſe gradus cum o.p. trapezij, A D Q C; & o.p. B F, eiuſdem gradus cum o.p. trianguli, C Q F.

PRò primo termino ergo, ſeu antecedente rationis quæſitæ aſſumatur poteſtas rectæ, D Q, quæ in eodem gradu ſubſiſtat, quo poteſtates, A Q, vel trapezij, A D Q C. Deinde componatur potentia abs, D F, minus, Q F, in prima figura; vel abs, D F, plus, F Q, in ſecunda, quæ in eodem gradu quoque ſit, quo o.p. A Q, vel trapezij, A D Q C. Quantitates, è quibus componetur potentia, ordinentur ſecundum ordinem in Algebra vſitatum, atque prima quantitas diuidatur per numerum vnitate maiorem numero gradus o.p. B F, vel trianguli, C Q F. Secunda quantitas diuidatur per numerum ſe-



quentem in progreſſione naturali numerorum, tertia per numerum in eadem progreſſione ſequentem, atq. eodem ordine reſiduæ quantitates diuidantur. Veluti ſi prima quantitas diuidatur per 5. ſecundam opus erit partiri per 6. tertiam per 7. quartam per 8. &c. Quo peracto habebis ſecundum terminum.

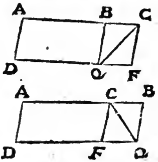
Exempli gratia, iuxta hunc canonem, aſſero factum ſub o. q. A Q, B F, ad factum ſub o. q. trapezij, A D Q C, & trianguli, C Q F, eſſe vt q. D Q, ad $\frac{1}{3}$ q. D F, minus $\frac{2}{4}$ rectanguli, D F Q, plus $\frac{1}{5}$ q. Q F, in 1. figura: vel ad $\frac{1}{3}$ q. D F, plus $\frac{2}{4}$ rectanguli, D F Q, plus $\frac{1}{5}$ q. Q F, in ſecunda figura.

CVm autem fuſi parabolici, illiuſque ſegmentorum, certa quadam ratione reſectorum dimenſio ex hoc Lemmate pendeat, inſtituto circa o. q. propterea eius demonſtrationem extendere volui, vt hinc etiam pateat quomodo demonſtrandæ ſint reliquæ Propoſitiones, quæ velut è fonte ex præcedente canone fluunt.

Eſt ergo factum ſub o. q. AF, BF, ad factum ſub o. q. A
Cor. 3. F, C Q F, vt o. q. B F, ad o. q. trianguli, C Q F, hoc eſt
11. huius vt 3. ad 1. vel vt q. D F, ad $\frac{1}{3}$ q. D F. Item vt bis factum
21. huius ſub o. l. A F, & o. c. B F, ad factum ſub o. l. A F, & o. c. C Q F, ita o. c. B F, ad o. c. C Q F, hoc eſt ita 4. ad 1. vel ita duplum rectanguli, D F Q, ad $\frac{2}{4}$ rectanguli D F Q. Item o. qq. B F, ad o. qq. C Q F, ſunt vt 5. ad. 1. hoc eſt vt q. Q F, ad $\frac{1}{5}$ q. Q F. Sed vt factum ſub o. q. A F, B F,
Cor. 3. ad bis factum ſub o. l. A F, & ſub o. c. F B, ita parallelo-
11. huius grammum, AF, ad parallelogrammum, BF, bis ſumptum, hoc eſt ita, D F, ad 2. F Q, vel ita q. D F, ad 2. rectangula, D F Q. Et vt bis factum ſub o. l. A F, & ſub o. c.
Cor. 3. B F, ad o. qq. B F, ita 2. parallelogramma, AF, ad paralle-
11. huius logrammum, B F, hoc eſt ita 2. D F, ad, F Q, vel ita 2. rectangula, D F Q, ad q. F Q.

Itaque in prima figura factum ſub o. q. A F, B F, minus bis facto ſub o. l. A F, & ſub o. c. B F, plus o. qq. B F, ad factum ſub o. q. A F, & trianguli, C Q F, minus bis facto ſub o. l. A F, & ſub o. c. C Q F, plus o. qq. C Q F, erit vt q. D F, minus 2. rectangulis, D F Q, plus q. Q F, ad $\frac{1}{3}$ q.
3. Sec. D F, minus $\frac{2}{4}$ rectanguli, D F Q, plus $\frac{1}{5}$ q. Q F.
Elem. cũ Sed in prima figura factum ſub o. q. A Q, B F, æquatur
Cor. 18. & Cor. facto ſub o. q. A F, B F, minus bis facto ſub o. l. A F, &
11. huius ſub

ſub o. c. B F, plus o.qq. B F. Item factum ſub o. q. trapezij, A D Q C, & trianguli, C Q F, ęquale eſt facto ſub o. q. A F, & trianguli, C Q F, minus bis facto ſub o. l. A F, & ſub o. c. C Q F, plus o. qq. C Q F. Item q. D Q, æquatur q. D F, minus 2. rectangulis, D F Q, plus q. F Q.



Nunc in analogiſmo ſuperius expoſito æqualia æqualibus ſubrogentur. Igitur factum ſub o. q. A Q, B F, eandem habebit rationem ad factum ſub o. q. trapezij, A D Q C, & trianguli, C Q F, quam q. D Q, ad $\frac{1}{3}$ q. D F, minus $\frac{1}{2}$ rectanguli, D F Q, plus $\frac{1}{5}$ q. Q F.

Ordine non diſſimili concludetur in ſecunda figura factum ſub o. q. A Q, B F, ad factum ſub o. q. A D Q C, C Q F, eſſe vt q. D Q, ad $\frac{1}{3}$ q. D F, plus $\frac{1}{2}$ rectanguli, D F Q, plus $\frac{1}{5}$ q. Q F.

Porrò ex præcedentibus colligitur factum ſub o. q. A Q, B F, ad factum ſub o. q. A D Q C, C Q F, ſe habere vt 60. q. D Q, ad 20. q. D F, minus 30. rectangulis, D F Q, plus 12. q. Q F. Verum 15. q. D Q, æquantur 15. q. D F, minus 30. rectangulis, D F Q, plus 15. q. Q F, in 1. figura. In ſecunda autem 15. q. D Q, æquantur 15. q. D F, plus 30. rectangulis, D F Q, plus 15. q Q F.

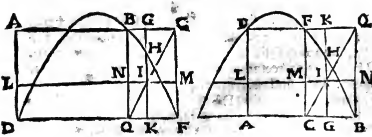
Itaque in vtraque figura vt factum ſub o. q. A F, B F, ad factum ſub o. q. A D Q C, C Q F, ita erunt 60. q. D Q, ad 5. q. D F, plus 15. q. D Q, minus 3. q. Q F. Vel poſterioris rationis terminos per 60. diuidendo, ita q. D Q, ad $\frac{1}{4}$ q. D Q, plus $\frac{1}{12}$ q. D F, minus $\frac{1}{20}$ q. Q F.

PROPOSITIO XXX.

Iam eſto parabola, DBF, recta, DF, hinc inde vbicunque volueris ad parabolam terminata, recta, BQ, è diametris paraboles vna. Dico, aſſumpta prò regula communi recta, BQ, o. q. parallelogrammi, BF, ad o. q. trilinei, BQF, eſſe vt q. DQ, ad [illegible] q. DQ, plus q. DF, minus [illegible] q. QF.

Vt in Prop 47 Libri Quarti. Geom. Ind.

HOc autem arte, qua Caualerius vſus eſt Libro Quarto Geometrię Ind. vel forſitan vt ſequitur demonſtrari poteſt. Compleatur parallelogrammum, AF, junctaque, CQ, ducatur recta, GHK, vbicunque volueris inter rectas, BQ, CF, modò ſit eis parallela. Tum



protrahatur per punctum, I, recta, LNM, parallela ordinatę, DF. Quandoquidem natura paraboles, vt rectangulum, DQF, ad rectangulum, DKF, hoc eſt rectangulum, LNM, ad rectangulum, LIM, ita eſſe conſtat, BQ, hoc eſt, Gk, ad, Hk. Ideòq. factum ſub q. LN, & q. NM,

3. Quarti Geom. Ind.

NM, ad factum ſub q. LI, & q. IM, erit vt q. Gk, ad q. Hk. Cum autem, Gk, ducta ſit abſque electione inter rectas, BQ, CF, ſequitur factum ſub o. q. AQ, BF, ad factum ſub o. q. ADQC, CQF, eſſe vt o. q. BF, ad o.q. trilinei, BQF.

Sed prior ratio demonſtrata eſt æqualis ei, quæ q. DQ, ad $\frac{8}{5}$ q. DQ, plus $\frac{1}{12}$ q. DF, minus $\frac{1}{28}$ q. QF. Ergo & poſterior. Porrò fuſus parabolicus eſt ſolidum ex reuolutione plani parabolici ſuper recta ordinatim ad axem applicata. Igitur rectam, DF, eſſe ad axim ordinatim applicatam ſupponamus. Solidum ergo ex reuolutione figuræ, DBF, ſuper recta, DF, genitum erit fuſus parabolicus in prima nempè figura. Solida autem ex reuolutione trilinei, BQF, ſuper recta, QF, ex præcedentibus notam habent rationem ad cylindros rectos eiuſdem axis, & baſeos, eam ſcilicet, conuertendo, habet cylindrus ad ſolidum, quam q. DQ, ad $\frac{8}{5}$ q. DQ, plus $\frac{1}{12}$ q. DF, minus $\frac{1}{25}$ q. QF. Sed in prima figura eiuſmodi ſolida ſunt fruſta fuſi parabolici, quæ planis axi paraboles parallelis reſecantur. Quare ſi recta, DF, ſecta eſſet biſariam in, Q, puncto, cylindrus ex reuolutione rectanguli, BF, ſuper recta, QF, genitus, ad ſolidum ex trilineo, BQF, ſuper eadem recta, QF, reuoluto procreatum eam haberet rationem, quam 15. ad 8. vti rectas ad numeros reuocanti palam erit. Verum in hoc caſu cylindri prædicti duplus eſt cylindrus rectus, cuius axis, DF, & baſis circulus, cuius radius rectæ, BQ, ſit æqualis. Item ſolidi vltimò commemorati duplus eſt fuſus parabolicus ex reuolutione DBF, ſuper recta, DF, productus. Quamobrem cylindrus rectus, cuius axis, DF, & baſis circulus, qui radium habeat rectæ, BQ, æqualem, ad fuſum parabolicum ex reuolutione figuræ, DBF, ſuper recta, DF, genitum eam habebit rationem, quam 15. ad 8, Igitur non tantum fuſi parabolici, verum etiam ſegmentorum, quæ planis axi paraboles parallelis abſcinduntur, dimenſionem, iuxta propoſita ſatis ſuperq; explicauimus, & demonſtrauimus. Quod, &c.

Vt in Lem. ant.

SCHO-

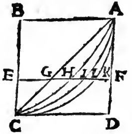
SCHOLIVM.

Haec elaborabat vir ille ingenioſiſſimus cum necdum ex quodam morbo conualuiſſet, quem lethalem Medici diiudicarant, cui idcircò paulò poſt, maximo Reip. literariæ detrimento mors ſucceſſit. Enimuerò cum occiderit florentibus annis, tantùmq; nihilominus in Geometricis progreſſus fuerit, quæ, & qualia, ſi naturalem vitæ curſum adimpleuiſſet, ab eo ſperari poterant, hæc ſedulò perluſtrans facilè quiſq; poterit intelligere. Huic autem ſatis probabatur hæc Ind. methodus, vt propterea ad me Italicè ſcribens ſub d. 8. Nouembris, Anno 1640. hæc de eadem protulerit. La ſupplico di ſcriuermi ſe lei hà applicato la ſua inuentione di dimoſtrare per gl'Indiuiſibili alla ricerca de' centri di grauità, e l'ordine, che tiene, al che giugnerà, ſe gli piace qualchedun'eſempio. Veramente altretanto ſtimo queſta maniera di dimoſtrare, poiche è breuiſſima, e procede direttamente, e non per l'aſſurdo, &c. Porrò iam demoſtratis quædam pauca adhuc ſuperaddemus, finemq; imponemus præſenti doctrinæ quatenus nobis licuit excultæ, alijs immenſum ſpeculationum campum aperuiſſe ſat indicantes.

PROPOSITIO XXXI.

In quocunq; parallelogrammo, deſcriptis iuxta Prop. 23. diagonalibus à prima deinceps quot libuerit, & retenta eadem regula, qua deſcribuntur: o. p. quæcunq; dicti parallelogrammi ad o. p. eiuſdem gradus cuiuſcunq; ſpatij dictarum diagonalium, erunt vt factum ſub

ſub numero aſſumptæ poteſtatis, & numero ſpatij, vnitate auctum, ad ipſam vnitatem.



ASſumpto quocunq; parallelogrammo, B D, in quo iuxta dictam Prop. 23. ſint deſcriptæ quotcunq; diagonales, A G C, prima, A H C, ſecunda, A I C, tertia, A L C, quarta, &c. quouſq; libuerit, regula latere, C D, quod hic quoq; ſit regula. Dico o.p. parallelogrammi, BD, quæcunq; ad o. p. cuiuſcunq; ex dictis ſpatijs eiuſdem tamen gradus, eſſe vt factum ſub numero aſſumptæ poteſtatis, & numero ſpatij, vnitate aucto, ad ipſam vnitatem. Vt ſi ex. gr. aſſumantur cubi, quartumq; ſpatium, ALCD, dico o. c. B D, ad o. c. ſpatij, ALCD, eſſe vt factum ſub 3. qui eſt numerus cubi, & ſub 4. qui eſt numerus ſpatij, hoc eſt vt 12. vnitate auctum, ſcilicet vt 13. ad vnitatem. Ducta enim in, BD, quacunq: recta, EF, ipſi, CD, regulæ æquidiſtante, ac ſecante diagonales in, G, H, I, L, quoniam proportio cubi, E F, ad c. FL, eſt triplicata proportionis, EF, ad, FL, ſeu compoſita ex tribus rationibus, EF, ad, FL. Ratio autem, EF, ad, FL, componitur ex ratione, EF, ad, FG, FG, ad FH, FH, ad, FI, &, FI, ad, FL, (quæ ſunt æquales, quia ex lege deſcriptionis dictarum diagonalium fiunt hæ lineæ, E F, G F, H F, I F, L F, continuò proportionales) hoc eſt ex 4. rationibus ipſius, A F, ad, F G. Ergo tres rationes, E F, ad, F L, æquabuntur 12. rationibus ipſius, F E, ad, F G, qui numerus 12. habetur ex ductu 3. numeri poteſtatis, in 4. numerum ſpatij. Et conſequenter ratio cubi, E F, ad c. FL, duodecupla erit rationis, EF, ad, FG. Sed etiam ratio, quam habet, E F, ad eius portionem interceptam inter, AD, & duodecimam diagonalem, quæ ſit, K F, componitur ex 12. rationibus ipſius, E F, ad, F G, terminat enim illa duodecimam proportionem, æqualem propor-

Cor. 23. huius.

tioni

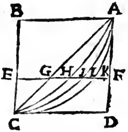
tioni ipſius, AF, ad, FG, vt, conſideranti manifeſtum erit. Ergo c. EF, ad c. FL, erit vt, EF, ad, FK, ſpectantem ad duodecimam diagonalem. Et, EF, ducta eſt vtcumq;
11. huius. ergo o. c. BD, ad o. c. trilinei, ALCD, erunt vt o. l. BD, ad o. l. duodecimi ſpatij, & ſubinde vt, BD, ad ipſum ſpatium duodecimum. Sed BD, eſt huius ſpatij tredecuplum. Ergo & o. c. BD, ad o. c. trilinei, ALCD, erunt vt 13. ad 1. ſeu eorum tredecupli. Rectè ergo producto ex 3. & 4. additur vnitas, vt fiant 13. qui ad 1. habent dictam proportionem.

Sed vt vniuerſaliter fiat demonſtratio ſic procedemus. Quia ratio ipſius, EF, ad quamcunq; eius portionem reſectam verſus, F, per diagonalem aſſumpti ſpatij, quæ ſit ex. gr. FK, componitur ex tot rationibus ipſius, EF, ad, FG, quotum eſt ipſum ſpatium, nam ad diagonalem cuiuſq; ſpatij terminatur vna ratio, æqualis rationi ipſius, EF, ad, FG. Aſſumpto verò quouis poteſt. gradu, ratio pot. EF, ad pot. Fk, eiuſdem gradus totuplex eſt eiuſdem rationis, EF, ad, FG, quotus eſt numerus dictæ poteſtatis. Ideò factum ſub numero aſſumpti ſpatij, & numero pot. exhibebit numerum proportionum, AB, EF, in ratione, EF, ad, FG, continuatarum, numerumq; ſpatij, ad quod parallelogrammum, BD, oſtenditur eſſe, vt ipſius, BD, o. p. ad o. p. aſſumpti ſpatij. Sed parallelogrammum, BD, ad inuentum ſpatium eſt, vt numerus eiuſdemmet ſpatij, vnitate auctus, ad vnitatem. Ergo o. p. BD, ad o. p. aſſumpti ſpatij erunt vt factum ſub numero aſſumpti ſpatij, & numero poteſt. vnitate aucto ad ipſam vnitatem. Quod, &c.

PROPOSITIO XXXII.

In eadem figura propoſito quocunq; ſpatio, regula eadem, CD, habetur ratio o. p. parallelogrammi, BD, ad o. p. propoſiti ſpatij (eiuſdem tamen ſemper gradus cum poteſt. BD,) à prima, & deinceps in infinitum

tum continuatis poteſtatibus ; ſi exponatur ſeries numerorum à numero dati ſpatij vnitate aucto, deinceps eodem numero ſpatij ſeſe excedentium, ſinguliq; referantur ad vnitatem.



VT ſi proponatur tertium ſpatium, A I C D, numerus eiuſdem eſt 3. addita vnitate fit 4. primus numerus huius ſeriei, in qua numeri ſeſe deinceps per 3. ſemper excedunt. Dico ergo o. l. B D, ad o. l. huius tertij ſpatij, B I C D, eſse vt 4. ad 1. o. q. ad o. q. vt 7. ad 1. o. c. ad o. c. vt 10. ad 1. o. qq. ad o. qq. vt 13. ad 1. &c. retenta ſemper vnitate pro communi omnium proportionum termino conſequente. Hoc autem facilè ex præcedenti Prop. deducitur, nam ſi ducamus 3. numerum ſpatij in numerum primæ pot. ſeu lineæ, qui eſt 1. fiet 3. & addita vnitate, fiet 4. pro antecedente proportionis termino, qui ad 1. erit vt o. l. B D, ad o. l. ſpatij, A I C B. Similiter ducto 3. in numerum ſecundæ pot. hoc eſt in 2. fiet 6. & addita 1. fiet 7. qui eſt in ſecundo loco ſeriei, oſtendens o. q. B D, ad o. q. trilinei, A I C D, eſſe vt 7. ad 1. Pariter ducendo 3. in numerum tertiæ poteſt. ſeu cuborum, qui eſt 3. fiet 9. & addita 1. fiet numerus 10. qui eſt in ſerie tertio loco, oſtendens o. c. B D, ad o. c. AICD, eſſe vt 10. ad 1. Et ſic patet ratio numerorum dictæ ſeriei; qua arte & reliquæ ſeries pro reliquis trilineis pariter extendi poſſunt.

4	7	10	13	16	19	&c.
1	1	1	1	1	1	

SCHOLIVM.

E*Xhibemus ergo in ſequenti Tabella ſeries numerorum pro dignoſcendis proportionibus o. p. B D, ad o. p. eiuſ-*

dem gradus ſpatiorum primi, ſecundi, tertij, &c. vſq; ad decimum, incipiendo à prima poteſt. & progrediendo per illi ſuccedentes pariter vſq; ad decimam poteſt. quæ eſt cccuborum. Qui tamen numeri poterunt facilè per æquale eorum incrementum in infinitum tam in ſpatijs, quam in poteſt. continuari, vt per ſe patet.

Vſus verò ſequentis Tabellæ talis eſt. Si volueris ſcire quam proportionem habeant o. p. cuiuſdam gradus à primo vſq; ad 10. parallelogrammi, BD, ad o. p. eiuſdem gradus cuiuſcunq; ſpatij à primo vſq; ad decimum, quæres in fronte numerum poteſt. & ſpatiū lateraliter in prima ſiniſtra columna, in directumq; habebis numerum, qui ad vnitatem erit in eadem dictarum poteſt. proportione.

Vt volens ſcire quam rationem habeant o. qc. BD, ad o. qc. ſeptimi ſpatij. Quoniam qc. eſt 5. poteſt. ideò quærens 5. in fronte, & lateraliter ſeptimum ſpatium, accipio in area numerum 36. qui ad vnitatem eſt vt o. qc. BD, ad o. qc. ſeptimi ſpatij.

Sed ijdem numeri areales facilè ſine Tabula habentur ducto numero frontali, ſeu poteſt. in numerum lateralem, ſeu ſpatij, addita enim vnitate, vt in ant. Prop. dicebatur, ipſi producto, illicò habetur dictus numerus arealis quæſitus.

Poteſtates	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primum ſpatium	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Secundum	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Tertium	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
Quartum	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41
Quintum	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51
Sextum	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61
Septimum	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71
Octauum	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81
Nonum	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91
Decimum	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101

CO-

Digitized by Google

COROLLARIVM I.

SI in dicta Tabella conſideremus ſeriem numerorum in columnis deſcendentium, illicò intuebimur in columna prima poteſt. o. l. parallelogrammi, B D, duplas eſſe o. l. primi ſpatij, triplas o. l. ſecundi ſpatij, quadruplas o. l. tertij ſpatij, &c. At ex columna ſecunda poteſt. percipiemus o. q. B D, tripla eſſe o. q. primi ſpatij, quintupla o. q. ſecundi ſpatij, ſeptupla o. q. tertij, &c. Similiter ex tertia columna patebit o. c. B D, quadruplos eſſe o. c. primi ſpatij, ſeptuplos o. c. ſecundi, vndecuplos o. c. tertij, &c. & ſic in cæteris. Ita vt in omnibus columnis appareat progreſſionem, ſeu incrementum fieri iuxta numerum poteſt. propriæ columnæ.

COROLLARIVM II.

ET quia ex Corollario præcedenti habetur ordinatim ratio o. q. B D, ad o. q. ſpatiorum, primi nempè, ſecundi, tertij, &c. ideò eandem rationem habebunt nedum ſolida rotunda genita ex parallelogrammo, B D, & dictis ſpatijs reuolutis circa, A D, (tunc autem, A D, debet ſupponi perpendicularis ipſi, A B,) ſed & quæcunq; ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex ijſdem iuxta communem regulam, C D, quomodocunq; D A, ſit ipſi, A B, inclinata.

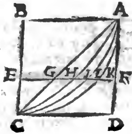
PROPOSITIO XXXIII.

Si, propoſito quocunq; ex reſiduis ſpatijs, B D, in ant. figura, eiuſdem numeri ſpatium quæratur in latere Tabellæ præcedentis Prop. è regione cuius ſumantur in prima, & ſecunda poteſtatum columna reſpondentes numeri. Erit factum ſub his duobus numeris, ad

eiuſdem facti reſiduum, ab eo dempto duplo differentiæ dictorum numerorum, cum numero minori; vt o. q. B D, ad o. q. reſidui ſpatij propoſiti, aſſumpta eadem vt in ſuperioribus regula.

EXpoſita denuò præcedenti figura aſſumatur ex. gr. primum ſpatium reſiduum, A G C B, & in Tabella præcedenti è regione primi ſpatij ſumantur in prima, & ſecunda poteſt. columna numeri 2. & 3. qui inuicem ducti facient 6. Eorum differentia 1. duplicetur, fitq; 2. qui numero minori 2. additus facit 4. quo dempto ex 6. remanent 2. Dico ergo vt 6. ad 2. ita eſſe o. q. B D, ad o. q. AGCB, regula, CD. Quod verum eſſe patet ex Prop. 20.

Sumatur nunc ſecundum reſiduum ſpatium, & cum ſecundo ſpatio ex dicta Tabella accipiantur numeri col. primæ, & ſecundæ pot. nempè 3. & 5. Ab his factum eſt 15. eorum differentia 2. duplicata, iunctaq; ipſi 3. facit 9. qui demptus ex 15. relinquit 8. Dico ergo vt 15. ad 8, ita eſſe o. q. B D, ad o. q. reſidui ſpatij, ſeu ſemiparabolæ, AHCB. Quod verum eſſe oſtendit Propoſit. 24.



Deniq; vt hoc vniuerſaliter oſtendatur, aſſumemus ex. gr. quartum reſiduum ſpatium, A L C B. Sunt ergo o. q. B D, ſeu factum ſub o. l. B D, & o. l. B D, ad factum ſub o. l. B D, & ſub o. l. ſpatij, A L C D, vt, B D, ad, A L C D, nempè vt 5. ad 1. Item o. q. B D, ad o. q. ALCD, ex eadem Tabella, quæſita poteſt. 2. (pro quadratis) in fronte, & lateraliter ſpatio quarto, dignoſcuntur ex numero areali eſſe vt 9. ad 1. Sed vt 5. ad 1. ita, ducto vtroq; in 9. eſt factum 45. ad factum 9. Et vt 9. ad 1. ita, ducto vtroq; per 5. eſt factum 45. ad factum 5. Ergo redegimus has duas proportiones ad communem terminum antecedentem 45. Quoniam ergo o. q. B D, ad factum ſub o. l. B D, & o. l. A L C D, ſunt

11. huius.

23. huius

ſunt vt 45. ad 9. Et cadem o. q. B D, ad o. q. A L C D, ſunt vt 45. ad 5. Ergo o. q. B D, ad factum ſub o. l. B D, A L C D, minus o. q. A L C D, hoc eſt ad factum ſub o. l. A L C B, A L C D, erunt vt 45. ad differentiam numerorum 5. & 9. nempè ad 4. Et ad eandem bis ſũptam erunt vt 45. ad 8. Sed ad o. q. A L C D, ſunt vt 45. ad 5. Ergo colligendo o. q. B D, ad factum bis ſub o. l. A L C B, A L C D, plus

Reſidua ſpatia.	Pro Quadratis	Proportio.
1	6	2
2	15	8
3	28	14
4	45	32
5	66	50
6	91	72
7	120	98
8	153	128
9	190	162
10	231	200

o. q. ALCD, erunt vt 45. ad 13. Dempto autem 13. ex 45. remanent 32. Igitur o. q. B D, ad o. q. A L C D, erunt vt 45. ad 32. Hoc eſt erunt vt factum ſub 5. & 9. numeris, col. 1. & 2. pot. è regione quarti ſpatij conſtitutis, ad reſiduum dempto ex 45. numero 13. qui conflatur ex dupla diff. 4. dictorum numerorum, nempè ex 8. & numero minori 5. ſcilicet vt 45. ad 32. Quod, &c.

Vide proportionem o. q. B D, ad o. q. reſiduorum ſpatiorum vſq. ad decimum in præcedenti Columella.

COROLLARIVM.

CVm ergo ſit nota ratio o. q. B D, ad o. q. reſiduorum ſpatiorum eiuſdem, B D, euadit quoque nota ratio omnium 33.Exer. 1.
ſimilarium ſolidorum ex dictis ſpatiis, iuxta datam regulam, genitorum.

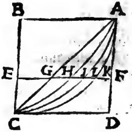
PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXIV.

In eadem antecedenti figura, regula eadem, o.c. BD, ad o.c. cuiuſcunque reſidui ſpatij, erunt vt factum ſub numeris primæ, ſecundæ, & tertiæ columnæ poteſtatum eiuſdem Tabellæ, è regione ſpatij exiſtentibus, ad eiuſdem reſiduum, ab eodem dempto facto ſub triplo differentiæ numerorum primæ, & ſecundæ columnæ, & ſub numero tertiæ, plus facto ſub eiſdem numeris primæ, & ſecundæ columnæ.

VT ex. gr. aſſumpto primo reſiduo ſpatio, è regione primi ſpatij in dicta tabella ſunt in 1. 2. & 3. col. poteſtatum hi tres numeri, 2. 3. 4. factum ſub quibus eſt 24. Differentia inter 2. & 3. eſt 1. eius triplum 3. factum ſub hoc triplo, & ſub 4. eſt 12. factum ſub 2. & 3. eſt 6. qui cum 12. facit 18. quo dempto ex 24. remanent 6. Dico igitur o. c. BD, ad o. c. primi reſidui ſpatij, AGCB, eſſe vt 24. ad 6. Quod patet per Prop. 21.



Sed vt vniuerſaliter fiat demonſtratio, aſſumatur ex. gr. quartum reſiduum ſpatium, ALCB. Quoniam ergò in Prop. ant. oſtenſum eſt, o. q. BD, ad factum ſub o. l. ALCB, ALCD, eſſe vt factum ſub numeris 5. & 9. 1. & 2. columnæ è regione quarti ſpatij, ſcilicet 45. ad differentiam inter 5. & 9. nempè ad 4. o. q. ergo, BD, ad triplum facti ſub o. l. ALCB, ALCD, erunt vt 45. ad 12.
Cor. 1. 11. huius Sed vt o. q. BD, ad triplum facti ſub. o. l. ALCB, ALCD, ita eſt factum ſub o. l. BD, & ſub o. q. BD, hoc eſt ita ſunt o. c. BD, ad triplum facti ſub o. l. BD, & ſub ducto o. l. ALCB, in o. l. ALCD. Ergo o. c. BD, ad tria facta ſub

Digitized by Google

ſub o. l. B D, o. l. A L C B, & o. l. A L C D, erunt vt 45. ad 12. quod ſerua. Item o. c. B D, ad o. c. ALCD, quarti ſpatij, ſunt vt 13. numerus tertiæ col. ad 1. Ergo o. c. B D, ad tria facta ſub o. l. B D, A L C B, A L C D, plus o. c. A L C D, erunt vt factum ſub 13. & 45. nempè 585. ad 201. Nam ſi proportionis 45. ad 12. commutemus terminos, ducendo vtroſque per 13. fiet pro anteced. numerus 585. & prò conſequente 156. ſimiliter ſi alterius proportionis terminos 13. & 1. ducamus per 45. fiet prò anteced. 585. & prò conſequente 45. Retento ergo communi anteced. 585. & iunctis conſequentibus 156. & 45. fiet conſequens 201. Quapropter o. c. B D, ad tria facta ſub o. l. B D, A L C B, A L C D, plus o. c. A L C D, erunt vt 585. ad 201. o. c. verò, B D, æquantur o. c. A L C B, ALCD, & 3. factis ſub o. l. B D, ALCB, ALCD, iuxta dicta ad partem poſteriorem Prop. 14. Ergo per conuerſionem rationis o. c. B D, ad o. c. A L C B, erunt vt 585. ad reſiduum 384. nempè ab eo dempto 201. Porrò 585. fit ex ductu 13. in 45. & 45. fit ex ductu 5. in 9. Quare antecedens 585. fit ex tribus hiſce numeris 5. 9. 13. primæ, ſecundę, & tertiæ col. conſequēs verò eſt reſiduum numeri 201. qui conflatur ex numero 156. & 45. quorum ille fit ex triplo differentię numerorum 5. & 9. qui eſt 12. ducto in 13. hic verò fit ſub 5. & 9. Patet ergo propoſitum ex hoc ſimiliter in reliquis reſiduis ſpatijs quibuſcunque.

32. huius

14. huius

Pro cabis.

Reſidua ſpatia.	Proportio.	
1	24	6
2	105	48
3	280	162
4	585	384
5	1056	750
6	1729	1296
7	2640	2058
8	3825	372
9	5320	4374
10	7161	6000

Vide proportionem o. c. B D, ad o. c. reſiduorum ſpatiorum vſque ad decimum in præcedenti columella.

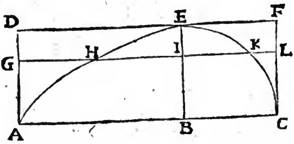
SCHO-

SCHOLIVM I.

Methodo igitur conſimili procedendo, expenſis alijs ſequentibus poteſt. poterit, qui voluerit o. p. quarumcunque ipſius, B D, ad o. p. eiuſdem gradus reſiduorum quorumlibet ſpatiorum proportionem indagare. Quoniam enim mihi non vacat circa huiuſmodi doctrinam amplius immorari, proptcrea hæc, & alia huiuſmodi, quæ circa hoc fæcundiſſimum theorema de infinitis diagonalibus, vel, vt alii vocarunt, infinitarum parabolarum, inquiri poſſunt, aliis, quibus plus eſt, quam mihi, otii, & ſanitatis, ad alia properanti, indaganda relinquam.

SCHOLIVM II.

Non reticendum autem duxi hoc inſigne circa poteſtates circuli, vel ellipſis, eas deduci poſſè ex pot. parabolæ, ita vt habita in ſuperiori figura ratione o. p. B D, ad o. p. A H E B, ſemiparabolæ, regula, C D, incipiendo à prima, & per reliquas deinceps progrediendo in infinitum, habeatur quoque ratio o.p. quadrati circulo, vel parallelogrammi ellipſi circumſcripti, ad o.p. eiuſdem gradus circuli, vel ellipſis. ſi non in omnibus, ſaltem in aliquibus pot. gradibus, quod ex ſubiecta figura clarius percipietur.



Sit

Digitized by Google

Sit enim ſemiparabola, A E B, diameter, A B, vertex, A, & producta, A B, in, C, ita vt, B C, ſit æqualis, B E, ſit deſcriptus quadrans circuli, vel ellipſis, E B C, quacunque exiſtente, B C, & compleantur parallelogramma, D B, B F: ducta quoque ſit quacunque ipſi AC, æquidiſtans, G L, ſecans, A E, in, H, & , E C, in, K, & ſit communis regula, A C. Quoniam ergo vt, G I, ad, I H, ita eſt q. L I, ad q. I K, & G L, vbilibet ducta eſt, o. l. D B, ad o. l. A B E, erunt vt o. q. F B, ad o. q. E B C. Similiter vt q. G I, ad q. I H, ita erit qq. L I, ad qq. I K. Ergo vt o. q. D B, ad o. q. A B E, ita erunt o. qq. F B, ad o. qq. E B C, & ſubinde vt 15. ad 8. Pariter quia vt c. G I, ad c. I H, ita eſt cc. L I, ad cc. I K: nam c. G I, ad c. I H, habet triplicatam rationem eius, quam habet, G I, ad, I H, hoc eſt quam habet q. L I, ad q. I K, quæ eſt duplicata ipſius, L I, ad, I K, & ideò ratio c. G I, ad c. I H, erit ſextuplicata rationis, L I, ad, I K. Erit ergo vt cc. L I, ad cc. I K. Eſt enim cc. ſexta pot. & ideò in ratione ſextuplicata ipſius, L I, ad, I K. Vt ergo o. c. D B, ad o. c. ABE, ita erunt o. cc. F B, ad o. cc. EBC, nempè vt 35. ad 16.

Elicitur ex. quar. Quarti Geom. ind. Cor. 24. huius.

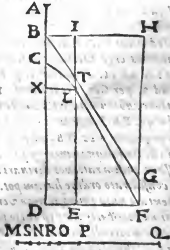
Habemus ergo rationem o. l. F B, ad o. l. E B C, proximè vt 14. ad 11. Similiter o. q. F B, ad o. q. E B C, ſunt vt 3. ad 2. per Cor. Propoſitionis 1. Lib. Tertij Geom. Ind. De ratione cuborum nil mihi conſtat. De qq. iam ſcimus o. qq. FB, ad o. qq. E B C, eſſe vt 15. ad 8. De cæteris pot. vſque ad cc. nil inquiſiui. o. cc F B, ad o. cc. E B C, dictum eſt eſſe vt 35. ad 16. Ex reliquarum ergo pot. detecta ratione in parabola, poſſunt eædem rationes deriuari in pot. circuli, vel ellipſis. Et ita conſiderato ordine harum pot. in circulo, poterit ſtudioſus attentare num emergat nota vera ratio o l F B, ad o. l. E B C, primæ poteſtatis; hoc eſt ratio parallelogrammi, F B, ad quadrantem circuli, vel ellipſis, E B C, ſeu vera circuli quadratura. Quod ſedulo Lectori ſufficiat hac occaſione paucis indicaſſe.

Denique, tanquam coronidem, addimus menſuram fuſi hyperbolici eiuſdemq. ſegmentorum quæ fiunt planis ſecantibus axi hyperbolæ parallelis, ſuppoſita tamen eiuſdem hyperbolæ quadratura, vt videre licet in Prop. ſubſequentibus.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXV.

Expoſita quacunq; ſemihyperbola, C D F, cuius ſit vertex, C, axis, D C, latus tranſuerſum, C A, ordinatim ad axim, DC, applicata, DF, centrum, B, notiſq; B C, C D, D F, & ſuppoſita hyperbolæ quadratura. Dico notam euadere menſuram fuſi hyperbolici ex integra hyperbola geniti per reuolutionem circa baſim eiuſdem hyperbolæ, cuius dimidia eſt, D F.



COmpleto enim parallelogrammo, H D, ſumptaq; regula, A D, & ducto aſymptoto, B G, quoniam o. q. D H, ad o. q. quadrilinei, B C F H, ſunt vt q. D B, ad q. B C, plus $\frac{1}{3}$ q. H G, ſeu plus $\frac{1}{3}$ rectanguli ſub, A D, D C. Eſt autem notum q. B C, propter notam, B C, & notum rectangulum, A D C, & ſubinde nota quoq; illius $\frac{1}{3}$, propter notas, A D, D C, notumq; eſt, B F, propter notas, B D, D F, erit nota proportio o. q. D H, ad o. q. B C F H. Si ergo vt o. q. D H, ad o. q. B C F H, ita fiat quæcunq; expoſita magnitudo nota, M O, ad, O R, etiam ratio, M O, ad, O R, nota erit. Inſuper o. q. D H, ad factum ſub o. l. D H,

Elicitur ex 21. Quinti Geo. Ind.

& qua-

& quadrilinei, BCFH, ſunt vt o. l. DH, ad o. l. BCFH, hoc eſt vt, DH, ad quadrilineum, BCFH; cum ergo ſupponatur nota ſemihyperbola, CDF, & notum ſit parallelogrammum, DH, erit quoq; nota ratio ipſius, DH, ad, BCFH, & ſubinde nota ratio o. q. DH, ad factum ſub o. l. DH, &, BCFH. Fiat vt o. q. DH, ad factum ſub o. l. DH, &, BCFH, (quod eſt maius o. q. BCFH, quia æquatur facto ſub o. l. BCFH, CFD, & o. q. BCFH,) ita, MO, ad, ON, quæ idcircò erit maior ipſa, OR. Erit ergo nota quoq; ratio ipſius, MO, ad, ON. Sumatur, SN, æqualis ipſi, NR. Quia ergo, o. q. DH, ad o. q. BCFH, ſunt vt, MO, ad, OR, & eadem ad factum ſub o. l. DH, BCFH, ſunt vt, MO, ad, ON: ideò o. q. DH, ad differentiam o. q. BCFH, & facti ſub o. l. DH, &, BCFH, erunt vt, MO, ad, NR, hoc eſt o. q. DH, ad factum ſub o. l. DFC, BCFH, erunt vt, MO, ad, NR, notam. Vnde o. q. DH, ad idem factum bis, erunt vt, MO, ad, SR. Ergo colligendo, o. q. DH, ad bis factum ſub o. l. DFC, BCFH, plus o. q. BCFH, erunt vt, MO, nota ad, OS, notam. Ergo per conuerſionem rationis o. q. DH, (quæ ſunt æqualia o. q. CDF, o. q. BCFH, plus bis facto ſub o. l. DFC, BCFH,) ad o. q. CDF, erunt vt, OM, nota ad, MS, notam. Sed vt o. q. DH, ad o. q. CDF, ita ſunt quæcunq; ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex, DH, CDF, iuxta regulam, AD, inter quæ reperiuntur cylindrus genitus ex, DH, & ſemifuſus hyperbolicus factus ex, CDF. Ergo dictus cylindrus ad dictum ſemifuſum, & ſubinde integer cylindrus (qui fieret ex duplo parallelogrammi, DH, hyperbolam integram comprehendente, eſſetq; illius duplus) ad fuſum hyperbolicum genitum ex integra hyperbola (qui eſſet quoq; duplus ſemifuſi) erit vt, OM, ad, MS, hoc eſt in ratione nota. Sed ille cylindrus notus eſt, propter notas, BD, DF; ergo & fuſus. Quod, &c.

Cor. 1. 11. huius.

13. huius.

33. Exercit. 1.

Digitized by Google

COROLLARIVM.

INtelligitur pariter ex demonſtratis nedum cylindrum ſupradictum ad fuſum, ſed etiam quæcunq; ſolida ſimilaria, genita ex dicto parallelogrammo hyperbolam comprehendente, & ex hyperbola, ſiue, A D, ſit axis, ſiue diameter, currit enim eadem demonſtratio, ſi & angulus, B D F, tunc notus ſupponatur, regula, A D, eſſe in ratione nota: & ſubinde cum genitum ex parallelogrammo notum ſit, etiam genita ex hyperbola euadere nota.

PROPOSITIO XXXVI.

In eadem ant. figura, iiſdem ſuppoſitis, ſit inſuper inter, B D, H F, ducta quæcunq; I E, parallela ipſi, A D, ſecans curuam, C F, in, L, &, BG, in, T. Dico, ſi præter ſuperius nota, ſupponantur quoq; nota, D E, E F, notam euadere menſuram vtriuſq; ſegmentorum fuſi hyperbolici, geniti ex præfata hyperbola, quæ fiunt plano axi, C D, parallelo, ac per rectam, I E, tranſeunte.

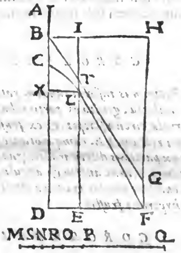
ETenim ſimili methodo fiet demonſtratio. Namq; ducta per, L, ipſa, X L, æquidiſtante ipſi, D F, manifeſtum eſt o. q. X I, ad o. q. quadrilinei, B C L I, eſse vt q. X B, ad q. BC, plus $\frac{2}{3}$ q. I T, vel plus $\frac{2}{3}$ rectanguli, A X C, quod ſerua. Et quia notæ ſunt, FE, E D, notæ quoq; erunt, F D, D E, vel, X L, earumq; quadrata. Sed vt q. DF, ad q. XL, ita eſt rectangulum, ADC, ad rectangulum, AXC, & notum eſt rectangulum, A D C, ergo &, AXC, & cum ſit nota, AC, etiam, CX, nota erit, vnde &, B X, nota erit, & ſubinde q. D B, & q. B X, nota erunt. Ergo o. q. DI, ad o. q. XI, (quæ ſunt vt q. DB, ad q.BX,) ha-

E'icitur ex 21. Quinti Geo. Ind.

39. Primi Geo. Ind.

Cor. 1. 3. huius.

habebunt rationem notam; ſed & o. q. XI, ad o. q. BCLI, habent rationem notam, quia ſunt vt notum q. XB, ad notum q. BC, vna cum ⅔ rectanguli, AXC, nota. Ergo o. q. DI, ad o. q. BCLI, habebunt rationem notam. Sit hæc quam habet quæcunq; magnitudo nota, MO, ad, OR. Inſuper o. q. DI, ad factum ſub o. l. DI, BCLI, ſunt vt, DI, notum, propter notas, BD, DE, ad ſpatium, BCLI, notum, propter notam ſemihyperbolam, CXL, cuius eſt reſiduum, & ideò in ratione nota. Sic ergo fiat, MO, ad, ON, & ipſi, NR, ſumatur æqualis, NS. Concludemus ergo vt in ant. Prop. o. q. DI, ad o. q. BCLI, plus facto bis ſub o. l. BCLI, CDEL, (quæ omnia nota ſunt) eſſe vt, MO, ad, OS, quæ erit ratio nota. Et ideò per conuerſionem rationis o. q. DI, ad o. q. CDEL, erunt vt, OM, ad, MS, hoc eſt in ratione nota. Cum verò o. q. DH, ad o. q. DI, ſint vt, FD, ad, DE, hoc eſt in ratione nota: componendo, o. q. DH, plus o. q. DI, ad o. q. DI, habebunt rationem notam. Ergo



4. huius.

o. q. DH, plus o. q. DI, hoc eſt o. q. parallelogrammi comprehendentis fruſtum hyperbolæ reſectum per, IE, verſus partem, D, erunt ad o. q. eiuſdem fruſti in ratione nota, nam ad o. q. ſemihyperbolæ deficientis ſunt quoq; in ratione nota. Similiter o. q. DH, ad o. q. CDEL, habebunt rationem notam, ſit autem hæc, quam habet, QM, ad, MS, & eadem o. q. DH, ad o. q. CDF, habent rationem notam, ſit autem hæc, quam habet, QM, ad, MP. Ergo o. q. DH, ad o. q. LEF, erunt Per ant.

vt,

Digitized by Google

vt, MQ, ad, SP, & in ratione nota. Et o. q. DH, ad o. q. EH, per conuerſionem rationis ſunt vt, MQ, ad, OQ; quia, QM, MO, MS, ſunt deinceps vt o. q. DH, DI, CDET, ideſt in ratione nota. Ergo o. q. DH, ad o. q. LEF, erunt vt, OQ, ad, SP, hoc eſt in ratione nota. Vt 33.Exercit. 1. vero o. q. ad o. q. ita ſunt ſolida ſimilaria, &c. inter quæ ſunt cylindrus genitus ex, EH, & ſegmentum fuſi geniti ex fruſto hyperbolæ, LEF, Ergo nota erit ratio cylindri geniti ex, EH, ad ſegmentum fuſi genitum ex, LEF. Sed cylindrus ex, EH, genitus notus eſt. Ergo & tale ſegmentum fuſi notum erit. Eadem ratione oſtendemus reliquum eiuſdem fuſi ſegmentum notum eſſe. Quod, &c.

COROLLARIVM I.

Percipimus inſimul eandem rationem eſſe inter ſolida ſimilaria, genita ex portionibus integri parallelogrammi 33.Exercit. 1. *hyperbolæ circumſcripti, & ex fruſtis eiuſdem hyperbolæ ſectis per rectam, IE, eamq; notam eſſe. & cum nota ſint, quæ ſiunt ex partibus dicti parallelogrammi, ſiuè, CD, ſit axis, ſiuè diameter, tunc autem & angulus CDF, notus eſſe debet, nota euadent pariter prædicta ſimilaria ſolida, genita ab eiſdem hyperbolæ fruſtis.*

COROLLARIVM II.

CVm ergo propoſita in hac, & Prop. præcedenti, nota euadant, ſuppoſita hyperbolæ quadratura; hinc manifeſtum eſt è conuerſò, ſi abſolutè fuſi hyperbolici aliquando reperiatur mēſura, illicò notam fore hyperbolæ quadraturam.

SCHOLIVM.

HAec circa vſum Indiuiſibilium in pot. coſſicis apprimè noſtræ Ind. Geometriæ congruere, rectèq; poſt illius traditam Epitomam in prima, & ſecunda Exercit. ac de hac me-

methodo diſſertationem habitam in Exerc. tertia ſubiungi diiudicaui: tum quia per hucuſq; tradita in hac Exerc. quarta in nobiliſſimo Matheſeos ſubiecto, quales ſunt coſſica pot. amplius huiuſmodi doctrina eluceſcit; tum etiam quia per hac aperti eiuſdem riuuli in immenſum campum diffundentur. Cum enim rudiora tantum huius artis, & communiora ob tenuitatem noſtram attigerimus, ſperamus eos, qui vt diximus, maiori otio, ac meliori, quam ipſe, ſanitate perfruuntur, illius penitiora in lucem eſſe prolaturos. Quibus ideò hanc prouinciam relinquentes, hic iacta anchora, huiuſmodi ſpeculationi finem imponimus.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXERCITATIO QVINTA.

In qua de vniformiter difformiter grauibus per Indiuiſibilia inſtituitur contemplatio.

HActenus Geometria non niſi grauitatem vniformem in eodem graui ſuppoſuit, ac examinauit: quamuis autem in corporibus diuerſis varios quoq; eiuſdem gradus admiſerit, attamen quæ circa eandem grauitatem ſymptomata euenirent, ſi in eodem graui non vniformiter, ſed vniformiter difformiter illa diffunderetur, nemo, quod ſciam, hucuſq; in lucem protulit. Rem igitur gratam ſtudioſis ſperans me facturum eſſe, ad nouam hanc doctrinam excolendam non ſine magna curioſitate animum applicui, duoq; præcipuè in hac Exercitatione circa vniformiter difformiter grauia (prout ſcilicet à me in ſequentibus definiuntur) meditatus ſum; Def. 8. & 9. ſubſequentes. *nempè quodnam ſit eorum centrum grauitatis, & quam rationem habeat grauitas vniformis ad difformem in ſingulis grauibus. Vtrumq; mihi ſuppeditarunt Indiuiſibilia, &*

hoc ſaltem in inſignioribus figuris. Decreueram quæcunq; hic per ea oſtenduntur, vt Indiuiſibilium parum amico amplius ſatisfieret, etiam ſtylo Archimedeo demonſtrare, veluti in Prop. 8. & 10. ſubſequentibus ſtudioſus animaduertet: ſed quia nimis longa hæc Exerc. euaſiſſet, ac ne tibi præriperem, benigne Lector, occaſionem periculum faciendi vtrum ea, nec ne vera prodiderint, conſultò ab hoc abſtinui. Inanem fortè aliquis putabit huiuſmodi doctrinã ex eo quod bis ſuppoſitionibus natura in ſuis operationibus nequaquam fortè conſentiat. Huic tamen puto reſponderi poſſe non omnia, quæ à Geometris conſiderantur, neceſſe eſſe vt ad amuſſim in rerum natura reperiantur, quæ plerumq; materiæ ſordibus, ac imperfectionibus inuolutæ, tanquam inconſtantes ægrè ſub ſcientiam cadere poſſunt. Quapropter coguntur Mathematici abſtrahere ab ipſa materia ſenſibili, ac in puriſſimis & ſimpliciſſimis figuris, eodem ſemper modo ſe habentibus, ſuas contemplationes inſtituere. Sic & Archimedes doctrinam de Spiralibus tradidit, etiam ſi fortè nulla huiuſmodi linea in mundo reperiatur. Sic & Galileus, ac nouiſſimè Torricellius, motus localis paſſiones iuxta ab iiſdem ſuppoſitiones factas examinarunt, quomodocunq; natura in ipſo motu locali operetur. Quæ omnia etiamſi ad humanos vſus minimè deſeruirent, ea tamen vt contemplatricis noſtræ virtutis alimenta neutiquam eſſent negligenda. Fruſtra enim alioquin tam anxiè quærerent Geometræ exactiſſimam circuli quadraturam, duarum mediarum inter duas datas linearum quantitatem, anguli rectilinei triſectionem, & ſimilia; cum in eo, quod ſpectat ad phyſicam vtilitatem ſatis ſuperq; fuerit hæc propinquè adinueniſſe. Vndè

egregiè

egregiè Proclus in Com. in Euclidem Lib. 1. Cap. 9. de huiuſmodi vtilitate ab ipſa Matheſi in intellectum redundante ſic locutus eſt. Eius autem rurſus vtilitatem non ad humanos vſus reſpicientes, neque neceſsitati ſtudentes iudicare æquum ducemus: ſic enim ipſam quoque contemplantem virtutem inutilem eſſe fatebimur, quæ ſeipſam ab humanis ſeparat, hæcque minimè reſpicere, nec cognoſcere appetit. Quod ſanè Socrates etiam in Theæteto de proceribus fatidicis exiſtentibus affirmans, ab omni quidem ad humanam vitam reſpectu eos auertit; ab omni verò neceſsitate, ac vſu benè ſolutam ipſorum cogitationem ad omnium eorum, quæ ſunt attollit cacumen. *Etiamſi igitur nihil tale, quale hic ſupponimus, reperiri poſſet in rerum natura, id tamen vti ad mentis directum vtilitatem, & oblectamentum ſtudioſo excipiendum eſſet. Perinde enim ac Rethores in ſuis declamationibus, aut docendi alios, aut exercendi ſe gratia fictā cauſam agunt, vt poſtea in veris cauſis promptius orare poſſint: ſic & ipſe etiamſi quodamodo fictam materiam propoſuiſſem, hoc tamen & ad ingenij exercitium, & ad vſum Indiuiſibilium amplius capeſcendum, plurimum valere nullus puto dubitabit. Quodſi ex alia parte ipſius naturæ operationes attentius inſpiciamus, an non vbique huiuſce vniformis difformitatis illico veſtigia apparebunt? Cum experiamur actiones naturales quò magis virtus à ſuo fonte elongatur, eò magis, ac magis elangueſcere, donec omninò euaneſcat, quacunque ratione reſpectu diſtantiarum ab eodem fonte id contingat: ita vt ſi natura his noſtris ſuppoſitionibus ad vnguem non conſetiat, nec*

tamen omninò diſſentire videatur. Prætereo hac occaſione hic quoque diuerſa ab alijs ratione, inueniri centra grauitatis inſignitorum tam planarum, quàm ſolidarum figurarum vniformiter grauium, nonnullaque in fine attingi circa materiam momentorum grauium, quæ à fulcimento ſuſtinentur (cum affine quid redoleant dicta momenta grauitati difformi) vt hæc Exerc. ſaltem quoad hanc partem non omnino in phyſicis ſpernendæ vtilitatis cenſeri poſſit. Denique qualiſcunque ſit hæc doctrina, eam tuo iudicio ſtudioſe Lector ſubijcere volui, cui ſi haud diſplicuiſſe cognouero ad eam accuratius elaborandam, ſi Deus vitam, mitioremq; ægritudinem concesſerit, omnes neruos contendam, vt hæc tibi melius concinnata, ac graphicè deſcripta, amplius ſatiſfacere poſſint. Sed ommiſſis parergis nunc ad ipſam rem propius accedamus.

DE-

Digitized by Google

DEFINITIONES.

I.

GRauitas eſt vis eam habentis abſolutè deſcenſiua.

II.

GRaue dico, quod grauitatem habet, vel habere concipitur.

Sub nomine grauis hic comprehẽduntur nedum corpora, quibus tantum, phyſicè loquendo, grauitas competit; ſed etiam ſuperficies, lineæ, ac puncta. His enim perinde ac ſi à corporibus ſeiuncta eſſent, grauitatem aſsignat intellectus, vt ſubinde ab alijs ad ipſa corpora commodius tranſeat. Non ita tamen vt eorum grauitates promiſcuè ſint comparabiles, ſed illorum tantum, quæ erunt eiuſdem generis vt linearum inter ſe, ſuperficierum inter ſe, &c.

III.

MOmentum grauis eſt illius conatus ad deſcendendum, ex quacunque diſtantia ſuſpenſi.

Cum hic conatus ſit in diuerſis diſtantijs diuerſus, vt in ſequentibus patebit, hinc intelligitur idem graue diuerſa quoq; momenta habere poſſe.

IV.

SI grauia æqualia (vt & eorum quęcunq; partes ęquales) ex ęqualibus diſtantijs ſuſpenſa æquèponderent: illa inter ſe comparata, (vt eorum vnumquodq; in ſeipſo) dicentur eiuſdem gradus grauitatis, vel vniformiter grauia.

V.

SI grauia æqualia, quorum vnumquodq; ſit vniformiter graue, ex æqualibus diſtantijs ſuſpenſa non æquèponderent. vel ſi grauia inæqualia, quorum vnumquodq; ſit vniformiter graue, ex æqualibus diſtantijs ſuſpenſa æquèpon-

ponderent, dicentur inter ſe comparata diuerſi gradus grauitatis.

Alij vocant hos gradus diuerſas ſpecies grauitatis; quomodocunq; tamen eos velimus appellare, nil refert, dummodo in ipſa re conueniamus, vt puto nos in hac, & ſuperioribus definitionibus cum alijs huius doctrinæ Auctoribus concordare. Cum verò, quicunq; aſſignetur gradus grauitatis, eo maiorem, & minorem quantumcunq; concipere poſſimus, non ſecus ac in omni quantitate continua licet quacunq; data maiorem, vel minorem ad libitum aſsignare; ideò patet à dato gradu tam aſcendendo, quam deſcendendo, per infinitos gradus deinceps ſemper maiores, vel deinceps ſemper minores, proceſſum fieri poſſe. Vnde manifeſtum eſt dari poſſe quoq; progreſſum à nullo gradu ſemper aſcendendo per infinitos gradus grauitatis.

VI.

IGitur limitem quotcunq;, & quorumcunq; graduum grauitatis appello nullum gradum, ſeù illud quod ſupponitur nullum habere grauitatis gradum.

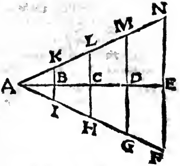
Hic limes in ſequentibus erit punctum, vel linea, vel ſuperficies.

VII.

CVm à limite graduum grauitatis ad datum quemcunq; gradum continuò aſcendendo iuxta diuerſas proportiones incrementum graduum fieri poſſit, nunc tantum illud ſupponemus, quo gradus grauitatis iuxta proportionem diſtantiarum à limite (ſiue is ſit punctum, ſiuè linea, vel ſuperficies) augentur. Hoc autem incrementum vniforme grauitatis dicetur.

Ex hoc verò patet hoc incrementum vniforme grauitatis fieri iuxta incrementum parallelarum baſi cuiuſcunque trianguli, conſtituto limite eiuſdem vertice, & ab eo verſus baſim per æquales diſtantias progrediendo. Vt in triangulo, A F N, ducta ab, A, vertice, qui ſit limes (ſubintellige ſemper limitem graduum grauitatis, etſi hoc non exprimatur) ſuper baſim, F N, perpendiculari, A E, ſecetur alterum laterum, vt, A F, in quotcunq partes æquales, A I, I H, H G, G F; & per puncta, G, H,

G, H, I, agantur eidem baſi, F N, parallelæ, G M, H L, I K, ſecantes, A E, A N, in punctis, D, C, B; M, L, K. Si ergo intellexerimus ab, A, limite continuò procedere gradus grauitatis vſq; ad maximum in, E, per incrementum vniforme, idem proceſſus erit linearum dicti trianguli ipſi, F N, parallelarũ. Etenim ſi ex. gratia in continuo



graduum grauitatis incremento habeatur in diſtantia, A B, quidam gradus grauitatis, in, C, habebimus alium gradum duplum primi ex hypotheſi, quia diſtantia, C A, dupla eſt, B A; in, D, triplum, & in, E, quadruplum, vnde dicti gradus procedent vt lineæ prædictæ, I K, H L, G M, F N. Immò ſi ipſa, I K, aſſumatur pro ipſomet gradu grauitatis, qui eſt in diſtantia, A B, reliquæ, H L, G M, F N, referent reliquos gradus diſtantiarum, A C, A D, A E. Et vniuerſaliter quæcunq; in triangulo, A F N, ipſi, F N, parallela connotabit gradum grauitatis qui erit in eiuſdem parallelæ ab, A, diſtantia. Igitur dicti gradus nedum progrediũtur vt dictæ parallelæ, ſed eædem parallelæ pro ipſiſmet gradibus aſſumi poſſunt.

Inſuper cum in baſi æquali ipſi, F N, poſſint fieri triangula maioris, & minoris altitudinis, quam, A E; ſi eorum baſes aſſumantur tanquam idem gradus grauitatis, quorum vertices ſint limites patebit à limite vſq; ad quemcunq; aſſignatum gradum grauitatis per omnes gradus intermedios ſumptis eorum altitudinibus tanquam diſtantijs, & ſubinde per quãcunq; diſtantiam eadem, A E, minorem, vel maiorem, proceſſum fieri poſſe.

VIII.

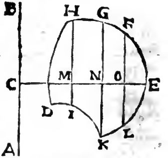
SI, expoſita quacunq; recta linea tanquam limite, ac regula, in eodem cum ipſa plano, & tota ad eandem dictæ lineæ partem fit quæcunq; plana figura, in qua ductarum quotcunq; linearum ipſi regulæ parallelarum, & in ſeipſis vniformiter grauium, gradus grauitatis ſint in ratione diſtã- E. Def. 2 Geo. Ind.

tia-

tiarum ab aſſignato limite. Dicta figura vocetur vniformiter difformiter grauis iuxta datum limitem.

IX.

SI expoſito quocunq; plano tanquam limite, ac regula eidem æquidiſtantium planorum, tota ad eandem illius partem ſit quæcunq; figura ſolida; in qua ductorum quotcunq; planorum ipſi regulæ æquidiſtantium, & in ſeipſis vniformiter grauium, gradus grauitatis ſint in ratione diſtantiarum ab aſſignato limite. Dicta ſolida figura vocetur vniformiter difformiter grauis iuxta datum limitem.



Vt ſi ſit, AB, recta linea limes, & regula pro figura plana, D L E F, in eodem cum ipſa plano, & tota ad alteram eiuſdem, AB, partem exiſtente; ducantur autem in ea quotcunque ipſi, A B, parallelæ, nempè, I H, KG, L F, ſingula in ſeipſis vniformiter graues; & ſint earum gradus grauitatis in ratione diſtantiarum à limite, A B nempè ipſarum, CM, CN, CO; illa dicetur vniformiter difformiter grauis iuxta limitem rectam, A B.

Ita quoq; ſi, AB, ſit planum, limeſq; ac regula pro figura ſolida, D L E F, in qua gradus grauitatis quotcunq; planorum ipſi, AB, æquidiſtantium, nempè, I H, KG, LF, ſingulorumq; in ſeipſis vniformiter grauium, ſint in ratione diſtantiarum, CM, CN, CO: illa dicetur vniformiter difformiter grauis iuxta limitem planum, AB.

Alio modo poſſent figuræ tam planæ, quam ſolidæ vniformiter difformiter graues definiri; ſcilicet eas eſſe, quæ gigni intelliguntur per fluxum rectæ lineæ, vel plani eidem, AB, limiti ſemper æquidiſtantis, cuius gradus grauitatis continuò ab, AB, deſcendendo augeatur iuxta incrementum diſtantiarum ab eodem limite, A B.

Breuitatis tamen cauſa figuras uniformiter difformiter graues tantum difformiter graues appellabimus, tacitè uniformiter ſubin-

ſubintelligentes. Similiter cum limes erit recta linea, vel planum, ipſum ſemper quoq; ſupponemus linearum, vel planorum æquidiſtantium, quorum conſiderabuntur grauitates, eſſe regulam, licet non addatur nomen regulæ.

X.

CEntrum grauitatis tam in vniformiter, quam in difformiter grauibus, eſt, ex quo, vel ſola cogitatione, ſuſpenſum graue, quemcunque ſitum dederis illum retinet.

Hæc eſt Steuinij definitio pro vniformiter grauibus, quam & nos pro difformiter grauibus pariter retinemus.

XI.

CEntrum æquillibrij dati grauis, vel duorum datorum grauium, eſt punctum, à quo ſuſpenditur datum graue, ſeu aggregatum ex datis grauibus, per eorum centrum grauitatis.

XII.

GRauia plana, vel ſolida proportionaliter analoga in grauitate dicentur, quæ in eadem erunt altitudine,& in quibus ductis quotcũque planis dictam altitudinem perpendiculariter ſecantibus, genitarum in alterutro grauium magnitudinum (ſiuè hæ ſint lineæ rectæ,vel plana) grauitates erunt inter ſe, vt grauitates genitarum in reliquo graui, in directum prædictis reſpondentium. Et cum illorum homologæ erunt æquales, æqualiter analoga in grauitate, ſi libuerit, etiam vocabuntur.

Communis eſt hac definitio tam vniformiter, quàm difformiter grauibus. Similiter nedum conuenit grauibus eiuſdem rationis, ſed etiam diuerſæ: vt cum inuicem comparabuntur grauia, quorum vnum erit figura plana, alterum verò ſolida.

POSTVLATA.

I.

IN quocunque ſiuè vniformiter, ſiuè difformiter graui, vnicum eſſe centrum grauitatis.

II.

MOlium æqualium, & in ſeipſis, ac inter ſe vniformiter grauium, eſſe æquales grauitates.

III.

MOlium quarumcunque æquè grauium, & ab eadem, vel æqualibus diſtantijs ſuſpenſarum, æqualia eſſe momenta.

IV.

SI gradui grauitatis cuiuſcunque molis in ſeipſa vniformiter grauis ſuperaddi æqualis prædicto gradus grauitatis intelligatur, eiuſdem molis grauitas duplicabitur. Et ita tres gradus dabunt triplam grauitatem, quatuor quadruplam, &c. tum in eadem, tum etiam in æqualibus figuris, quarum vnaquæque ſit in ſeipſa vniformiter grauis.

V.

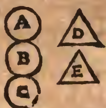
Per Indiuiſibilia.

IDem eſſe centrum grauitatis cuiuſcunque figuræ planæ, & omnium linearum eiuſdem; ac cuiuſcunque figuræ ſolidæ, & omnium planorum eiuſdem, regula quauis aſſumpta, ſiuè figuræ vniformiter, ſiuè difformiter graues ſupponantur.

PRO-

PROPOSITIO I.

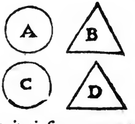
Si duo quæcunque grauia fuerint in ſeipſis, & inter ſe comparata, vniformiter grauia: erit vt moles ad molem, ita grauitas ad grauitatem.



SInt duo quæcunque grauia, A, D, in ſeipſis, & inter ſe comparata vniformiter grauia. Dico molem, A, ad molem, D, eſſe vt grauitatem, A, ad grauitatem, D. Accipiantur ipſi, A, quotcunque moles æquales, B, C, in ſeipſis, & cum A, vniformiter graues. Similiter ſumantur ipſi, D, quotcunque moles æquales, in ſeipſis, & cum, A, vniformiter graues, vt, E. Quoniam ergo moles, A, B, C, ſunt inter ſe æquales, necnon in ſeipſis, & inter ſe vniformiter graues, earum grauitates erunt æquales. Eodem modo o- Poſt. 2. ſtendemus grauitates ipſarum, D, E, eſſe æquales. Quotuplex ergo eſt aggregatum molium, ABC, molis, A, totuplex erit aggregatum grauitatum, A B C, grauitatis, A. Et ita quotuplex eſt aggregatum molium, DE, molis, D, totuplex erit aggregatum grauitatum, D E, grauitatis, D. Habemus igitur æquè multiplices primæ, & tertiæ, nempè molis, & grauitatis, A, vt & ſecundæ, & quartæ, nempè molis, & grauitatis, D, ſi autem aggregatum molium, A B C, fuerit æquale aggregato molium, D E, ſcilicet multiplex primæ multiplici ſecundæ; etiam aggregatum Poſt. 2. Def. 1. grauitatum, A B C, erit æquale aggregato grauitatum, D E, nempè multiplex tertiæ multiplici quartæ, & ſi illud erit 5 Quinti Elem. maius, & hoc maius, vel ſi minus, & hoc minus. Ergo prima ad ſecundam erit, vt tertia ad quartam. Hoc eſt moles, A, ad molem, D, erit vt grauitas, A, ad grauitatem, D. Quod oſtendendum erat.

PROPOSITIO II.

Si duo quæcunque grauia fuerint mole æqualia, & eorum vnumquodq; in ſeipſo vniformiter graue, at inter ſe comparata non vniformiter grauia: erit gradus grauitatis ad gradum grauitatis, vt grauitas ad grauitatem.



Sint, A, B, moles æquales, & earum vnaquæque in ſeipſa vniformiter grauis, at inter ſe comparatę non vniformiter graues. Dico gradum grauitatis, A, ad gradum gauitatis, B, eſſe vt grauitatem, A, ad grauitatem, B. Aſſumatur moles, C, æqualis ipſi, A, ſed cuius gradus grauitatis ſit vtcumq; multiplex gradus grauitatis, A, vt ex. gr. triplus. Similiter accipiatur moles, D, æqualis ipſi, B, ſed cuius gradus grauitatis ſit vtcunq; multiplex gradus grauitatis, B, vt ex. gr. duplus. Quoniam ergo ipſius, C, gradus grauitatis triplus

Poſt. 4.

eſt gradus, A, etiam grauitas, C, tripla erit grauitatis, A. Sic quia gradus, D, duplus eſt gradus, B, etiam grauitas, D, dupla erit grauitatis, B. Habemus igitur æquè multiplices primæ, & tertiæ, nempè gradum grauitatis, C, & grauitatem, C, gradus, A, & grauitatis, A. Similiter gradus, D, & grauitas, D, ſunt æquè multiplices ſecundæ, & quartæ, nempè gradus, B, & grauitatis, B. Si autem multiplex primæ, nempè gradus, C, ſit æqualis multiplici ſecundæ, hoc eſt gradui, D, etiam multiplex tertiæ, hoc eſt grauitas, C,

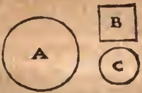
Poſt. 2. Defin. 5. Quinti Elem.

erit æqualis multiplici quartæ, ſcilicet grauitati, B, quia moles, C, D, ſunt æquales, cum adæquentur æqualibus, A, B. Et ſi ille fuerit maior, & hæc maior erit, vel ſi minor, & hæc minor. Ergo prima ad ſecundam erit vt tertia ad quartam. Hoc eſt gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B, erit vt grauitas, A, ad grauitatem, B. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO III.

Si duo quæcunque grauia fuerint in ſeipſis vniformiter grauia, at inter ſe diuerſi gradus grauitatis: erunt eorundem grauitates iter ſe in ratione compoſita ex ratione molium, & ex ratione graduum grauitatis.



SInt duo quæcunque grauia, A, B, in ſeipſis vniformiter grauia, ſed inter ſe diuerſi gradus grauitatis. Dico grauitatem, A, ad grauitatem, B, habere rationem compoſitam ex ratione molis, A, ad molem, B, & ex ratione gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B. De foris enim ſumatur moles, C, æqualis ipſi, B, in ſe vnif. grauis, ſed eiuſdem gradus grauitatis cum, A. Grauitas ergo, A, ad grauitatem, B, habebit rationem compoſitam ex ratione grauitatis, A, ad grauitatem, C, & grauitatis, C, ad grauitatem, B, ſed grauitas, A, ad grauitatem, C, eſt vt moles, A, ad molem, C, ſeu ad molem, B, ex hypotheſi ipſi, C, æqualem. Item grauitas, C, ad grauitatem, B, eſt vt gradus grauitatis, C, ſeu, A, ex ſuppoſitione, ad gradum grauitatis, B. Ergo grauitas, A, ad grauitatem, B, habet rationem compoſitam ex ratione grauitatis, A, ad grauitem, B, & ex ratione gradus grauitatis, A, ad gradum grauitatis, B. Quod, &c.

Def. 12. Primi Geo. Ind.

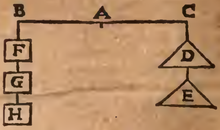
1 huius.

Prop. ant.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Si duo quæcunq; ſiuè vnifor. ſiuè diffor. grauia, ab eadem, vel æqualibus diſtantijs ſuſpendantur: eorum momenta erunt in ratione grauitatum eorundem grauium.



SInt duo quæcunq; grauia, D, F, ab eadem, vel ęqualibus diſtãtijs, AC, AB, in libra, BC, ſuſpenſa. Dico eorum momenta eſſe, vt ipſorummet grauitates. Sumãtur ipſi, F, quotcunque moles ſingulæ æquègraues, G, H; & ipſi, D, aliæ quotcunque ſingulæ æquègraues, vt, E. Quoniam ergo, F, G, ſunt moles æquègraues, & ab eadem diſtantia, AC, ſuſpenſæ, ideò erunt æqualium momentorum. Eadem ratione oſtendemus momentum ipſius, H, æquari momento ipſius, F. Quotuplex ergo eſt grauitas ipſorum grauium, FGH, grauitatis, F, totuplex eſt aggregatum ex momentis, HGF, ſeù momentum, HGF, momenti, F. Eodem modo oſtendemus quotuplex eſt grauitas ipſorum, ED, grauitatis, D, totuplex eſſe momentum ipſorum, ED, momenti, D. Si autem grauitas, FGH, multiplex primæ, æqualis eſt grauitati, ED, multiplici ſecundæ, etiam momentum, FGH, multiplex tertiæ æquabitur momento, ED, multiplici quartæ, & ſi illa erit maior, & hoc maius erit, & ſi minor, minus. Ergo prima ad ſecundam erit vt tertia ad quartam. Hoc eſt grauitas, F, ad grauitatem, D, erit vt momentum, F, ad momentum, D. Quod, &c.

Poſt. 3.

Poſt. 3.

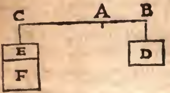
Def. 5. Quinti Elem.

PRO-

PROPOSITIO V.

Si quæcunq; æquè grauia ab inæqualibus diſtantijs ſuſpendantur: erunt eorum momenta in ratione diſtantiarum.

Sint æquègrauia, EF, D, quęcunque, ab inęqualibus diſtantijs, AC, AB, ſuſpenſa. Dico eorum momenta eſſe in ratione diſtantiarum, AC, AB. Intelligatur ab, EF, maioris diſtantiæ ablata moles, E, ad cuius grauitatem ſit grauitas, A, reciprocè, vt diſtantia, CA, ad AB. Moles ergo, E, æquèponderabit ipſi, D, per oſtenſa ab Archimede in Prop. 6. Libri Primi Aequèpond. quæ vt ibidem ait & Guid. Vbaldus ad omnes quoque moles trasferuntur. Igitur momentum ipſius, E, erit æquale momento ipſius, D. Eſt autem momentum, EF, ad momentum, E, hoc eſt ad momentum, D, vt grauitas, EF, ſeù, D, ad grauitatem, E: & grauitas, D, ad grauitatem, E, eſt vt, CA, ad AB, ex hypotheſi. Ergo momentum, EF, ad momentum, D, eſt vt, CA, ad AB. Quapropter æquègrauium momenta ſunt in ratione diſtantiarum, à quibus ſuſpenduntur. Quod, &c.

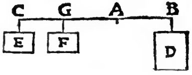


Prop. ant.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Quorumcunque grauium à quibuslibet diſtantijs ſuſpenſorum, momenta ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum, & grauitatum.



Sint à diſtantijs quibuslibet, A C, AB, ſuſpenſa quæcunq; grauia, E, D. Dico eorum momenta eſſe in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum, & grauitatum. De foris enim ſumpta mole, F, ipſi, E, æquègraui, illa ſu-
Def. 12. ſpendatur in diſtantia, AG, ipſi, AB, æquali. Momentum
Primi ergo, E, ad momentum, D, habet rationem compoſitam
Geo. Ind. ex ratione momenti, E, ad momentum, F, ſcilicet, CA,
Prop. aut. ad AG, vel AB, quia, E, F, ſunt moles æquègraues; & ex ratione momenti, F, ad momentum, D, ſcilicet ex ratione grauitatis, F, ſeù, E, ad grauitatem, D, nam, GA, AB,
4. huius. ſunt æquales diſtantiæ. Ergo momentum, E ad momentum, D, eſt in ratione compoſita ex ratione, CA, ad, AB, & ex ratione grauitatis, E, ad grauitatem, D. Quod, &c.

SCHOLIVM.

Si ergo oſtenſa ab Archimede loco ſupracitato ad omnis generis grauia transferantur, patebit has tres proximas Propoſitiones ſuperiores de ijs quoque verificari. Reminiſcatur autem ſtudioſus hoc, quod in præſenti Prop. demonſtratur ſuppoſitum fuiſſe in Exerc. Tertia, Cap 4. *Pag.* 231. *Illi ergò per hac defectui nunc ſuppleri poteſt.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO VII.

Si recta quædam linea indefinita tranſeat per centra grauitatis quotcunque molium eiuſdem generis: centrum grauitatis aggregati ex omnibus illis erit in eadem recta linea, & in ea ipſius portione, quæ iungit centra grauitatis molium extremarum.

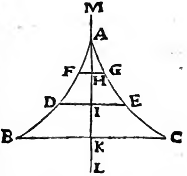
HAec Propoſitio manifeſta eſt; ſi enim ex propoſitis molibus duas quaſcunque acceperimus, earum centrum grauitatis erit in recta iungente ipſarum centra grauitatis. Rurſus aſſumpta alia quacunque mole, in intercepta inter huius centrum grauitatis, & centrum prædictarum duarum, erit harum trium centrum grauitatis. Idem verò oſtendetur de quatuor, quinque, &c. Ergo omnium centrum grauitatis erit in iungente centra grauitatis extremarum, in hac enim erit centrum quotcunque aſſumptarum molium. Quod, &c.

Hactenus ſine Indiuiſibilibus nunc vero per illa procedemus.

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea indefinita tranſeat per centrum grauitatis cuiuſque omnium linearum figuræ planæ, vel cuiuſque omnium planorum ſolidæ, regula quauis aſſumpta: in eius portione in figura comprehenſa, erit ipſius figuræ centrum grauitatis. Dicatur autem talis recta axis grauitatis eiuſdem figuræ.



IN figura quacunq; plana, ABC, tranſeat recta indefinita, ML, per centra grauitatis cuiuſcunque omnium linearum eiuſdem, regula, BC, vt per, H, I, K, centra grauitatis rectarum, FG, DE, BC, ipſi, BC, parallelarum, & ſic in cæteris. Dico in, A K, quæ concipitur in figura, eſſe centrũ grauitatis eiuſdem figuræ, ABC. Quoniam enim in, AK, ſunt quarumlibet linearum ipſi, BC, parallarum ſingillatim centra grauitatis, ideò in eadem, A K, erit omnium centrum grauitatis, collectiuè ſumptarum, hoc enim patet per methodum antecedentis. At idem eſt centrum omnium
Poſt. 5. linearum, & figuræ planæ ABC. Ergo in, AK, erit figuræ, ABC, pariter centrum grauitatis.

Quod ſi ſuppoſuerimus, ABC, eſſe ſolidum, in quo, regula baſi, BC, ſint quotcunque plana ipſi, BC, parallela, DE, FG, & per eorum centra grauitatis, H, I, K, tranſire, A K; oſtendemus eodem modo in, AK, eſſe centrum grauitatis omnium planorum ſolidi, ABC, regula, BC, & ſu-
Poſt. 5. binde etiam ipſius ſolidi. Quod, &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc patet verificari ſiue figura tam plana, quam ſolida, ſupponantur vniformiter, ſiuè difformiter graues, quia Poſtulatum 5 comprehendit vtrunque genus grauium.

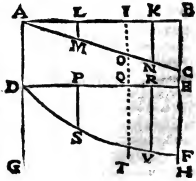
Si quis verò abhorreat ab Indiuiſibilibus, recolat oſtenſa circa vniformiter grauia à Luca Valerio Lib. Primo de cẽtro grau. ſolidorum, Prop. 22. ibi enim probat; Omnis figuræ circa diametrum in alteram partem deficientis in diametro *(qua tranſit per centrum grauitatis cuiuſcunq; linea ad ipſam ordinatim applicatæ, quia illam bifariam ſecat)* eſſe centrum grauitatis. *Idemq, colligit in Corollario eiuſdem Prop. pro omni ſolido circa axim (qui tranſit per centrum grauitatis cuiuſcunque plani, tangenti ſolidum in vertice æquidiſtantis) hoc eſt in axe eſſe centrum grauitatis dicti ſolidi. Vniuerſaliter autem conſtat ex ibidem oſtenſis;* omnis figuræ planæ, ſiuè ſolidæ, cuius termini omnis cauitas ſit interior, atque ideò intra terminum centrum grauitatis; & cuius pars aliqua eſſe poſſit, quæ à tota figura deficiens minori defectu quacunque magnitudine propoſita, habeat centrum grauitatis in aliqua certa linea recta intra terminum figuræ conſtituta, eſſe in ea recta linea totius figuræ centrum grauitatis. *Per hæc ergo habebit ſtudioſus modum, quo ſibi amplius ſatisfaciat in ijs omnibus figuris, quas huiuſmodi conditionem habere comperierit. At vniuerſaliſſimè pro omnibus figuris id demonſtrare, aliter quam per Indiuiſibilia difficillimum puto.*

✠

Digitized by Google

PROPOSITIO. IX.

Si duo quæcunque grauia fuerint proportionaliter analoga in grauitate; eorum centra grauitatis aberunt æqualiter à verticibus eorundem.



Sint prius inter parallelas, & horizōti perpendiculares, AG, BH, in earumque plano conſtitutæ, hoc eſt in eadem altitudine, duæ quælibet figuræ planæ, ABC, DEF, ſiue vniformiter ambę, ſiuè difformiter graues, vel vna vniformiter, altera difformiter grauis, quę ſint proportionaliter analogæ in grauitate. (Def. 12.) Dico earum cētra grauitatis æqualiter abeſſe à verticibus earundem. Ductis ergo quotcunque lineis rectis dictam communem altitudinem ſecantibus, & ſubinde ipſis, AG, BH, parallelis, ſint ex eiſdem in figuris interceptæ, KN, LM, RV, PS, & ſit, KN, in directum ipſi, RV, &, LM, ipſi, PS. (Def. 12.) Erit itque grauitas ipſius, KN, ad grauitatem, LM, quemadmodum grauitas, RV, ad grauitatem, PS, ex hypotheſi. Supponantur vtræque figuræ ſuſpenſæ à puncto, I, à quo deſcendat recta, IOQT, ipſis, AG, BH, parallela, (Def. 11.) & ſubinde horizonti perpendicularis, & ſit, I, centrum æquilibrij alterutrius dictarum, vt ipſius, ABC. Dico idem, I, eſſe centrum æquilibrij reliquæ figuræ, DEF. Namquè dicta figura, DEF, manebit in hoc ſitu, in quo parallelę, RV, PS, ſunt horizonti perpendiculares, quod ſic probatur. Etenim momentum ipſius, KN, ad momentum, LM, habet (4. huius.) rationem compoſitam ex ratione diſtantiæ rectę, KN, ab, I, ad

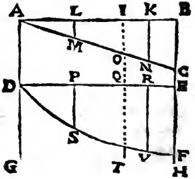
Digitized by Google

ad diſtantiam, rectæ, LM, ab eodem, I, & ex ratione grauitatis, KN, ad grauitatem, LM, hoc eſt ex hypotheſi ex ratione grauitatis, RV, ad grauitatem, PS. Sed ex iiſdem componitur ratio momenti, RV, ad momentum, PS. Ergo momentum, KN, ad momentum, LM, erit vt momentum, RV, ad momentum, PS. Idem quoque eodem modo de momentis quarumcunque ipſi, AG, parallelarum ſibi reſpondentium oſtendetur, quod nempè ſint proportionalia. Habemus ergò duos magnitudinum ordines, nempè momenta omnium linearum figuræ, ABC, & momẽta omnium linearum figuræ, DEF, ita ſibi, ſe habentia, vt vnicuique momento lineæ ſumptæ in, ABC, reſpondeat momentum lineæ in directum cum illa exiſtentis, ſcilicet habemus tot momenta in vno ordine, quot in alio. Cum vero, ABC, per, IT, ſecetur in figuras, AIO, IBCO, &, DEF, in figuras, DQT, QEFT: totque ſint omnia momenta figuræ, IBCO, quot omnia momenta figuræ QEFT: ſimiliter cum ſint tot omnia momenta figuræ, AIO quot omnia momenta figuræ, DQT. Ideò omnia momenta, IBCO, ad omnia momenta, AIO, erunt vt omnia momenta, QEFT, ad omnia momenta, DQT, per demonſtrata in Exercitatio. Quarta, & eius Scholio Prop. 10. Sed omnia momenta, IBCO, æquantur omnibus momentis, AIO, cum enim, I, ſit centrum æquilibrij figuræ, ABC, erit in recta, IOT, tam centrum grauitatis eiuſdem, ABC, quam omnium linearũ, ABC, quarum, I, erit quoque centrum æquilibrij. Igitur & omnia momenta, QEFT, æquabuntur omnibus momẽtis, DQT. Igitur, I, erit centrum æquilibrij omnium linearum figuræ, DEF. Vnde in IT, erit earum centrum grauitatis, & ſubinde centrum grauitatis quoq; figuræ, DEF. Igitur centra grauitatis figurarum, ABC, DEF, æqualiter aberunt à verticibus earundem, A, D.

Def. 12. 6. huius. Def. 11. Poſt. 5. Def. 11. Poſt. 5.

Vt vero intelligatur hoc verum eſſe de quibuſcunque magnitudinibus proportionaliter analogis in grauitate, ſupponemus poſterius, AG, BH, eſſe plana parallela, horizontique perpendicularia, & in iiſdem, nempè in eadem altitudine conſtituta quęcunque grauia proportionaliter analoga in grauitate, vt ex. gr. ABC, figuram ſolidam, &, D

EF,



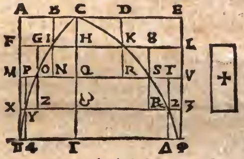
EF, planam. Traiectis autem quotcunque planis ipſis, AG, BH, parallelis, ſupponemus quoq; ab ipſis fieri in ſolido, ABC, plana, LM, KN, & in figura plana, DEF, rectas, PS, RV, ita vt planum, LM, & recta, PS, fiant ab eodem plano, & ab eodem planum, KN, & recta, RV. Sint inſuper ab, I, quod ſit centrum æquilibrij grauis, ABC, ſuſpenſa vtraque grauia, deſcendente pariter ab, I, recta, IT, horizonti perpendiculari, quæ ſit in plano figuræ, DEF. Vel ſi non ſit in eius plano, intelligemus tamen illam ſuſpenſam in plano per, IT, tranſeunte, ac ipſis planis, AG, BH, æquidiſtante. Dico autem figuram, DEF, ita ſuſpenſam, manſuram eſſe, exiſtentibus, PS, RV, vel eaſdem efficientibus parallelis planis, ipſi horizonti perpendicularibus. Oſtendemus enim vt ſupra momenta planorum, KN, LM, eſſe vt momenta rectarum, RV, PS; ſunt enim, KN, RV, æqualiter diſtantia à plano, IT, & ſubinde à puncto, vel punctis ſuſpenſionis; & ſic de cæteris. Vnde concludemus omnia momenta, IBCO, ad omnia momenta, AIO, eſſe vt omnia momenta, QEFT, ad omnia momenta, DQT: oſtendemuſque omnia momenta, IBCO, AIO, adæquari, cum, I, ſit centrum æquilibrij grauis, ABC. Quare patebit omnia momenta figurarum, QEFT, DQT, eſſe æqualia, & ſubinde vel, I, eſſe centrum æquilibrij, DEF, vel hoc, ſimul cum centro grauitatis eiuſdem, DEF, eſſe in plano per, IT, tranſeunte, ipſis, AG, BH, parallelo. Quapropter centra grauitatis grauium, ABC, DEF, æqualiter aberunt ab eorum verticibus, AD. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO. X.

Si duo quęcunque grauia plana, vel duo ſolida fuerint proportionaliter analoga in grauitate: eorum grauitates erũt inter ſe, vt grauitates baſium, ſeu quarumcunque molium, in ipſis ex traiectione cuiuſcunque plani, communem altitudinem perpendiculariter ſecantis, effectarum.

Sint prius duo quęcunq; plana grauia, CΓΠ, CΦΓ, proportionaliter analoga in grauitate, in communi altitudine,



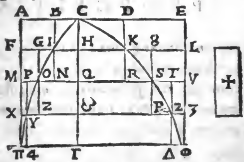
CΓ, ita vt ductis quotcunque planis ipſam, CΓ, ſecantibus fiãt in, CΠΓ, rectæ, y &, OQ, IH, & in, CΓΦ, rectæ, & 2, QS, HK, & ſit grauitas, y &, ad grauitatem, & 2 vt grauitas, OQ, ad grauitatem, QS &c. Dico grauitatem figuræ, CΠΓ, ad grauitatem, CΓΦ, eſſe vt grauitas baſis, ΠΓ, ad grauitatem baſis, ΓΦ, vel vt grauitas y &, ad grauitatem, & 2 &c. Supponemus autem primò eas eſſe vniformiter graues in ſeipſis, & inter ſe. Erit ergo vt grauitas, ΠΓ, ad grauitatem, ΓΦ, ita grauitas cuiuſcunque, vt, y &, ad grauitatem, & 2, & ſic de ſingulis. Igitur vt vnum ad vnum ſic omnia ad omnia. Nempè vt grauitas, ΠΓ, ad grauitatem, ΓΦ, ita erunt grauitates o. l. CΠΓ, ad grauitates o. l. CΓΠ. Cum verò vt grauitas, ΠΓ, ad grauitatem, ΓΦ, ita ſit, ΠΓ, ad ΓΦ, & ſic in cæteris: erunt grauitates o. l. CΠΓ, ad grauitates o. l. CΓΦ, vt o. l. CΠΓ, ad o. l. CΓΦ, ſcilicet

Def. 12. Cor. 4. Exerc. 1. 1. huius.

vt,

vt, CΠΓ, ad, CΓΦ, hoc eſt vt grauitas figuræ, CΠΓ, ad grauitatem figuræ, CΓΦ.

1. huius.



Si verò dictæ figuræ fuerint in ſcipſis quidem vniformiter graues, ſed inter ſe diuerſi gradus, nec ſint parallelogramma, conſtituemus in eadem altitudine, CΓ, & in baſibus, ΠΓ, ΓΦ, parallelogramma, AΓ, ΓE, ita vt, AΓ, ſit vniformiter graue cum, CΠΓ, & EΓ, cum, CΓΦ. Supponemuſq; traiecta plana in ipſis effeciſſe rectas, X&, MQ, FH, in, AΓ, &, & 3, QV, HL, in, EΓ. Erit ergo grauitas, ΠΓ, ad grau. y&, vt grau. ΓΦ, ad grau. & 2: quapropter grauitas, X&, ipſi, ΠΓ, grau. æqualis, ad gr. & y, erit vt grau. 3 &, ipſi grau. ΓΦ, æqualis, ad grau. & 2, & ſic in cæteris. Ergo grauitates o. l. AΓ, ad grau. o. l. CΠΓ, erunt vt gr. o. l. EΓ, ad gr. o. l. CΓΦ. Quoniam verò, AΓ, CΠΓ, ſunt vniformiter graues, ideò vt grauitates o. l. earundem, ita ſunt o. l. & vt o. l, ita figuræ, & vt figuræ ita earum grauitates. Eodem modo oſtendemus grauitates o. l. EΓ, CΓΦ, eſſe vt grauitates figurarum, EΓ, CΓΦ. Ergo grauitates ipſorum, AΓ, ΓE, ad grauitates figurarum, CΠΓ, CΓΦ, erunt in eadem ratione. Quare grauitas, AΓ, ad grauitatem, EΓ, erit vt grauitas, CΠΓ, ad grauit. CΓΦ. Sed grauitas, AΓ, ad grauit. EΓ, habet rationem compoſitam ex ratione plani, AΓ, ad planum, EΓ, ſcilicet ex ratione, ΠΓ, ad, ΓΦ, & ex ratione gradus grauitatis ad gradum grauitatis, tam in planis, AΓ, ΓE, quam in lineis, ΠΓ, ΓΦ: hoc eſt grauitates, AΓ, ΓE, ſunt vt grauitates, ΠΓ, ΓΦ. Ergo & grauitates figurarum, CΠΓ, CΓΦ, erunt inter ſe, vt grauitates, ΠΓ, ΓΦ. Quod patet de illis quoque ſi fuiſſent parallelogrammа.

Def. 12. — 1. huius. — 3. huius.

Denique alteram ipſarum, vt, CΓΦ, ſupponamus diſformiter grauem iuxta limitem, CE, vel illi parallelam extra,

extra ductam, ſed, E Γ, vniformiter graue. Oſtendemus ergo modo, quo ſupra, grauitates o. l. A Γ, ad grauitates omnium linearum, C Π Γ, eſſe vt grauitates o. l. E Γ, ad grauitates o. l. C Γ ✦. Sed vt grauitates o. l. ita ſunt grauitates figurarum etiam in vnif. grauibus, vt mox probabitur. Ergo grauitates, C Π Γ, C Γ ✦, erunt vt grauitates, A Γ, Γ E, ſeu vt grauitates, Π Γ, Γ ✦, &c.

Præſuppoſitum verò ſic oſtendetur. Nam quæcunque figuræ vel planæ, vel ſolidæ, æqualiter analogæ in grauitate ſiuè vniformiter, ſiuè diſformiter graues, ſunt æquègraues. Si enim ex illis accipiantur duæ quæcunque vel ambo planæ, vel ambo ſolidæ, & in libra ſuſpendantur, grauitates o. l. earundem in planis, ſeu o. planorum in ſolidis, erunt inter ſe æquales, cum ſint æqualiter analogæ in grauitate: & vt vnum ad vnum ſic omnia ad omnia. At centrum grauitatis o. l. (ſeu o. planorum) cum ſint æquegrauia erit in medio rectæ iungentis earum centra grauitatis, & hoc commune eſt ipſis, & figuris. Ergo figuræ æquèponderabunt, ſecus enim earum centrum gr. non eſſet in medio. Quapropter erunt inter ſe æquègraues. Si ergo velimus ex. gr. probare grauitates o. l. C Π Γ, C Γ ✦, eſſe vt grauitates figurarum, ſupponemus quandam tertiam figuram vniformiter grauem cum, C Π Γ, ſed æqualiter analogam in grau. ipſi, C Γ ✦, cui idcircò ex demonſtratis erit æquègrauis, ſicuti & grauitates o. l. æquales erunt. Grauitates autem o. l. huius tertiæ figuræ, & ipſius, C Π Γ, erunt vt grauitates ipſarum figurarum, quia erunt vt o. l. & ſubinde, vt figuræ, earumq; grauitates. Ergo & grauitates o. l. C Π Γ, C Γ ✦, erunt inter ſe, vt grauitates earundem figurarum. Quod & de diſformiter grauibus inter ſe comparatis manifeſtum eſt, conferendo eas cum vniformiter graui, verificari.

Def. 12.
Poſt. 3.
Poſt. 5.
3. Exerc. 1.
1. huius.

In ſolidis autem eadem fiet demonſtratio; vt in, C Π Γ, C Γ ✦, ſi nunc ſolidæ intelligantur, & A Γ, Γ E, ſint cylindrici, & ſi pro rectis plana ſubintelligemus. Quod tanquam intellectu facile Lectoris induſtriæ relinquemus. Admoneo autem hæc quoq; verificari quæcunq; ſit diſformitas grauitatis, vt ſi eſſet qualem explicamus in Def. 14. quia currunt

Def. 14.
Poſt. Sch.
14. huius.

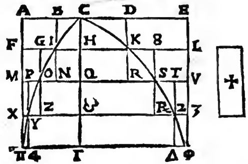
Digitized by Google

eædem rationes, vt conſideranti manifeſtum fiet ſi modo aſ-
ſumamus Poſt. 5. qualiſcunque ſit difformitas grauitatis.

COROLLARIVM.

Patet igitur ex praoſtenſis grauitates o. l. in planis, & o. planorum in ſolidis ſiuè vniformiter, ſiuè difformiter grauibus, eſſe vt grauitates ipſorum planorum, vel ſolidorum. Grauitates autem o. l. ſeu o. planorum, non ſunt vt o. l. vel o. plana, niſi in vniformiter in ſeipſis, & inter ſe grauibus, in quibus tam grauitates o. l. inter ſe, quam o. linea inter ſe, & ipſa figura, ac earum grauitates, ſunt in eadem ratione.

SCHOLIVM.



Volenti autem fine Ind. procedere modũ oſtẽdit idem ſchema in quo apparet circumſcriptio & inſcriptio figurarũ ex parallelogrammis compoſitarũ in figuris planis, vel ex cylindricis in ſolidis cum exceſſu, vel defectu, ✠, qua iuxta ſtylum Archimedeum ſupponitur effecta, ſi ipſa figura huic idonea ſint. Modũ Euclideis, & Archimedeis viris notiſsimum non expono, ſed tantum hoc admoneo, cum figura, C Π Γ, ſupponitur vniformiter, &, C Γ Φ, difformiter grauis, ipſa tamen, A Γ, Γ E, debere ſupponi vniformiter grauia, & grauitates baſium, Π Γ, Γ Φ, communes, tam parallelogrammis, A Γ, Γ E, quam figuris, C Π Γ, C Γ Φ. Tunc enim cum facta prius circumſcriptione, & inſcriptione ipſi, C Π Γ, ac deinde ipſi, C Γ Φ, probatum fuerit grauitatem, A Γ, ad grauitatem figuræ ex. gr. circumſcriptæ ipſi, C Π Γ, maiorem habere rationem, quam grauitatem, E Γ, ad grauitatem ipſius, C Γ Φ, oſtendemus tali ratione hoc falſum eſſe.

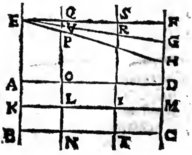
Pro-

Probabimus enim grauitatem, EH, ad gr. HD, eſſe vt grauitatem, AH, ad gr. HB, ſicuti ſunt grauitates baſium earundem. Verum ſupponemus, DH, vniformiter graue, communi exiſtente grauitate, HK, tam ipſi, DH, quam figuræ, CHK, cum deficientia grauitatis erit à, Γ, verſus, C, ſic enim patebit grauitatem, DH, maiorem eſſe grauitate, CHK, & ſic totius circumſcripta grauitatem eſſe maiorem grauitate, CΓΦ. Cum verò deficientia grauitatis erit à, C, verſus, Γ, tunc vtemur figuris, ACΠ, & CEΦ, tanquã difformiter grauibus, quibus circumſcriptionem, & inſcriptionem factam ſupponemus, eodem enim modo oſtẽdetur grauitatẽ circumſcriptæ maiorem eſſe grauitate, CΓΦ. Sicuti grauitatem quoq; inſcriptæ eadem eſſe minorem itidem patefiet. Cætera vero artificibus ad demonſtrationem complendam nota ſunt. Per hũc ergo modum poterit ſtudioſus contexere demonſtrationem in omnibus allatis caſibus, tam in planis, quam in ſolidis huic circunſcriptioni, & inſcriptioni congruis. Quod & de præcedenti Propoſitione, ac alijs huiuſmodi per Indiuiſibilia hic procedentibus, (ne nimis longa euadat hæc Exercit.) dictum volo, quas cui libuerit iuxta hunc modum Archimedeum demonſtrandas relinquo. His verò præmiſsis nunc accedemus ad inueſtiganda centra grauitatis aliquarum planarum, ac ſolidarum figurarum difformiter grauiũ, pro quibus vniformiter grauium centra gr. iam inuẽta ſupponemus, ijſque prout expediet in ſequentibus vtemur.

Digitized by Google

PROPOSITIO XI.

Si quodcunq; parallelogrammum ſit difformiter graue iuxta limitem quoduis ipſius latus: centrum grauitatis eiuſdem diuidet diametrum limiti inſiſtentem, ita vt pars ad limitem ſit reliquæ dupla.



Sit parallelogrãmmum quodcunq; ABCD, & in eo quodlibet laterum, AB, ſumatur tanquam limes, & regula, penes quod ſit vniformiter difformiter graue. Dico centrũ grauitatis ipſius ſecare diametrum limiti inſiſtentem, nempè, KM, in puncto, I, ita vt, KI, ſit dupla, IM. Extendantur indefinitè, BA, CD, parallelæ, & in iiſdem ſit conſtitutum quodcunq; triangulum, EFH, vniformiter graue, in quo diuiſa baſi, FH, bifariam in, G, & iuncta, EG, manifeſtum eſt centrum grauitatis eſſe in, R, in quo ſecatur, EG, ita vt ſit, ER, dupla, RG. Nunc inter, EB, FC, extendatur per, R, indefinita, ST, & alia quæcunq; QN, ambæ æquidiſtantes ipſis, EB, FC: ipſius verò, QN, portio concepta in triangulo, EFH, ſit, QP, & in parallelogrammo, AC, ipſa, ON. Cum ergo, AB, ſit limes grauitatis, & regula, cui æquidiſtant, DC, ON, erit grauitas ipſius, DC, ad grauitatem ipſius, NO, vt diſtantia ipſius, DC, à limite, AB, ad diſtantiam, ON, ab eodem limite, hoc eſt vt, MK, ad, KL, vel, FE, ad, EQ, ſcilicet vt, FH, ad, QP, & ſubinde vt grauitas, FH, ad grauitatem ipſius, QP; & hoc vbilibet intra parallelas, EB, FC, verificabitur. Ergo parallelogrammum, AC, erit proportionaliter analogum in grauitate ipſi triangulo, EFH. Qua-

Commãd. ad Prop. 34. Primi Aequepõ. Archim.

Def. 8.

1. huius.

Def. 12.

pro-

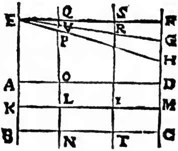
propter centrum grauitatis parallelogrammi, AC, erit in eadem recta, ST, in qua eſt centrum, R, trianguli, EFH, vt æqualiter abſint à verticibus, E, AB, dictarum figurarum. 9. huius. Vnde illud erit in concurſu cum diametro, KM, (eſt enim quoq; in diametro, KM,) hoc eſt in, I, in quo, KM, proportionaliter ſecatur vt, EG, in R, propter parallelas, EB, ST, FC. 8. huius. Cum ergo, ER, ſit dupla, RG, etiam, KI, erit dupla, IM. Igitur centrum grauitatis parallelogrammi, AC, ſecat diametrum, KM, ita vt pars ad limitem, AB, ſit dupla reliquæ. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex demonſtratis conſtat punctum, I, nedum eſſe centrum grauitatis parallelogrammi, AC, ſed etiam cylindri circa axem, KM, ſeu in vniuerſum cuiuſcunque cylindrici circa axem grauitatis, KM, ſi hæc diſformia iuxta limitem planum, AB, vel, EB, dicta ſolida in vna oppoſitarum baſium vt, AB, tangentem ſupponantur. Sit enim, QN, planum vtcunque ductum æquidiſtans ipſi plano, EB, & efficiens in cylindrico, AC, figuram, ON, vt ex. gr. in cylindro, AC, circulum, ON. Erit ergo grauitas circuli, DC, ad grauitatem circuli, ON, vt, MK, ad, KL, ideſt vt grauitas, DC, tanquam lateris parallelogrammi, AC, ad grauitatē recta, ON. Et quia, QN, planum inter, EB, FC, abſq; electione ductum eſt: ſequitur parallelogrammum, AC, & cylindrum, AC, eſſe magnitudines proportionaliter analogas in grauitate. Habebunt ergo centrum grauitatis in eodem plano parallelo ipſi, EB. Cum vero centrum grauitatis cylindri, quippe qui eſt ſolidum circa axem grauitatis, KM, ſit in, KM, neceſſario erit in, I. Per hanc ergo rationem explicatam ſingulariter in cylindro patet vniuerſaliter in omni cylindrico circa axem grauitatis, KM, centrum grauitatis eſſe punctum, I.

Def. 8. Def. 12. 9. huius. 8. huius.

COROLLARIVM II.



Colligitur inſuper ſi intra, EB, FC, plana parallela ducatur quodcunq; planum ipſis æquidiſtans, QN; centrum grauitatis parallelogrammi, OC, & ſubinde cuiuſcunque cylindrici circa axem grauitatis, LM, (ſi hæc omnia eſſe difformiter grauia ſupponantur iuxta limitem, EB) ſecare, LM, quemadmodum centrum grauitatis trapezij, QFHP, vniformiter grauis ſecat, VG, diametrum eiuſdem trapezij. Sunt enim hæ magnitudines ex demonſtratis proportionaliter analogæ in grauitate. Et quia, VG, ita ſecatur à centro grauitatis trapezij, QPHF, vt pars verſus, QP, ad reliquam ſit, vt dupla, FH, vna cum, QP, ad duplam, QP, vna cum, FH: eſt autem vt, FH, ad, QP, ita, FE, ad, EQ, &, MK, ad, KL, & ſubinde vt dupla, FH, cum, QP, ad duplam, QP, cum, FH, ita dupla, MK, cum, KL, ad duplam, KL, cum, MK. Quapropter centrum grauitatis parallelogrammi, AC, ſeù cuiuslibet cylindrici circa axem grauitatis, LM, imò & ipſius, LM, ita ſecabit ipſum, LM, vt pars verſus limitem, AB, ſit ad reliquam, vt dupla, MK, cum, KL, ad duplam, KL, cum, MK, ſcilicet vt dupla diſtantia à limite remotioris baſis, vna cum diſtantia propinquioris, ad duplam diſtantia propinquioris vna cum diſtantia remotioris baſis.

9. huius. Archim. lib. 1. de Aequepond. Prop. 15. Luc. Val. lib. 1. Prop. 20.

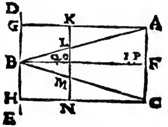
✱

PRO-

PROPOSITIO XII.

Si proponatur quodcunque triangulum, per cuius verticem acta eiuſdem baſi parallela ſit limes, iuxta quem ſupponatur difformiter graue: centrum grauitatis dicti trianguli erit in linea recta ducta à vertice ad medium punctum baſis, ipſam ita diuidens, vt pars ad verticem ſit reliquæ tripla.

SIt quodcunq; triangulum, ABC, per cuius verticem, B, ducta, DE, baſi, AC, parallela, ipſa eligatur tanquã limes, iuxta quem ſupponatur ipſum triangulum, ABC, difformiter graue; ſecta autem, AC, bifariam in, F, iungatur, BF, quæ ſecetur in, I, ita

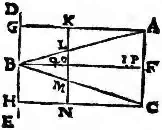


vt, BI, ſit tripla ipſius, IF. Dico punctum, I, eſſe centrum
grauitatis trianguli, ABC. Ducantur per puncta, A, C,
ipſi, BF, parallelæ, AG, CH, & circa axim, BF, in baſi
circulo, AC, intelligatur conus, ABC, vniformiter gra-
uis. Inſuper ducatur quodcunq; planum baſi circulo, AC,
æquidiſtans, & efficiens in cono circulum, LM, in paralle- 4.1.Coni.
logrammo, GC, rectam, KN, & in triangulo, ABC, re-
ctam, LM, ac in, BF, punctum, O. Igitur, KN, erit paralle-
la ipſi, AC, ſupponemus autem & parallelogrammum, G
C, difformiter graue iuxta limitem, DE. Grauitas ergo
rectæ, AC, ad grauitatem rectæ, KN, erit vt, FB, ad, Def. 8.
BO, & grauitas, KN, ad grauitatem, LM, erit vt, KN,
ad LM, (quia recta, KN, ſupponitur in ſeipſa 1. huius.
vniformiter grauis) ſeu vt, AC, ad, LM, hoc eſt vt,
FB, ad, BO. Igitur grauitas, AC, ad grauitatem, LM,
ha-

habebit rationem compoſitam ex duabus rationibus ipſius, FB, ad,BO, nempè erit vt quadratum, FB, ad quadratum,
1. huius. BO. Rurſus grauitas circuli, AC, ad grauitatem circuli, LM, eſt vt circulus, AC, ad circulum, LM, (quia conus ſupponitur vniformiter grauis) hoc eſt vt quadratum, AC,
2.12.Elem. ad quadratum, LM, & ſubinde vt quadratum, FB, ad quadratum, BO. Ergo grauitas, AC, rectæ lineæ ad grauitatem rectæ, LM, erit vt grauitas circuli, AC, ad grauitatem circuli, LM, &, LM, ad libitum ducta eſt: igitur triangu-
Def. 12. lum, ABC, & conus, ABC, erunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate. Eſt autem centrum graui-
8. huius. tatis trianguli, ABC, cum ſit figura circa diametrum, BF,
Luc. Val. lib. 1. Prop. 39. in ipſa, BF, in qua pariter eſt centrum grauitatis coni. Ergo commune habebunt centrum grauitatis. Sed centrum grauitatis coni eſt punctum, I, ergo, I, erit quoq; centrum grauitatis trianguli, ABC. Quod, &c.

COROLLARIVM.

Liquet ex demonſtratis trapezium quodcunq; reſectum linea, vel plano baſi, AC, parallelo, vt, ALMC, eſſe proportionaliter analogum in grauitate cum fruſto coni, LACM, eodem plano ſecto, & ideo hæc habere commune centrum grauitatis. Verum centrum grauitatis fruſti coni habetur (ſignato, Q, centro grauitatis coni, LBM,) ſi fiat vt exceſſus cubi, FB, ſuper, BO, ad cubum, BO, ita, QI, ad IP, eſt enim punctum, P. Ergo, P, erit centrum grauitatis trapezij, ALMC, difformiter grauis iuxta limitem, DE.

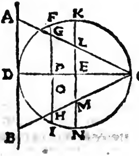


Elicitur ex Prop. 35. lib. 3. Luc. Val.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Si quodcunq; triangulum ſupponatur difformiter graue iuxta limitem baſim: centrum grauitatis erit in puncto medio rectæ lineæ, quæ, ducitur à vertice ad medium punctum baſis eiuſdem trianguli.

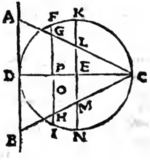


SIt primò triangulum, ABC, æqualium laterum, AC, CB, & difformiter graue iuxta limitem, AB, ſectaque AB, bifariam in, D, iungatur, CD, quæ pariter bifariam ſecetur in, E. Dico punctum, E, eſſe cẽtrum grauitatis trianguli, ABC. Fiat circa, DC, tanquam circa axim ſphæra, CKDN, quæ intelligatur eſſe vniformiter grauis. Per centrum inſuper, E, traijciatur planum, rectè ſecans axem, DC, & efficiens in ſphæra circulum, KN, & in triangulo rectam, LM. Similiter ducatur aliud quodcunq; planum ipſi, DC, erectum, efficiens in ſphæra circulum, FI, & in triangulo rectam, GH. Erunt ergo ambo hæc plana parrallela plano per, AB, tranſeunti, ſphęramq; tangenti, cum CD, propter æqualia latera, CA, CB, ſit ipſi, AB, perpendicularis. Deniq; ex recta, GH, abſcindatur, GO, æqualis ipſi, LM. Grauitas ergo rectæ, LM, ad grauitatem rectæ, GH, de foris ſumpta grauitate rectæ, GO, habebit rationem compoſitam ex ratione grauitatis, LM, ad grauitatem, GO, hoc eſt ex ratione, ED, ad, DP, & ex ratione grauitatis, GO, ad grauitatẽm, GH, nempè ex ratione, GO, vel, LM, ad, GH, quia, GH, ponitur in ſeipſa vniformiter grauis. Sed vt, LM, ad, GH, ita eſt, EC, ad, CP. Ergo grauitas, LM, ad grauitatem, GH, habet

Def. 8.

1. huius.

rationem compoſitam ex ratione, ED, ad, DP, & ex ratione, EC, ad CP. Hæ verò duæ rationes componunt rationem rectanguli, DEC, ad rectangulum, DP C. Ergo grauitas, LM, ad grauitatem, GH, eſt vt rectangulum, DEC, ad rectangulum, DPC. Sed vt rectangulum, DEC, ad rectangulum, DPC, ita eſt quadratum, EK, ad quadratum, PF, & ita circulus, KN, ad circulum, FI, & ita grauitas circuli, KN, ad grauitatem circuli, FI, quia ſphæra ſupponitur vniformiter grauis. Igitur grauitas, LM, ad grauitatem, GH, eſt vt grauitas circuli, KN, ad grauitatem circuli, FI, & planum, FI, ad libitum ductum eſt. Ergo triangulum, ABC, & ſphæra, C KDN, erunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate, & ſunt circa eandem, CD, quæ eſt diameter trianguli, & axis ſphæræ, habens idcircò in ſeipſa vtriuſq; centra grauitatis. Ergo in eodem puncto ipſius, DC, eſt centrum grauitatis trianguli, ABC, & ſphæræ, CKDN. Sed centrum grauitatis ſphærę idem eſt cum centro figuræ, nempè eſt punctum, E, ergo &, E, erit centrum grauitatis trianguli, ABC.



23. Sexti Elem.

2. Duod. Elem.

1. huius.

Def. 12.

8. huius.

9. huius. Luc. Val. lib. 1. Prop. 1.

Quod ſi triangulum propoſitum eſſet quidem in baſi, A B, & in eadem altitudine, ſed ducta ab illius vertice ad punctum, D, non eſſet ipſi, AB, perpendicularis: tunc aſſumpto triangulo eiuſdem cum eo altitudinis, & baſis, vt, ABC, cuius, CD, eſt perpendicularis ipſi, AB, prius, vt factum eſt, oſtenderemus centrum grauitatis iſtius eſſe in medio rectæ, CD, deinde concluderemus centrum grauitatis illius eſſe in medio rectę verticem eiuſdem cum, D, coniungentis, ex eo quod hæc duo triangula eſſent proportionaliter analoga in grauitate, propter æqualitatem rectarum ipſi, AB, parallelarum, & ab eodem, AB, æquè remotarum, & ſubinde propter earum æquales grauitates.

Def. 12.

COR-

COROLLARIVM.

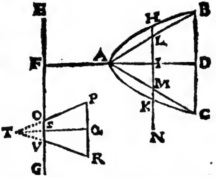
SI triangulum, & ſphara, communi plano ipſi plano, AB, æquidiſtante ſecentur, conſtat centrum grauitatis ſegmenti trianguli, & ſphara eidem conterminantis, commune eſſe, quia ſunt magnitudines proportionaliter analoga in grauitate. Sic igitur ex. gr. centrum grauitatis portionis ſphara, FDI, erit & centrum grauitatis trapezij, ABHG, & ſic res ſe habebit in reliquis huiuſmodi ſegmentis trianguli propoſiti, & ſphara ſiue, CD, ſit ipſi, AB, perpendicularis, ſiuè non, dummodo triangulum, & ſphara ſint in eadem altitudine reſpectu ipſius, AB. Cum ergo ex Luca Valerio, & alijs, ſed pracipuè ex Torricellio compendioſiſſima ratione, vt ipſe palam faciet, & ex me in ſequentibus conſtent centra grauitatis harum ſphara portionum, ideò hac quoq; pro ſegmentis propoſiti trianguli recipiemus. 9. huius. Schol.2. 32. huius.

PROPOSITIO XIV.

Si propoſitum quodcunque triangulum ſupponatur difformiter graue iuxta limitem rectam lineam, verſus verticem extra triangulum ductam baſi parallelam: ſecta autem baſi bifariam, à puncto ſectionis per verticem recta linea vſq; ad limitem producatur: centrum grauitatis dicti trianguli diuidit eius diametrum verticalem, ſicuti centrum grauitatis conoidis hyperbolici, circa axim altitudinem trianguli, ac hyperbola deſcripti, cuius latus tranſuerſum ſit intercepta inter verticem, & limitem; diuidit ipſius conoidis axem.

 Sit

Digitized by Google



SIt triangulum, ABC, difformiter graue iuxta limitem rectã, EG, ipſi, BC, parallelam, verſus, A, extra triangulum ductam, & primò æquicrure, ita vt, AB, AC, ſint æquales. Secta autem biſariam, CB, in, D, ducatur à, D, per, A, vſq; ad limitem, EG, recta, DAF. Inſuper circa axim, AD, ſupponatur conoides hyperbolicum, ABC, vniformiter graue, exiſtente, AF, latere tranſuerſo hyperbolæ conoides deſcribentis. Dico centrum grauitatis dicti conoidis & centrum grauitatis præfati trianguli ſecare, AD, in eadem ratione. Ducatur inter, A, &, BC, planum quodcunq;
41. primi Geom. Ind. baſi conoidis parallelum, quod efficiat in conoide circulum, HK, & in triangulo, ABC, rectam, LIM: & ſumatur in, LK, producta portio, LN, æqualis ipſi, BC. Grauitas ergo rectæ, BC, ad grauitatem rectæ, LM, erit in ratione compoſita ex ratione grauitatis, BC, ad grauitatem ſibi
Def. 8. æqualis, LN, hoc eſt ex ratione, DF, ad, FI; & ex ratione grauitatis, NL, ad grauitatem, LM, hoc eſt ex ratione, NL, ſeù, BC, ad, LM, (quia, LN, ſupponitur in ſeipſa
3. huius. vniformiter grauis) hoc eſt, DA, ad, AI. Duæ autem rationes, DF, ad, FI, &, DA, ad, AI, componunt rationem rectanguli, FDA, ad rectangulum, FIA, hoc eſt qua-
21. primi Conic. drati, BC, ad quadratum, HK, vel circuli, BC, ad circulum, HK, hoc eſt grauitatis circuli, BC, ad grauitatem circuli, HK, nam conoides ſupponitur vniformiter graue.
3. huius. Ergo grauitas rectæ, BC, ad grauitatem rectæ, LN, eſt vt grauitas circuli, BC, ad grauitatem circuli, HK, & planum per, HK, ductum eſt ad libitum. Igitur triangulum, ABC, difformiter graue, & conoides hyperbolicum, ABC, vniformiter graue, ſunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate. Eſt vero, AD, diameter trianguli, & axis

conoi-

Digitized by Google

conoidis, vnde in, AD, & in eodem illius puncto eſt centrum grauitatis tam conoidis, quam trianguli. Quod ſi triangulum fuerit ſcalenum colligemus propoſitum iuxta modum Prop. ant. Quod, &c.

Porrò ex Luca Valerio Lib. Secundo Prop. 43. & Lib. Tertio Prop. 7. centrum grauitatis conoidis hyperbolici eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars baſi propinquior ſit ad reliquam, vt ſexquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axem conoidis.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratis colligitur ſi triangulum dictum, & conoides ſecentur quomodocunq; planis baſi, ſeu limiti parallelis, ſegmentorum trianguli, & conoidis ſibi reſpondentium, 1. huius *idem eſſe centrum grauitatis, cum illa ſint magnitudines proportionaliter analoga in grauitate. Centrum autem grauitatis huiuſmodi ſegmenti conoidis hyperbolici docet idem Luca Val. Lib. Secundo Prop. 45.*

COROLLARIVM II.

SI trapezium, OVRP, habens oppoſitas baſes, OV, minorem, &, PR, maiorem. parallelas, tangatur à limite, EG, in, OV, & ſit, SQ, biſſecans ipſas, OV, PR, eidem, EG, perpendicularis, intelligaturq; trapezium difformiter graue iuxta limitem, EG. Erit centrum grauitatis huius trapezij in, SQ, & in eo puncto, quod eſt centrum grauitatis conoidis hyperbolici circa axem, SQ, latere tranſuerſo, TS, reliqua ipſius, QS, ad verticem trianguli, PTR, hyperbola dictum conoides gignentis. Hoc autem oſtendetur, inſtituta eadem preciſè demoſtratione ſuperiori. Qua peracta concludemus hoc idem de quouis trapezio cum hoc aquè alto quod baſi minori quomodocunq; adiaceat, limiti, EG, nempè quod centrum grauitatis illius erit in biſſecante oppoſitas baſes, & in eadem limiti, EG, parallela, tranſeunte per centrum grauitatis conoidis hyperbolici, circa axem, SQ, deſcripti.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI quis cupiat cuiuſcunq; propoſiti rectilinei difformiter grauis iuxta limitem rectam quamlibet tangentem ipſum, vel tangenti parallelam, extra figuram vbilibet conſtitutam, centrum grauitatis inuenire; id ei licebit, eodem in triangula reſoluto, iuxta modum in vniformiter grauibus conſuetum, nempè detecta ratione grauitatum difformium corũdem triangulorum per Cor. 2. Prop. 37. ſubſequentis; cum per ſuperiora innoteſcat centrum grauitatis cuiuſcunq; trianguli iuxta aſsignatum limitem difformiter grauis. Quod & in planis non rectilineis, & in ſolidis difformiter grauibus pariter Lector intelliget fieri poſſe, cum eorum fuerint centra grauitatis inuenta, adhibito eodem Cor. 2. dicta Prop 37.

Ad hæc enim poſt rectilineas figuras tranſire æquum eſſet, verum hoc aliquantulum cogimur differre, vt viam quandam ad rimanda grauitatis centra in difformiter grauibus, prællata vniuerſaliorem parare poſsimus, quam tamen, vt quoddam exemplar huius doctrinæ ſtudioſo præbeamus, circa inſigniores tantum figuras proſequemur.

Immò vt hæc altius promoueatur, cum infinitis modis grauitatis abſoluta difformitas variari poſsit, & ſub his ſint pariter infiniti modi variandi vniſ. difformiter eandem grauitatem, quorum hucuſq; vnum tãtum attigimus, ex his nonnullos, & eos quoq; infinitos ſeligere, ac expendere decreui, qui ex duabus definitionibus ſubſequentibus, cum allatis in huius Exerc. initio numero continuatis, Philogeometra ſatis, puto, innoteſcent.

DEFINITIO XIII.

SI gradus grauitatis à limite intelligantur continuò progredi (vt hucuſq; ſuppoſitum eſt) in ratione diſtantiarum ab eodem limite: hoc dicetur incrementum difforme (ſubaudi ſemper vniformiter difforme) grauitatis, primæ ſpeciei. At ſi ijdem gradus ſint in ratione quadratorum earundem diſtantiarum, vocabitur incrementum difforme ſecundæ ſpeciei. Si in ratione cuborum, tertiæ ſpeciei. Si quadratoquadratorum, quartæ. Et ſic deinceps in poteſtatibus coſſicis ſubſequentibus in infinitum.

XIV.

XIV.

HVic ergo conſequenter quæcunq; figura plana, in qua ductarum quotcunq; rectarum, in ſeipſis ſigillatim vniformiter grauium, limiti parallelarum, & quæcunq; ſolida, in qua ductorum quotcunq; planorum in ſeipſis ſingillatim vniformiter grauium, limiti parallelorum; gradus grauitatis fuerint in ratione diſtantiarum à dato limite; vocabitur difformiter grauis in prima ſpecie difformitatis: & eius grauitas, prima grauitas difformis eiuſdem appellabitur. Quod ſi rectarum, vel planorum gradus grauitatis fuerint vt quadrata diſtantiarum à limite, dicetur figura difformiter grauis in ſecunda ſpecie: & eius grauitas, ſecunda grauitas difformis. Si verò illi fuerint vt cubi diſtantiarum, dicetur difformiter grauis in tertia ſpecie; & eius grauitas, tertia grauitas difformis. Et ſic deinceps in infinitum, &c.

COROLLARIVM.

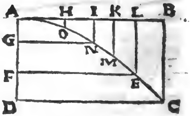
HInc ſequitur, ſicuti incrementum difforme grauitatis primæ ſpeciei oſtendebatur à parallelis baſi cuiuſcunque trianguli, cuius apex eſſet limes; ita vt triangulum ſe haberet veluti quadam ſcala graduum grauitatis in ipſa difformitatis primæ ſpecie; pariter graduum grauitatis in ſecunda ſpecie fore ſcalam ſecundum ſpatium parallelogrammi, ſeù trilineum parabolæ quadraticæ, in tertia cubicæ, in quarta quadratoquadraticæ, &c. Vnde ſi omnia hæc trilinea duplicetur cum dicto triangulo trilineorum primo ſintq; in communi baſi dati cuiuſq; gradus grauitatis, & circa eandem diametrum, vertice limite, habebimus in ipſis omnes ſcalas pro aſſignatis ſpeciebus difformitatis ipſius grauitatis. Vt enim ſe habent gradus grauitatis in qualibet ſpecie, ita quoq; ſunt applicata ad diametrum trilinei eiuſdem numeri cum numero ſpeciei, vt patuit in Exerc. Quarta, Prop. 23. In Def. 7. Vide Prop. 23. in Exerc. 4.

Quoniam verò ad inueſtiganda figurarum centra grauitatis in quauis ſpecie difformitatis, & iuxta modũ, quem innuimus, præmiſſo vniuerſaliorem, quibuſdam Propoſitionibus Lemmaticis indigemus, ideò hæ ſunt nobis prius demonſtranda, quod nunc exequemur.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Si in propoſito quocunq; ex dictis trilineis, eiuſdem baſi parallelis quibuſcunq; ductis, compleantur parallelogramma ſub ipſis, & portionibus diametri ab eiſdem abſciſſis verſus verticem: circumſcripta factis trilinei ſegmentis parallelogramma ad eadem ſegmenta eandem rationem habebunt. Et hoc idem continget in eiuſdem trilinei reſiduo ſpatio, ſeu ſemiparabola.



SIt vnum quodlibet ex dictis trilineis, ABC, in quo ductis quibuſcũq; LE, in baſi, CB, parallelis compleantur parallelogramma, ABCD, ALEF, AING. Dico parallelogrammum, FL, ad ſegmentum, ALE, eſſe, vt parallelogrammum, GI, ad ſegmentum, AIN. Ductis enim in trilineis, ALE, AIN, quibuſcunq; baſibus, LE, IN, parallelis, nempe, KM, HO, erit, LE, ad, BC, conuertendo, vt pot. LA, ad poſt. AB, gradus nempè trilineo, ABC, congruentis; &, BC, ad, KM, vt pot. BA, ad pot. AK, eiuſdem gradus. Ergo ex æquali, EL, ad KM, erit vt pot. LA, ad pot. AK, eiuſdem gradus. Sic oſtendemus, IN, ad, HO, eſſe vt pot. IA, ad pot. AH, prædicti gradus. Sed in omnibus huiuſmodi trilineis oſtenditur in Exerc. 4. Prop. 23. circumſcripta parallelogramma ad ſua trilinea quandam determinatam rationem habere. Vt in primo trilineo, ſeu in triangulo, parallelogrammum eſſe duplum trilinei, in ſecundo eſſe triplum, &c. Ergo quam rationem habebit parallelogrammum, DB, ad trilineum, ABC, eandem habebunt parallelogramma, FL, GI, ad ſua trili-

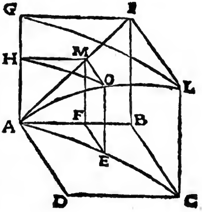
23.Exerc. 4.

nea,

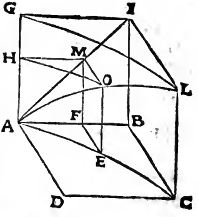
nea, ſeu ſegmenta, ALE, AIN. Quia verò permutando vt totum, FL, ad totum, GI, ita eſt pars, ALE, ad partem, AIN, ideò reliquum ad reliquum, nempè, ſemiparabola, FAE, ad ſemiparabolam, GAN, erit vt totum, FL, ad totum, GH: vnde permutando, & conuertendo, parallelogramma, FL, GI, ad ſemiparabolas, ſeu ſemiparabolæ, DC, ſegmenta, AFE, AGN, eandem rationẽ habebunt. 19. Quinti Elem.

PROPOSITIO XVI.

Si circumſcriptum cuicunq; ex dictis trilineis parallelogrammum incipiens reuolui circa baſim eiuſdem trilinei tanquam axem, vtcunq; eleuetur, cylindricuſque ſub ipſis compleatur: & per verticem trilinei, latuſq; parallelogrammi, quod illius baſi opponitur, planum indefinitè extendatur, cylindricum ſecans in duas partes, ſeù truncos. Erit truncus inferior ad ſuperiorem, vt parallelogrammum ad trilineum.



Sit parallelogrammũ, ABCD, vni ex dictis trilineis, quod ſit, ABC, circumſcriptum. Eleuetur autem, DB, vtcunq; circa axem, BC, & ſit idem, AC, LB, compleaturq; cylindricus ſub ipſis, GILCAB, quem ſecet planum indefinitè extenſum per, A, IL. Dico trũcum inferiorem, AILCB, ad ſuperiorem, GALI, eſſe vt, DB, ad trilineum, ABC. Erit itaque, GB, parallelogrammum, &, AI, concurſus eiuſdem



cum plano, AIL, recta linea. Sumatur in ea quodcunq; punctum, M, à quo ducantur parallelæ, MO, ipſi, IL; MH, ipſi, IG, &, MF, ipſi, IB. Planum ergo, per, HM, MO, tranſiens æquidiſtabit ipſi, GIL, & tranſiens per, OM, MF, ipſi, LB; eſto quod in truncis produxerint figuras, HMO, MOEF. Erit igitur, OHMFAE, cylindricus, & ſubinde figura, HMO, ſimilis, & æqualis ipſi, AFE, ac ſimiliter poſita. Figura verò, MOEF, erit parallelogrammum ipſi, LB, æquiangulum, cum eidem æquidiſtet, tranſeunti per latera cylindrici, GBC, vnde tranſibit quoq; per eius latera, æquidiſtabitque, OE, ipſi, MF, & MO, eſt parallela, FE, ſuntque, MF, IB, FE, BC, parallelæ. Quoniam ergo parallelogrammum, LB, ad, OF, habet rationem compoſitam ex ratione, IB, ad, MF, hoc eſt, IA, ad, AM, ſeù, GI, ad HM; & ex ratione, BC, ad, FE, hoc eſt, IL, ad, MO. Duæ rationes verò, GI, ad, HM, &, IL, ad, MO, componunt rationem parallelogrammi, GIL, ad, HMO, ſeù trilinei, GIL, ad, HMO, cum adæquentur ipſis, ABC, AFE. Ergo, LB, ad, OF, eſt vt, GIL, ad, HMO; & permutando, LB, ad, GIL, erit vt, OF, ad, HMO, & hoc vbicunq; M, enim ab libitum ſumptum eſt. Ergo omnia plana trunci, AILCB, regula, LB, ad omnia plana trunci, AGIL, regula, DB, ſunt vt vnum ad vnum, ſcilicet vt, BL, ad, GIL, ſeù vt, DB, ad, ABC, & altitudines truncorum reſpectu ſuarum baſium ſunt æquales (ſecus enim non valeret hæc ratio demonſtrandi) quapropter truncus, AILCB, ad truncum, GALI, eſt vt, DB, ad, ABC. Quod, &c.

15. vnd. Elem.

23. Sex. Elem.

rop. int.

Corol. Prop. 4. Exerc. 1.

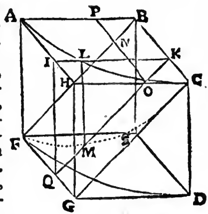
COR-

COROLLARIVM

SI vice trilinei fuiſſet eius ſemiparabola in baſi, BC, diametro, AB, eodem modo oſtenſum fuiſſet truncum inferiorem cylindrici in eadem vt in baſi conſtituti, ad ſuperiorem eſſe vt, DB, ad dictam ſemiparabolam.

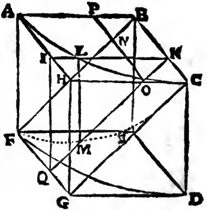
PROPOSITIO XVII.

Si fuerit quicunq; cylindricus plano ſectus per verticem inferioris baſis, & per baſim, ſeù tangentem in oppoſito vertice ſuperiorem extenſo: parallela dictæ baſi, vel tangenti, quæ tranſit per alterutrius baſium centrum grauitatis, ſecabit eiuſdem baſis altitudinem in ratione reciproca partium, ſeù truncorum eiuſdem cylindrici.



SIt quicunq; cylindricus, ABIDFE, in oppoſitis baſibus, FED, ABC, plano ſectus per, F, verticem baſis, FED, & per baſim, BC, extenſo, quod efficiat figuram, BFC, in eodem cylindrico. Tranſeat autem quædam ipſi, BC, parallela per cẽtrum grauitatis ex. gr. N, ſuperioris baſis, ſecans eiuſdem altitudinem, quæ ſit, AB, in, P. Dico vt, AP, ad, PB, ità reciprocè eſſe truncum inferiorem, BFCDE, ad ſuperiorem, AFCB. Circumſcribatur ipſi, FED, parallelogrammum, FGDE, in cuius baſi, &

in eadem altitudine, fiat paralleleppipedum, BG, cylindrico circumſcriptũ, quod plano, FBC, extenſo ſecetur in duo priſmata, BCGHAF, BCDEF G, quæ erunt æqualia. Rurſus inter plana, AE, H D, traijciatur quodcunq; planum ipſis æquidiſtans, quod faciat in priſmate ſuperiori triangulum, KIQ, & in trunco ſuperiori cylindrici



triangulum, MLK; & quia æquidiſtat tranſeunti per latera cylindrici, erit, LM, parallela eidem lateri, & ſubinde ipſi, IQ, quæ eſt parallela ipſi, AF, lateri cylindrici. Quoniam verò triangulum, QIK, ſimile eſt triangulo, MLK, erit ad illud ſicut quadratum, IK, ad quadratum, KL, & hoc vbicunque, ſuntq; antecedentia inter ſe æqualia. Ergo vt omnia plana ſuperioris priſmatis ad omnia plana ſuperioris trunci, ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, BH, ad o. q. figuræ, ABC, regula AB. Sed o. q. BH, ad o. q. ABC, habent rationem compoſitam ex ratione, HB, ad, ABC, hoc eſt ſolidi, BG, ad cylindricum, BFD, & ex ratione dimidiæ, AB, (quæ eſt diſtantia centri grauitatis parallelogrammi, BH, à recta, BC,) ad, PB, diſtantiam centri, N, ab eadem, BC, vt elicitur ex demonſtratione Rocchæ pro regula Guldini, allata in Exerc. Tertia, Cap. 14. Pag. 230. quã idem Roccha adinuenit occaſione mẽſurandi fuſi parabolici. Ergo omnia plana priſmatis, ad o. plana trunci ſuperioris (hoc eſt priſma ad truncum ſuperiorem) habent rationem compoſitam ex ratione ſolidi, BG, ad cylindricum, BFD, & ex ratione dimidiæ, AB, ad, BP. Quia verò ſolidum, BG, duplum eſt priſmatis, ſicuti, AB, dupla ſuæ medietatis; ideò ſolidum, BG, ad truncum ſuperiorem erit in ratione compoſita ex ratione, BG, ad cylindricum, & ex ratione, AB, ad, BP. Sed ratio, BG, ad trun-

Lemma ad Prop. 11. primi Geom. Indiu.

Cor. Prop. 10. Exerc. 4.

3. Exer. 1.

truncum ſuperiorem eſt quoq; compoſita ex ratione, BG, ad cylindricum, & cylindrici ad truncum. Ergo ſi auferatur communis ratio ſolidi, BG, ad cylindricum, remanebit ratio cylindrici ad truncum ſuperiorem eadem rationi, AB, ad, BP. Quare diuidendo truncus inferior ad ſuperiorem erit vt, AP, ad, PB. Quod eſt propoſitum. Def. 12. primi Geo. Ind.

COROLLARIVM.

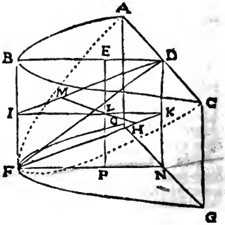
Hinc patet ſi è contra in eadem figura ducatur parallela eiuſdem baſi, vel tangenti, diuidens altitudinem in ratione truncorum reciproca, in ea eſſe centrum grauitatis dicta figura. Et quia in figuris circa diametrum centrum grauitatis eſt in diametro, propterea in illis dictum centrum ſecat diametrum in ratione reciproca truncorum. 8. huius

SCHOLIVM.

Cvm propoſuiſſem clariſſimo Torricellio inueniendam rationem truncorum in ſolo cylindrico in parabola conſtituto, nedum iſtam adinuenit, ſed quicunque eſſet cylindricus, dummodo eius baſis eſſet figura circa diametrum: oſtendens truncos eſſe in ratione reciproca partiũ diametri à centro grauitatis ſeparatarum, quod & mihi ſuperiorem contexendi, qualiſcunq; ſit, occaſionem prabuit. Et quia demonſtratio elegantiſſima eſt, & adducta breuior, ideò hic eam ſubnectere libuit, qua talis eſt.

ALI-

ALITER EX TORRICELLIO.



SIt cylindricus, ABCGFO, habens circa diametros, BD, FN, figuras, ABC, OF G, quarum centra grauitatis, E, P: ſecetur autem plano, FAC, per, F, & tangentem in, D, figuram, ABC, ſeù eius baſim, A C, extenſo. Dico partem cylindrici inferiorem ad ſuperiorem eſſe vt, BE, ad, ED, vel, FP, ad, PN. Ducantur rectæ, BF, EP, DN, DF, & à medijs punctis ipſarum, BF, DN, nempè, I, K, rectæ, ID, KF, necnon, IK, ſecans, EP, in, L. Erunt itaquè, BF, EP, DN, inter ſe parallelæ, quia iungunt æquales, & parallelas. Ob eandem rationem erunt parallelæ, BD, IK, vel, IK, FN, vt &, DI, KF. Quoniam verò, DI, bifariam ſecat, BF, ideò bifariam quoq; ſecabit omnes in triangulo, DBF, ipſi, BF, æquidiſtantes, quæ ſunt diametri parallelogrammorum in ſolido, ABCF, plano, AG, parallelorum. Quapropter tranſibit, ID, per eorum omnium centra gra-
8. huius. uitatis, & erit in eadem, ID, centrum grauitatis ſolidi, AB CF; hoc verò, vbicunque ſit, ſupponatur eſſe, M. Eodem modo oſtendemus in, FK, eſſe centrum grauitatis ſolidi, ACGFO, & eſt, L, medium punctum rectæ, EP, centrum grauitatis cylindrici, ABCGFO. Si ergo ab, M, per, L, producatur, MLH, vſq; ad, FK, cui incidat in, H, erit, H, centrum grauitatis ſolidi, ACGFO. Quia ergo triangula, MIL, LKH, ſunt ſimilia propter parallelas, DI, KF,

ideò

Digitized by Google

ideò vt, ML, ad, LH, ita eſt, IL, ad LK: ſed vt, ML, ad, LH, ita eſt ſolidum, ACGFO, ad ſolidum, ABCF, ergo vt, IL, ad, LK, & ſubinde, vt, BE, ad, ED, vel, FP, ad, PN, ita eſt ſolidum inferius, ACGFO, ad ſuperius, ABCF. Quod oſtendendum proponebatur. 6. Prop. Aequip. Arch.

Licet autem præcedens demonſtratio ſit vniuerſalior, facilè tamen puto ad eandem vniuerſalitatem hanc reduci poſſe. Porrò notat, ſi in recta iungente puncta, F, E, ſint quoq; centra grauitatis omnium planorum in ſolido, ABC F, ipſi, ABC, æquidiſtantium, in mutuo concurſu rectarum, FE, ID, verum illius centrum reperiri.

COROLLARIVM.

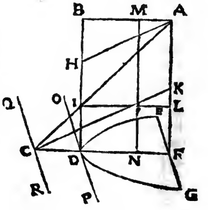
SI cylindricus, ABCGFO, ſupponatur difformiter grauis in quacunq; ſpecie, iuxta limitem planum, AG, vel tangens in, FB, aut illis parallelam, & ſint, F, P, centra grauitatis baſium, ABC, OFG; erunt, BE, ED, vel, FP, PN, in ratione reciproca grauitatum truncorum: currit enim hic eadem præcisè demonſtratio. Quodſi, FE, tranſeat quoq; per centra grauitatis planorum in ſolido, ABCE, ipſi, ABCF, æquidiſtantium, eius centrum grauitatis erit itidem in concurſu rectarum, DI, EF.

Poterat prior pars huius Corollarij probari per oſtenſa in ſuperiori noſtra demonſtratione, intelligendo alium cylindricum vniformiter grauem, ac proportionaliter analogum in grauitate ipſi, ABCGFO, cuius baſes oppoſitæ fuiſſent circa diametros, FN, BD. Nam ex hoc propoſitum pro difformiter graui colligi potuiſſet. Verum cum hoc compendioſius habeatur ex demonſtratione Torricellij nihil vltra prædictis addendum cenſui.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Si cylindricus vniformiter, vel vtcunq; difformiter grauis, in baſi figura circa diametrum, ſecetur plano tranſeunte per alterutrum ex verticibus ſuperioris baſis, & per æquidiſtantem tangenti in oppoſito vertice inferioris, ad eandem partem verticis extra figuram conſtitutam, quæ limes ſupponatur: centrum grauitatis baſis cylindrici diuidet compoſitam ex diametro, eiuſq; indefinitè productæ reſiduo vſq; ad limitem, in ratione reciproca grauitatum truncorum eiuſdem cylindrici.



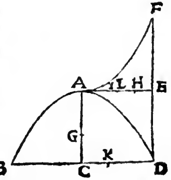
SIt cylindricus vniformiter,vel vtcũq, difformiter grauis in baſi figura, EDG, circa diametrũ, DF; cuius tãtũ parallelogrammũ, BAFD, exponimus, tranſiens per axem grauitatis, MN, & diametros, BA, DF, oppoſitarum baſium. Hic ſecetur plano tranſeunte per, A, &, QR, parallelam tangenti, OP, quę ſit limes, factis truncis, AFDI, ABI. Dico, producta, FD, vſq; ad, QR, limitem in, C, centrum grauitatis, N, ſecare, CF, in ratione reciproca grauitatum truncorum, AFDI, ABI. Hoc poſſet probari vel per à nobis oſtenſa, vel per modum Tor-

Torricellij ductis, IK, AH, bifariam ſecantibus, AF, BI, proſecutaq; vt ſupra demonſtratione: ſed & hac ratione colligi poteſt. Ducatur planum per, I, baſi, EDG, parallelum. Cum ergo ex demonſtratis ſit truncus, ALI, ad, ABI, in vniformiter graui, nempè grauitas, ALI, ad grauitatem, ABI, in vniformiter, & difformiter graui, vt, DN, ad, NF, componendo, erit grauitas cylindrici, BL, ad grauitatem trunci, ABI, vt, DF, ad FN: at grauitas cylindrici, FB, ad grauitatem cylindrici, BL, eſt vt, FA, ad, AL, (etiam in difformiter grauibus, quia his cylindrici proportionaliter analogi in grauitate, & vniformiter graues ita pariter ſe habent) ſiuè vt, CF, ad, IL, vel, FD. Ergo ex æquali, & diuidendo, grauitas trunci, AFDI, ad grauitatem trunci, ADI, erit vt, CN, ad NF. Eſt ergo, CN, ad, NF, in ratione reciproca grauitatum truncorum dicti cylindrici. Quod, &c.

Ex Corol. proxime ſuperiori.

PROPOSITIO XIX.

Si in quocunque parallelogrammo, AD, ſit quoduis ex ſapè dictis trilineis, AED, cum eius reſiduo ſpatio, ſeù ſemiparabola, ADC, & figuræ duplicentur, vt fiant trilineum, AFD, & parabola, BAD, circa diametros, AE, AC, ſintq; H, G, eorum centra grauitatis. Dico parallelogrammum, CE, ad trilineum, AED, eſſe vt, AH, ad, HE: & idem, CE, ad ſemiparabolam, ACD, vt, AG, ad, GC.



NAm ſi intelligamus cylindricum in baſi, FA

D, qualem poſcit Prop. 16. huius, ſectum plano per, A, & latus oppoſitum ipſi, FD, tranſeunte; erit parallelogrammum, CDF, ad trilineum, AFD, vt truncus eiuſdem inferior ad ſuperiorem, per oſtenſa in eadem Prop. 16. At inferior truncus ad ſuperiorem eſt, vt, AH, ad, HE, per Cor. Prop. 17. Ergo parallelogrammum, CDF, ad trilineum, AFD, vel, CE, ad trilineum, AED, eſt, vt, AH, ad, HE. Eodem modo propoſitum de parabola oſtendemus.

COROLLARIVM I.

Hinc ſequitur in trilineo primo, AH, ad, HE, eſſe vt 2. ad 1. in ſecundo vt 3. ad 1. in tertio vt 4. ad 1. Et ſic deinceps, &c. antecedente ſemper vnitate aucto, & retenta in omnibus vnitate pro conſequente. In prima verò parabola, ſc. in triangulo, BAD, erit, AG, ad, GC, vt 2. ad 1. in ſecunda vt 3. ad 2. in tertia, vt 4. ad 3. & ſic deinceps, &c. auctis ſemper ſingulis terminis vnitate: hoc eſt in vtriſq; figuris quemadmodum ſe habet parallelogrammum, CE, ad trilinea, AED, & ad ſemiparabolas, ACD. Quæ ratio habetur in Exerc. Quarta ex Prop. 23. eiuſq; Cor.

COROLLARIVM II.

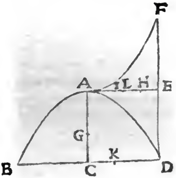
Conſequitur inſuper ex dictis, in omnibus hiſce figuris, earumq; ſegmentis, per applicatas verſus verticem abſciſſis; centra grauitatis earum, ſegmentorumq; diametros, ſimiliter ſecare. Talis enim ſectio fit iuxta rationem circumſcriptorum ipſis parallelogrammorum ad ipſa ſegmenta, quæ in omnibus eadem eſt, vt patuit in Prop. 15. Torricellius prius inuenerat dictorum trilineorum, & parabolarum centra grauitatis, quæ cum mihi communicaſſet abſq; tamen demonſtra- 16. huius.
tione, humaniterq; in vſum permiſiſſet, ipſe ſuperiorē excogitaui, quam neſcio an concordet cum ab eodem allata.

PRO-

PROPOSITIO XX.

In eodem Schemate antecedenti iiſdem ſuppoſitis, ſi, ADC, duplicetur, vt fiat circa, CD, communem baſim tanquam circa diametrum figura ex duabus ſemiparabolis, ADC, compoſita: & vt, AE, cum, EH, ad, HE, ita ſit, DK, ad, KC. Dico, K, eſſe centrum grauitatis dictæ figuræ.

Diuidatur, AE, bifariam in, L, quod erit centrum grauitatis parallelogrammi in baſi, FD, trilineo, AFD, circumſcripti; eruntq; pariter, H, L, centra æquilibrij, H, trilinei, AED, &, L, parallelogrammi, CE. Fiat vt, ACD, ad, AED, ita, HL, ad, LI, eritq; I, centrum æquilibrij ſemiparabolæ, ADC. Quoniam verò vt, CE, ad, AED, ita eſt, AH, ad, HE, ſeù, EL, LH, ad, HE, vel dupla, LH, cum, HE, ad, HE; erit diuidendo, vt, ACD, ad, AED, vel vt, HL, ad, LI, ſeù dupla, HL, ad duplam, LI, ita dupla, HL, ad, HE; vnde, HE, erit dupla, LI. Igitur, LE, ſuperabit, HI, dimidio, HE, ſeù ipſa, IL, ſed, LE, vel, AL, ſuperat, AI, eadem, IL, ergo, AI, IH, ſunt æquales. Et quia, AE, ad, EH, eſt vt dimidia, AL, ad dimidiam, LI, per conuerſionem rationis erit, EA, ad, AH, vt, AL, vel, EL, ad, AI. Et quia vt, AH, ad, HE, ita eſt, CE, ad, AED, hoc eſt, HI, ad, IL, conuertendo, EH, ad, HA, erit vt, LI, ad, IH, hoc eſt ad, IA, quia, HI, IA, oſtenſæ ſunt æquales. Igitur cum, EA, ad, AH, ſit vt, EL, ad, IA, &, EH, ad, HA, vt,



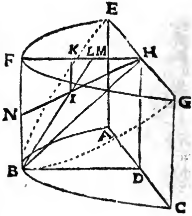
6. Prop. primi Aequæp. Arch.

Prop. 6. primi Aequep. Arch.

LI, ad, IA, colligendo antecedentia, erit vt, AEH, ad, HA, ita, EI, ad, IA. Sed vt, AEH, ad, HA, ita eſt, DK, ad, KC. Ergo, AE, CD, ſimiliter ſectæ ſunt in, I, K. Eſt autem, I, centrum æquilibrij ſemiparabolæ, ACD. Ergo, K, quod eſt in diametro duplicatæ figuræ, erit eiuſdem centrum grauitatis.

PROPOSITIO XXI.

Si cylindricus vniformiter grauis, EFCBA, in oppoſitis baſibus, ABC, EFG, conſtitutus, quæ ſingulæ ſint parallelogrammum, vel vna quæcunq; ex ſæpè dictis infinitis parabolis, ſeu trilineis, circa diametros, BD, FH, & in baſibus, AC, EG, exiſtentibus; plano per verticem vnius dictarum oppoſitarum baſium, & per baſim alterius tranſeunte, vt per, B, EG, ſecetur: ſit autem, L, centrum grauitatis baſis, EFG, & ſubinde centrum æquilibrij cylindrici, EFGCBA, & fiat vt, FL, ad duplam, LH, ita, FK, ad, KH; & vt, FH, ad, HL, ita, FM, ad, MH. Erunt, K, M, centra æquilibrij truncorum; K, quidem eius, quod tribus ſuperficiebus, EFG, EBG, EFGBE, vel quatuor, &, M, reli-



qui,

qui, quod quinque, EBG, ABC, EACG, EBA, GBC, comprehenditur.

DVcantur, BL, &, HN, quæ bifariam ſecet ipſam, BF, in, N, ijs concurrentibus in, I, iungaturq; IK. Quoniã ergo in duas rectas, HF, BF, ab earum terminis, H, B, reflectuntur duæ rectæ, HN, BL, erit per oſtenſa à Ptolemæo Lib. 1. Almageſti Cap. 12. proportio ipſius, HL, ad, LF, compoſita ex proportione, HI, ad, IN, &, NB, ad, BF. At ſi inter, HL, LF, de foris ſumamus duplam, HL, eadem ratio ipſius, HL, ad, LF, erit compoſita ex rationibus, HL, ad duplam, HL, & duplæ, HL, ad, LF. Ergo duæ rationes, HI, ad, IN, &, NB, ad, BF, æquantur duabus rationibus, nempè ipſius, HL, ad duplam, HL, & duplæ, HL, ad, LF. Sed ratio ipſius, HL, ad duplam, HL, eadem eſt rationi ipſius, NB, ad, BF, cum vtraq; ſit ſubdupla. Ergo ratio duplæ, HL, ad, LF, eadem eſt rationi, HI, ad, IN. Quia verò vt, FL, ad duplam, LH, ita eſt ex conſtructione, FK, ad, KH, erit conuertendo vt dupla, HL, ad, LF, hoc eſt per oſtenſa, vt, HI, ad, IN, ita, HK, ad, KF. Erit ergo, IK, parallela, FB. Quoniam verò, I, eſt centrum grauitatis trunci, EFGB, quia, HN, tranſit per centra grauitatis omnium parallelogrammorum, quæ fiunt à ſecantibus planis ipſi, EC, parallelis; &, BL, tranſit per centra grauitatis omnium parabolarum, vel trilineorum in trunco, EFGB, conceptorum, ac ipſi baſi, EFG, æquidiſtantium: ideò erit, K, eiuſdem trunci centrum æquilibrij.

Def. 11. primi Geo. Ind.

2. Sexti Elem.

8. huius.

Cor. 2. Prop. 19. huius.

Rurſus quia vt truncus inferior, EABCG, ad ſuperiorem, EFGB, ita eſt, FL, ad, LH, & vt, FL, ad duplam, LH, ita ex conſtructione eſt, FK, ad, KH: ideò, vt, FL, ad, LH, ſeù vt truncus inferior ad ſuperiorem, ita erit, FK, ad dimidiam, KH. Et componendo vt, FH, ad, HL, ſeù ex conſtructione, vt, FM, ad, MH, ita erit, FK, cum dimidia, KH, ad dimidiam, KH: & iterum componendo, vt, FK, cum duobus dimidijs, KH, ſeù cum, KH, hoc eſt vt tota, FH, ad dimidiam, KH, ita erit eadem, FH, ad, HM. Ergo, HM, erit dimidia, KH. Cum verò oſtenſum ſit, FK, ad dimidiam, KH, eſſe vt, FL, ad, LH: erit, FK, ad,

Corol. Prop. 17. iuxta 2. demon.

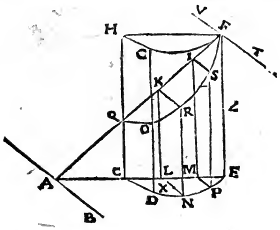
MH,

MH, vt tota, FL, ad totam, LH. Vnde reliqua, KL, ad reliquam, LM, erit vt tota, FL, ad totam, LH, ſcilicet vt truncus inferior ad ſuperiorem. Cum ergo, L, ſit centrum æquilibrij totius cylindrici, & ,K, trunci ſuperioris, erit, M, centrum æquilibrij trunci inferioris. Licet autem figura exhibeat parabolam, idem tamen currit in parallelogrammo, & quocunque trilineo, quia, BL, HN, ſunt ſemper axes grauitatis in huiuſmodi truncis, talibus cylindricorum ſuppoſitis baſibus.

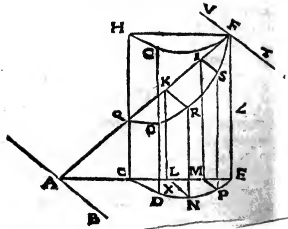
PROPOSITIO XXII.

Cuilibet figuræ planæ circa diametrum, ac in prima difformitatis ſpecie difformiter grauis, iuxta limitem rectam lineam ipſam in vertice tangentem, vel eidem tangenti parallelam, extra figuram vbicunque conſtitutam, eſt proportionaliter analogum in grauitate ſegmentum inferius cylindrici in baſi propoſita figura exiſtentis, altitudine quacunq; & vniformiter grauis; quod ſit ducto plano indefinito per punctum, in quo diameter, producta ſi opus ſit, incidit limiti, & per rectam tangẽtem ſuperiorem cylindrici baſim in extremitate diametri à limite remotiorem.

SIt figura plana quęcunq; circa diametrum, CE, cuius tantum dimidiam, CDE, exhibemus, in prima difformitatis ſpecie difformiter grauis iuxta limitem rectam lineam, quæ figuram tangat in, C, ſeu eidem tangenti æquidiſtet, vt, AB, extra figuram, cui incidat producta, EC, in, A. Inſuper in baſi, CDE, intelligatur conſtitui cylindricum, HGFEDC, vniformiter grauem, cuius, FE, ſit latus. Erit ergo, HFEC, parallelogrammum, quia, CE, eſt recta linea. Deniq; per, A, & rectam, VT, tangentem figuram, HGF, (ſimilem, æqualem, & ſimiliter poſitam ipſi, CDE,) æqui-



æquidiſtantem limiti, AB, & ab eo remotiorem, extendatur indefinitè planum, quod in plano parallelogrammi, HE, faciat rectam, AQF, & in ſolido gignat figuram, QOF, per quam cylindricus, HED, ſecabitur in duo fruſta, vnum inferius, QOFEDC, alterum ſuperius, HGFOQ, quæ trunci appellati ſunt. Dico ergo figuram, CDE, eſſe proportionaliter analogam in grauitate inferiori trunco, QOFEDC. Ducantur enim intra cylindricum, HED, quotcunq; plana æquidiſtantia tranſeunti per, VT, FE, & ſubinde & limiti, AB, & inter ſe parallela, ac efficientia in trunco, QOFEDC, figuras, ISPM, KRNL, quæ erunt parallelogramma æquiangula, quia, PM, SI, æquidiſtant ipſi, VT, & 16. Vnd. ideò ſunt inter ſe parallelæ. Similiter, SP, IM, ſunt eidem, Elem. FE, parallelæ, & ideò etiam inter ſe erunt parallelæ; quapropter, SM, erit parallelogrammum. Eodem modo con- 10 Vnd. ſtabit, KL, eſſe parallelogrammum, & prædicto æquian- Elem. gulum. His præmiſſis, quoniam grauitas rectæ, MP, ad grauitatem rectæ, LN, habet rationem compoſitam ex ratione grauitatis, MP, ad grauitatem rectæ eidem, MP, æqualis ſumptæ in, LN, quæ ſit, LX, ideſt ex ratione, MA, Def. 9. ad, AL, & ex ratione grauitatis, LX, ad grauitatem, LN, ideſt



1. huius. ideſt ex ratione, LX, ſeù, MP, ad, LN, quia, LN, ſupponitur in ſeipſa vniformiter grauis. Duæ autem rationes, MA, ad, AL, ſiuè (ob ſimilitudinem triangulorum, IAM, KAL,) ipſius, IM, ad, KL, &, MP, ad, LN, componunt
23. Sexti Elem. 1. huius. rationem parallelogrammi, SM, ad ſibi parallelogrammum æquiangulum, RL, & ſubinde grauitatis, SM, ad grauitatem, RL, nam truncus, QOFEDC, ſupponitur vniformiter grauis. Ergo grauitas, MP, ad grauitatem, LN, eſt vt grauitas, SM, ad grauitatem, RL, & ſic in cæteris. Et proindè figura, CDE, difformiter grauis, & trũcus, QOFEDC, vniſ. grauis ſunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate.

Caſum prætermiſimus quando limes tranſit per verticem, C, cum ex præallato facile intelligi poſſit, tunc enim planum ſecans ducitur per, C, &, VT, ac figura, CDE, quæ tunc ſupponitur difformiter grauis iuxta dictum limitem, oſtendetur eodem modo ipſi facto trunco, CDEF, eſſe proportionaliter analoga in grauitate.

Quod verò probatum eſt de expoſita ſemifigura, CDE, idem eodem modo oſtendetur de reliqua ſemifigura, quæ ſubintelligitur eſſe ad aliam partem axis, CE, nempè eam

eſſe

eſſe proportionaliter analogam in grauitate ſemicylindrici trunco, qui erit portio integri cylindrici ſuper baſim integrã figuram conſtituti. Ex quo patebit integram figuram circa diametrum, CE, eſſe proportionaliter analogam in grauitate trunco eiuſdem inferiori vniformiter graui, reſecto eodem plano per, AF, VT, tranſeunte.

COROLLARIVM.

Colligitur ex demonſtratis centrum grauitatis planæ figuræ propoſitæ, & ſui trunci, æqualiter abeſſe à vertice, C, ſeu à limite, A. Vnde ſi trunci habeatur centrum grauitatis, innoteſcet quoque centrum grauitatis propoſitæ planæ figuræ, illud enim erit quoque in diametris figuræ. E contra ſi detur centrũ grauitatis planæ figuræ, notum euadet centrum grauitatis ſui trunci; erit enim quoque in recta, AZ, (ſi duceretur,) biſſecãte rectam, FE, quia in ea reperiuntur centra grauitatis parallelogrammorum, quorum dimidia ſunt, SM, RL, & reliquorum huiuſmodi quorumcumque, eadem enim, AZ, biſſecaret eorum diametros, KL, IM, &c. cum æquidiſtent ipſi, FE. Ergo notum erit centrum grauitatis dicti trunci. 9. huius. 8. huius.

Porrò his præmiſſis nunc iterum accedemus ad inueſtiganda per hanc rationem inuenta ſuperius centra planarũ figurarum, & poſtmodum alia, quæ ſuperſunt in inſignioribus planis, & ſolidis figuris plura breuitatis cauſa, reſecantes, ac in aliud commodius tempus differentes.

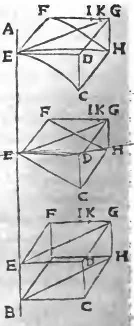
PROPOSITIO XXIII.

Si parallelogrammum, triangulum, prædictaq; trilinea exponantur, quæ ſint in prima ſpecie difformiter grauia, iuxta limitem rectam lineam eorum baſibus parallelam per verticem ductam: centrum grauitatis eorundem ita ſecabit diametrum, vt pars ad verticem ſit ad reliquam in parallelogrammo, vt 2. ad 1. in triangulo, vt 3. ad 1.

Digitized by Google

in trilineo quadratico, vt 4. ad 1. in cubico vt 5. ad 1. & ſic deinceps antecedente ſemper vnitate aucto, & retenta pro conſequente ipſamet vnitate.

Sint parallelogrammum, triangulum, & trilineum quadraticum, quorum tamen medietates tantum exhibemus, EDC, circa diametrum, ED, eaque in prima ſpecie difformiter grauia iuxta limitem rectam, AB, eorum baſibus, CD, parallelam per verticem, E, ductam. Dico centrum grauitatis eorundem ſecare diametrum, ED, vt propoſitum eſt. Sint enim in ipſis conſtituti cylindrici quicunque, FCD, vniformiter graues, quorum oppoſitæ baſes, FGH, tranſeatq; planũ per, E, &, GH, ſecans cylindricũ in duos truncos, EGHCD, inferiorem, &, EFGH, ſuperiorem. Igitur per Cor. ant. æqualiter diſtabunt à limite, AB, ſeù vertice, E, centrum grauitatis duplæ figuræ, EDC, & dupli dicti trunci inferioris, quod ſic obtinebitur.



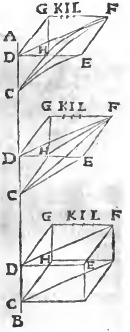
Quoniam ex Cor. pr. Prop. 19. nota ſunt centra grauitatis figurarum, EDC, duplicatarum, tãquam vniformiter grauiũ: ſiquidem in parallelogrammo centrum grauitatis ſecat diametrum, ED, per æqualia, in triangulo pars ad verticem eſt reliquæ dupla, in trilineo quadratico tripla, &c. ideò ſi in parallelogrammo biſſecetur, FG, in, I, in triangulo verò fiat, FI, ad, IG, vt 2. ad 1. in trilineo, vt 3. ad 1. erunt puncta, I, centra æquilibrij duplicatorum cylindricorum, FED. At per Prop. ant. ſi fiat vt, FG, ad, GI, ita, FK, ad, KG, erit, K, centrum æquilibrij dupli trũci, EGHCD, & ſubinde figu-

ræ,

ræ, FGH, vel, EDC, duplicatæ. Eſt verò illius centrũ grauitatis in diametro, ED. Ergo centrum grauitatis parallelogrammi dupli, E C, ita ſecat eius diametrum vt pars ad verticem ſit ad reliquam ſicut 2. ad 1. in triangulo vt 3. ad 1. in trilineo quadratico vt 4. ad 1. & ſic in cubico vt 5. ad 1. &c. Quod oſtendendum proponebatur. 8. huius.

PROPOSITIO XXIV.

In ijſdem figuris Prop. ant. ſed in prima ſpecie iuxta limitẽ baſim difformiter grauibus centrum grauitatis ita ſecat diametrum, vt pars ad verticem ſit ad reliquam, in parallelogrammo ſicuti 1. ad 2. in triangulo, vt 2. ad 2. in trilineo quadratico, vt 3. ad 2. in cubico, vt 4. ad 2. & ſic deinceps antecedente ſemper aucto vnitate, & retento binario pro conſequente.



SInt expoſitæ eędem figuræ, ſed baſibus, DC, limiti, AB, applicatæ, iuxta quam, AB, ſint in prima ſpecie difformiter graues Dico centrum grauitatis eorundem ſecare diametrum, E D, vt propoſitum eſt. Sint.n. rurſus in ijſdem conſtituti cylindrici, FC, vniformiter graues, qui ſecentur planis per baſes, D C, & per, F, ductis, in truncum inferiorem, FDCE, & ſuperiorem; FGHCD. Igitur per Cor. Prop. 22. æqualiter diſtabunt à limitibus, D C, centrum grauitatis

 duplæ

Cor. 1. 19. huius. duplæ figuræ, EDC, & dupli dicti trunci inferioris, quod ſic obtinebitur. Iam conſtat centrum grauitatis earũdem figurarum tanquam vniformiter grauium, & ſubinde conſtat punctum, I, veluti in Prop. ant. centrum æquilibrij dupli cylindrici, FC, ſcilicet in parallelogrammo eſt, FI, ad, IG, vt 1. ad 1. in triangulo vt 2. ad 1. in trilineo quadratico vt 3. ad 1. &c. At per Prop. 21. ſuperiorem ſi fiat vt, FI, ad duplam, IG, ita, FL, ad, LG, erit, L, centrum æquilibrij dupli trunci, FDCE, inferioris, & ſubinde figuræ, FGH, vel, EDC, duplicatæ. Eſt verò etiam in diametro, DE. Ergo centrum grauitatis parallelogrammi dupli, CE, ita ſecat eius diametrum vt pars ad verticem, E, ſit ad reliquã vt 1. ad 2. in triangulo vt 2. ad 2 in trilineo quadratico vt 3. ad 2. in cubico vt 4. ad 2. &c. Quod erat oſtendendum.

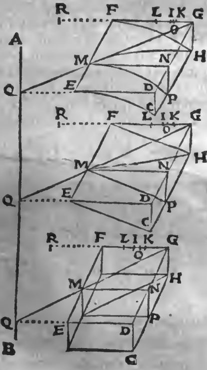
COROLLARIVM.

Ex hac, & ant. Prop. patent quoque centra æquilibrij truncorum in dictis cylindricis conſtitutorũ, quæ ſunt eadem puncta, K, L: nempe, K, trunci maioris dupli, FHCDG, &, L, trunci minoris dupli, FECD.

PROPOSITIO XXV.

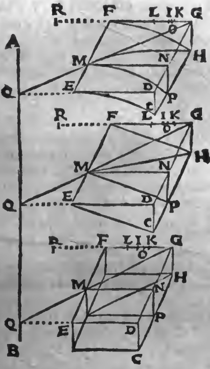
In iiſdem figuris, ſed in prima ſpecie difformiter grauibus iuxta limitem rectam vltra verticem baſi parallelam; centrum grauitatis diuidit in parallelogrammo ſextam partem diametri, ordine tertiam à baſi, ita vt pars verſus baſim ſit ad reliquam, vt dupla limitaris (ſic liceat appellare reliquam diametri productæ vſq; ad limitem) ad diametrum. In triangulo ſecat duodecimam partem diametri, ordine quartam à baſi ita vt pars ad baſim ſit ad reliquam, ſicuti ſexquialtera limitaris ad diametrũ. In trilineo quadratico diuidit vigeſimam partem ordine quin-

quintam, ita vt pars ad baſim ſit ad reliquam, ſicuti ſex quitertia limitaris ad diametrum. Et ſic deinceps in reliquis trilineis ſimili ſeruato proceſſu.



Sint eędem ſemifiguræ, EDC, in prima ſpecie difformiter graues iuxta limitem rectã, A B, vltra verticẽ, E, baſi, DC, parallelam. Dico earũdem duplicatarum centrum grauitatis ita ſecare præfatas diametri partes, vt dictum eſt. Sint in iiſdem cõſtituti cylindrici vniformiter graues, FCD, & producta diametro, DE, vſque ad limitem, AB, in, Q, fiat, QE, quam voco limitarẽ: extendatur quoque in definite planũ per, AB, & oppoſitę baſis, FGH, baſim, GH, ſecans cylindricum, FC, in duos truncos, nempè ſuperiorem, FGHM, & inferiorem, GHMECD, traductoq; plano, MNP, per, M, oppoſitis baſibus ęquidiſtante, fiant cylindrici, FGHPMN, PMNDCE. Notentur quoque in diametro, FG, tria puncta, I, K, L, vt in Prop. duabus ant. effectum eſt. Erit ergo, I, centrum grauitatis figuræ, cuius dimidia, FGH, tanquam vniformiter grauis, & inſuper centrũ æquilibrij cylindrici, cuius

cuius medietas, FC. Sic &, K, erit centrum æquilibrij dupli trunci, GMPN, &, L, dupli trunci, GHMF. Inſuper ſe extendatur, GF, in, R, ita vt, FR, ſit æqualis limitari, EQ, erit, RI, ad, IG, vt trūcus, GHMECD,
15. huius. ad truncum, FGHM. Si ergo fiat vt, RI, ad, IG, ita, LI, ad, IO, erit, LI, ad, IO, vt dictus truncus inferior ad ſuperiorem. Sed, L, eſt centrum æquilibrij dupli trunci, GHFM, &, I, dupli cylindrici, FCD, ergo, O, erit centrum æquilibrij dupli trunci, GHMECD, & ſubinde centrum grauitatis duplę figuræ, FGH, difformiter grauis. Quod autem, O, cadat inter puncta, I, K, patet quia, I, eſt centrum æquilibrij dupli cylindrici, MNPCED, &, K, dupli trunci, MGHPN, vnde centrum æquilibrij totius dupli trunci, GHMECD, nempè, O, cadet inter, I, K. Rurſus quia truncus, MGHPN, ad
6.1. Aequ. Arch. truncum, GHMF, eſt vt, FI, ad, IG, & pariter, vt, LI, ad, IK, cum, L, I, K, ſint centra æquilibrij duplorum trunci, FMHG, cylindrici, FC, & trunci, MGHPN. Ideò erit vt, FI, ad, IG, ita, LI, ad, IK, vnde erit, LI, eadem pars ipſius, FI, ac, IK, ipſius, IG, & hæc omnia in omnibus hiſce figuris vera ſunt; nunc ergo eas ſingillatim examinemus incipiẽtes
Cor. 24. huius. à parallelogrammo, FGH. In eo igitur eſt, IG, medietas ipſius, FG, &, KG, tertia pars, ergo, IK, earum differentia erit ſexta pars eiuſdem, FG, & ordine tertia à baſi, GH. Quoniã ergo factum eſt vt, RI, ad, IG, ita, LI, ad, IO, erit permutando, RI, ad, IL, vt, GI, ad, IO, & antecedentium ſub tripla, hoc eſt erit $\frac{1}{3}$, RF, cum $\frac{1}{3}$, FI, ad, LI, ita $\frac{1}{3}$, IG, ad, IO. Sed, IK, eſt $\frac{1}{3}$, IG, &, LI, $\frac{1}{3}$, FI, eadem pars nempè ac, KI, ipſius, IG, per hic oſtenſa. Ergo erit $\frac{1}{3}$, RF, cum, LI, ad, LI, vt, KI, ad, IO, & diuidendo, erit $\frac{1}{3}$, RF, ad, LI, vt, KO, ad, OI. Sed vt $\frac{1}{3}$, RF, ad, LI, ita eorum ſexcupla, nempè ita $\frac{6}{3}$, ſeù dupla, RF, ad ſexcuplam ipſius, LI, ſcilicet ad diametrum, FG, eſt enim, LI, differentia inter medietatem, FI, ipſius, FG, &, FL, quæ eſt $\frac{1}{3}$, eiuſdem, FG, & ſubinde eſt, LI, ſexta pars ipſius, FG. Probauimus ergo in parallelogrãmo centrum grauitatis, O, ita ſecare, IK, ſextã partẽ ipſius, FG, & ordine tertiã à baſi, GH, vt, KO, ad, OI, ſit veluti dupla, RF, ad, FG, quod & pro dupla figura, EDC, verificatur.



In triãgulo verò, FGH, cum ſit, RI, ad, IG, vt, LI, ad, IO, erit permutando, RI, ad, LI, vt, IG, ad IO, & antecedentiũ ſubquadrupla, nempè erit $\frac{1}{4}$, RF, cum $\frac{1}{4}$, FI, nempè cũ, LI, ad, LI, ita $\frac{1}{4}$, IG, nẽpè, IK, ad, IO. Et diuidẽdo erit $\frac{1}{4}$, RF, ad, LI, vt, KO, ad, OI. At vt $\frac{1}{4}$, RF, ad, LI, ita, ſexcuplatis terminis, eſt ſexquialtera, RF, ad, FG, quia, LI, differentia inter, FL, medietatem, &, FI, $\frac{2}{3}$, FG, eſt $\frac{1}{6}$, ipſius, FG. Ergo, O, ſecat, KI, duodecimã partẽ ipſius, FG, (cum ſit differẽtia inter, IG, $\frac{1}{3}$, &, KG, $\frac{1}{4}$ ipſius, FG,) ordine quartam à baſi, GH, ita vt ſit, KO, ad, OI, ſicuti ſexquialtera, RF, ad ipſam, FG.

Sic in trilineo quadratico eſt, IK, differentia inter, IG, $\frac{1}{4}$, &, KG, $\frac{1}{5}$, ipſius, FG, $\frac{1}{20}$, & ordine quinta à baſi, oſtẽditurq; KI, ad, IO, eſſe vt $\frac{1}{5}$, RF, cum $\frac{1}{5}$, FI, hoc eſt cum, LI, ad ipſam, LI, & diuidendo probatur, KO, ad, OI, eſſe vt $\frac{1}{5}$, RF, ad, LI, ſeù quintuplicatis terminis, vt RF, ad, FI. Er quia, GF, eſt ſexquitertia, FI, ideò vt, RF, ad, FI, vel, KO, ad, OI, ita erit ſexquitertia ipſius, RF, ad, FG.

In Trilineo pariter cubico erit, IK, pars trigeſima, nempè differentia inter, IG, $\frac{1}{5}$ &, KG, $\frac{1}{6}$ ipſius, FG, ac ordine ſexta à baſi, GH, &, LI, $\frac{1}{6}$ ipſius, IF, & vt, KO,

ad,

ad, OI, ſic oſtendetur eſſe, RF, ad, FI, & ita ſexquiquarta ipſius, RF, ad, FG, quia, FG, eſt ſexquiquarta ipſius, FI.

In reliquis erit ordinatè, IK, ipſius, FG, pars quadrageſimaſecunda, ordine ſeptima à baſi; quinquageſimaſexta, ordine octaua, ſeptuageſimaſecunda, ordine nona, addendo ſemper in ordine vnitatem, & in partibus præcedentem exceſſum per binarium augendo. Similiter in ſubſequentibus ſubſumemus ipſius, RF, ſexquiquintam, ſexquiſextam, ſexquiſeptimam, & ſic deinceps iuxta reliquas proportionis ſuper particularis ſpecies ordinatim ſubſequentes.

SCHOLIVM.

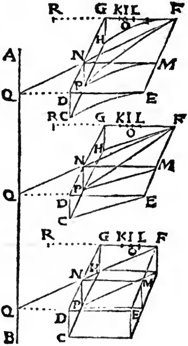
IN triangulo, EDC, ſeù, FGH, reperitur quoque hoc modo proportio; nempè, O, ita ſecat, FG, vt ſit, FO, ad, OG, ſicut quatuor limitares, R F, cum omnibus diametris, FG, ad duas limitares, R F, cum diametro, F G; quemadmodum experienti manifeſtum erit.

PROPOSITIO XXVI.

In ijſdem figuris, ſed in prima ſpecie difformiter grauibus iuxta limitem rectam baſi parallelam, & vltra ipſam ductam; centrum grauitatis diuidit in parallelogrammo ſixtam partem diametri poſt $\frac{3}{6}$ eiuſdem à baſi numeratas hoc eſt ordine quartam, ita vt pars verſus verticè ſit ad reliquam, ſicuti dupla limitaris ad diametrum. In triangulo ita ſecat $\frac{2}{12}$ diametri poſt $\frac{4}{12}$ à baſi numeratas, vt pars verſus verticem ſit ad reliquam, veluti tripla limitaris ad diametrum. In trilineo quadratico ita ſecat $\frac{3}{20}$ diametri poſt $\frac{5}{20}$ à baſi numeratas, vt pars verſus verticem ſit ad reliquam, veluti quadrupla limitaris

taris ad diametrum. Et ſic in reliquis trilineis ſimili ſeruato proceſſu.

IN iiſdem ſuperioribus figuris eadem conſtructa ſupponemus, at baſis, CD, ſit obuerſa limiti, AB, ipſi parallelo, tranſeatq; planum ſecãs per, AB, & verticem, F. Quoad parallelogrãmum ergo demõſtratio non erit alia à ſuperiori.



In triangulo verò ſic propoſitum oſtendemus. Erit itaque, RI, ad, IF, vt truncus inferior ad ſuperiorem, quod ſi fiat vt hic ad illum, ita, KI, ad, IO, oſtẽdetur, O, vt in Prop. ant. eſſe centrum æquilibrij tã dupli trunci, FEC PND, quam duplæ figuræ, GFH, illudq; cadere inter, I, L, puncta. Porrò cum, KI, in eadem probata ſit eſſe in parallelogrammo $\frac{1}{6}$ ipſius, GF, in triangulo $\frac{1}{12}$ in trilineo q. $\frac{1}{20}$, in cubico $\frac{1}{30}$, in quadratoq; $\frac{1}{42}$, &c. ſitq; vt, GI, ad, IF, ita, KI, ad, IL, quia illę ſunt vt trũci, FMPN, FGNPH, &, GI, æqualis ipſi, IF, in parallelogrammo, in triã gulo verò ſit, GI, $\frac{1}{2}$ ipſius, IF, in trilineo q. $\frac{2}{3}$, incubico $\frac{3}{4}$, in q. $\frac{4}{5}$ &c. eiuſdem, IF, patet in parallelogrãmmo, IL, eſſe $\frac{1}{6}$, &, GI, $\frac{1}{2}$ à baſi, GH, numeratas. Sic in triangulo erit, IL, $\frac{2}{12}$ poſt, GI, $\frac{4}{12}$ ipſius, GF, numeratas à baſi, GH. In trilineo q. erit, IL, tripla ipſius, IK, $\frac{1}{20}$ GF,

18. huius.

17. huius.

 poſt,

Digitized by Google

poſt,GI,$\frac{5}{20}$ eiuſdem,GF. In cubico erit,IL,quadrupla,KI, $\frac{4}{30}$,GF,poſt $\frac{6}{30}$ à baſi, GH, numeratas,& ſic deinceps in reliquis trilineis. Nunc oſtendendum in triangulo remanet, LO, ad, OI, eſſe vt tripla, RG, ad, GF, quod ſic probatur. Cum enim,RI,ad, IF,ſit vt, KI,ad,IO,permutando, erit,RI, ad, IK, vt, FI, ad,IO. Eſt autem, IL, $\frac{1}{4}$ ipſius,IF, ſicuti,KI, eſt $\frac{1}{4}$ ipſius,IG. Ergo erit vt $\frac{1}{4}$,RI, hoc eſt vt $\frac{1}{4}$,RG,cum,KI,ad, KI,ita,LI,ad,IO, & diuidendo vt $\frac{1}{4}$, RG, ad,KI, ita erit, LO, ad,OI. Sed vt $\frac{1}{4}$, RG, ad, KI, ita eorum quadrupla, ſcilicet ita, RG, ad, GI, & vt, RG, ad,GI, ita tripla, RG, ad, GF, quia, GF, eſt tripla, GI. Ergo, LO, ad,OI, eſt vt tripla, RG, ad, GF.

In trilineo q.'eſt, IL, $\frac{1}{5}$,IF,probaturque,LI,ad,IO, eſſe vt $\frac{1}{5}$,RG,cum,KI,ad,KI, & diuidendo,LO,ad,OI, vt $\frac{1}{5}$, RG,ad, KI,vel vt, RG, ad, GI,ſeù denique vt quadrupla, RG, ad, GF,quia,GF,eſt quadrupla, GI.

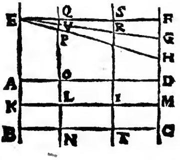
In cubico pariter eſt, LI, $\frac{1}{6}$, IF, probaturque, LI, ad, IO, eſſe vt $\frac{1}{6}$, RG,cum, KI,ad, KI; & diuidendo, LO, ad, OI, vt $\frac{1}{6}$, RG,ad, KI, vel vt,RG, ad, GI, & ſubinde vt quintupla, RG,ad,GF, quia, GF, eſt quintupla, GI. Hac arte in reliquis trilineis ſimilis proportionis progreſſio colligetur. Quod, &c.

PROPOSITIO XXVII.

Cuiuſcunque parallelogrammi, vel trianguli, in quacunque ſpecie difformiter grauis, iuxta limitem rectam baſi parallelam per verticem tranſeuntem, centrum grauitatis exhibere.

EXponatur denuo Schema Propoſitionis xi. huius, in quo limes ſit,AB, æquidiſtans baſibus, CD, parallelogrâmi,&, HF, trianguli, cæteris, vt ibidem conſtructis. Quod ergo, KI, ſit dupla, IM, dum, AC, ſupponitur in prima ſpecie difformiter graue, probabitur præciſè vt ibidem. At ſi concipiatur, AC, tanquam difför-

difformiter graue in ſecũda ſpecie, tunc ſic diſcurremus. Grauitas, CD, ad grauitatem, NO, erit vt q.MK, ad q. KL, hoc eſt (ſi circa diametrum, KM, in baſi, DC, ſupponatur trilineũ quadraticũ vniformiter graue) vt in eodem ad, KM, applicatæ in punctis, M, L, & ſubinde vt ipſarum applicatarum grauitates. Ergo, AC, erit proportionaliter analogum in grauitate præfato trilineo quadratico. Sed eius centrum grauitatis vt, I, facit, KI, triplam, ipſius, IM. Ergo, I, erit quoque centrũ grauitatis parallelogrammi, AC, difformiter grauis in ſecunda ſpecie, faciens, KI, triplam, IM. Sic oſtendemus in tertia ſpecie, quarta, quinta, &c. Fieri, KI, quadruplam, quintuplam, ſextuplam, &c. ipſius, IM. Def. 13. Cor. 1. 19. huius.



Pari ratione ſi ſupponamus triangulum, EFH, in prima ſpecie diffor. graue, oſtendemus more ſolito grauitatem, FH, ad, grauitatem, QP, habere rationem compoſitam ex ratione, FE, ad, EQ, & ex ratione, HF, ad, PQ, nempè grau. FH, ad grau. QP, eſſe vt q. FE, ad q. EQ, hoc eſt vt applicatę in trilineo quadratico per puncta, F, Q, & vt earum grauitates, ſi ipſum intelligamus eſſe vnifor. graue. Ergo æquè aberunt à vertice, E, eorum cẽtra grauitatis, quia erunt proportionaliter analoga in grauitate. Eſt autem centrum grauitatis trianguli, EFH, pariter in diametro, EG, ergo erit in, R, vbi fit, ER, tripla, RG. 9. huius. Cor. 1. 19 huius.

Quod ſi ſuppoſuerimus triangulum, EFH, diff. graue in ſecunda ſpecie, oſtẽdemus ipſum eſſe proportionaliter analogum in grauitate trilineo cubico, & ſubinde, ER, eſſe quadruplam, RG. Sic probabimus in tertia ſpecie eſſe quintuplam, in quarta ſextuplam, &c.

COROLLARIVM.

Hic poteſt vniuerſalius colligi de cylindricis circa axim, KM, diffor. grauibus, nempè in quacunque ſpecie, limite, EB quod in dicta Prop in prima ſpecie tantum inferebatur. Immo ſi in baſi, AC, fuerint quoque cylindrici diffor graues in quacunque ſpecie, iuxta limitem, EB, ſeu planum ipſorum tangens, ac tranſiens per, EB, pateſiet hinc quoque colligi eorum centra grauitatis; ſunt enim in eadem diſtantia à limite tam
5. huius. *cylindricorum, quam parallelogrammi, AC, centra grauitatis, & in eorum diametris. Simili modo pro conicis per viam triãguli, EFH, in quacunque ſpecie diff. grauibus eadem centra colligemus: vt etiam haberi poterunt in parabolicis cylindricis diffor. grauibus, cum, vt ſit in ſequentibus fuerint parabolarum inquiſita centra grauitatis; ſicuti & in omnibus cylindricis in baſibus figuris planis, quorum ſint nota centra grauitatis, conſtitutis.*

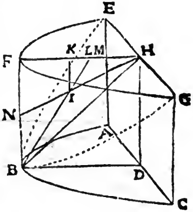
SCHOLIVM.

Ex his facilè Lector intelliget cuiuſcunque trilinei in quacunque ſpecie diffor. grauis iuxta limitem per verticem tranſeuntem centra grauitatis haberi poſſe. Qua ipſi meditanda relinquimus, ſicut etiam eorum centra, cum fuerint vtcumque diff. grauia iuxta limitem per baſim tranſeuntem, vel eidem æquidiſtanter ductum, ſed extra figuram, vt ea, quæ ſpectant ad trapezia, & alia quamplurima ſcitu digna: anguſtia enim temporis laborãs & ferè ſemper ægritudine vexatus cogor hæc in aliud tempus differre contemplanda, & nunc ſtudioſis tantum innuere. Quapropter in quibuſdam adhuc figuris tam planis, quam ſolidis ſolum centra grauitatis meditabimus cum fuerint diffor. grauia iuxta limitem per verticem trãſeuntem, ac baſi parallelum. Nunc ergò à parallelogrammis, & triangulis tranſibimus ad centra grauitatis rimanda in parabolis diffor. grauibus, licet tantum in prima ſpecie difformitatis.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

In parabola lineari, quadratica, cubica, &c. in prima ſpecie tantum diffor. graui iuxta limitem rectam baſi parallelam in vertice tangentem, centra grauitatis palam facere.



EXponatur hic denuò Schema Propoſ. 21. huius, in quo ſupponemus cylindricum, EGCBA, vnif. grauem, ſed parabolam, ABC, vel, EFG, in prima ſpecie diffor. grauem, limite per verticem, B, vel, F, tranſeunte. Iam conſtant cētra grauitatis parabolarū linearis, quadraticæ, cubicæ, &c. ita ſecare diametrum vt pars verſus verticem ſit ad reliquā in lineari vt 2. ad 1. in q. vt 3. ad 2. in C, vt 4. ad 3. &c. progreſſionemq; eſſe vt in his numeris. Ex Cor. 1. Prop. 19. huius.

2	3	4	5	6	&c.
1	2	3	4	5	

Inſuper manifeſtum eſt quoq; centrum grauitatis trunci inferioris, BEGCA, vnif. grauis, & parabolæ, ABC, diffor. grauis æqualiter abeſſe à vertice, B. Sed illius trunci habetur centrum grauitatis, vel æquilibrij, M, ſi fiat, vt, FH, ad, HI, ita, FM, ad, MH. Ergo habebitur quoque centrum gr. parabolæ, EFG, vel, ABC. Vnde cum in parabola lineari ſit, FH, ad, HI, vt 3. ad 1. erit, FM, ad, MH, vt 3. ad 1. & in quadratica, vt 5. ad 2. in cubica, vt 7. ad 3. &c. ita vt progreſſio ſtet vt in his numeris. Cor. 22. huius. 21. huius. Cor. 1. 19. huius.

Digitized by Google

$\frac{3}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{3}\ \frac{9}{4}\ \frac{11}{5}$ Quod &c.

COROLLARIVM.

SI eaſdem parabolas ſupponeremus diff. graues in prima ſpecie iuxta limitem baſim: cum habeatur centrum gr. trunci ſuperioris, EFGB, vnif. grauis, & ſubinde parabolæ, EFG, in prima ſpecie diff. grauis, limite, EG, (quia ſi inuerteretur cylindricus, baſis, & truncus fierent inferiores) faciendo vt, FL, ad duplam, LH, ita, FK, ad, KH. Manifeſtum eſt parabolæ, 21. huius. *EFG, diffor. grauis in prima ſpecie iuxta limitem, EG, centrum gr. ſecare, FH, (vt in, K,) ita vt in parabola lineari, FK, ſit ad, KH, vt 2. ad 2. in q. vt 3. ad 4. in c. vt 4. ad 6. &c. vnde ſic ſe habebit progreſſio.*

$\frac{2}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{8}\ \frac{6}{10}$ *&c.*

SCHOLIVM.

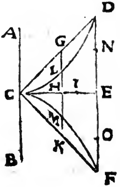
COngrueret vt earundem parabolarum necnon circuli in omni ſpecie difformiter grauium, iuxta limitem tangentem in vertice, vel illi parallelam reperirentur centra grauitatis, vt & portionum eorundem. Hæc obtineri poſſunt ſi in ipſis, vel eorum portionibus, ſupponerentur conſtituti cylindrici, quorum diagonaliter reſectorum habeantur centra grauitatis inferiorum truncorum, vt in prima ſpecie diffor. docet nos Prop. 22. huius, cum eius Corollario. Sed quia illa nunc rimari non vacat, ideò ſtudioſis hæc relinquemus inueſtiganda, à planiſque ad ſolida gradum facientes, primò Coni centrum grauitatis inquiremus.

PRO-

PROPOSITIO. XXIX.

Si conus quicunque ſupponatur primo vnif. deinde diffor. grauis, iuxta limitem planum per verticem tranſiens, baſique parallelum, nempè ordinatim in ſpecie 1.2.3.4. &c. Centrum grauitatis ita ſecabit illius axim, vt pars ad verticem ſit reliquæ tripla in vnif. graui, quadrupla in primo difformi, quintupla in ſecundo, ſextupla in tertio, &c. & ſic deinceps ſimili ſeruato proceſſu.

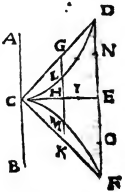
SIt conus, DEF, in baſi circulo, DF, axi, CE, primò vnif. grauis, eiuſque centrum grauitatis, I. Dico, CI, eſſe triplam ipſius, IE. Intelligamus quoque trilineum quadraticum vnif. CDF, graue, illudq; cum cono ſecari quocumque plano circulo, DF, æquidiſtãte, ac faciente in trilineo rectam, LM, & in cono circulum, GK, æquidiſtantia ipſi, DF. Grauitas ergo circuli, DF, ad grauitatem circuli, GK, erit vt circulus, DF, ad circulum, GK, hoc eſt vt quadratum, DF, ad quadratum, GK, vel vt quadratum, EC, ad quadratum, CH, nempè vt recta, DF, ad rectam, LM, & ſubinde vt grauitas rectæ, DF, ad grauitatem rectæ, LM.



Ergo trilineum, DCF, & conus, DCF, erunt proportio-
naliter analoga in grauitate, eorumque centra grauitatis 9. huius.
æqualiter aberunt à vertice, C, & ſunt in, CE. In trilineo 8. huius.
autem, DCF, illius centrum grauitatis ita ſecat, CE, vt pars Cor. 1.
ad verticem, C, ſit reliquæ tripla. Ergo & in cono, DCF. 19. huius.
&c.

Sup:

Supponamus nunc conum, DCF, diff. grauem in prima ſpecie iuxta limitem, AB, æquidiſtãtem circulo, DF. Dico, ſi, I, ſupponatur illius centrũ grauitatis, eſſe, CI, quadruplã, IE. Sit enim modò, CDF, trilineum cubicum vniſ. graue & vtraque ſecta plano per, H, baſi, DF, æquidiſtante, faciẽteq; in trilineo rectam, LM, & in cono circulum, GK. Si ergo circa, E, centrum in plano circuli, DF, aſſumatur circulus, NO, æqualis circulo, GK, illeq; medius intelligatur inter circulos, DF, GK, erit proportio



Def. 12. 2. Geo. Indiui. grauitatis circuli, DF, ad grauitatem circuli, GK, compoſita ex proportione gr. circuli, DF, ad gr. circuli, NO, ſcilicet ex proportione circuli, DF, ad

1. huius. circulum, NO, vel, GK, hoc eſt quadrati, DF, ad quadratum, GK, vel quadrati, EC, ad quadratum, CH; & ex proportione gr. circuli, NO, ad gr. circuli, GK, hoc eſt ex proportione, EC,

Def. 9. ad, CH. Duæ rationes verò quadrati, EC, ad q. CH, &, EC, ad, CH, faciunt rationem cubi, EC, ad cubum, CH. Ergo gr. circuli, D F, ad gr. circuli, GK, erit vt cubus, EC, ad cubum, CH, nempè vt recta, DF,

13. Ex. 4. ad rectam, LM, & vt grauitas rectæ, DF, ad gr. rectæ, L M, Sunt ergo trilineum cubicum, DCF, vniſ. graue, & conus, DCF, in prima ſpecie diff. graues, proportionaliter analo-

9. huius. 18. 19. huius. ga in grauitate. Ergo, CI, erit quadrupla, IE, veluti ſe habet in trilineo cubico.

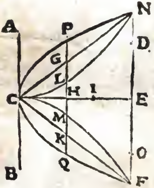
Eadem ratione vlterius procedentes oſtendemus, CI, eſſe quintuplam, IE, in cono, DCF, diff. graui in ſecunda ſpecie, quia ſit propor. analogus in grauitate trilineo qq. in quo

Cor. 1. 19. huius. ſic diuiditur, CE, ab eius centro grauitatis. Similiter probabimus, CI, eſſe ſextuplam, IE, in cono, DCF, diff. graui in tertia ſpecie, quia ſit propor. analogus in grauitate trilineo qc. & ſic deinceps in reliquis rationem dictæ progreſſionis eodem modo demonſtrabimus. Quod, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Si conoides quõdcunq; parabolicum ſupponatur primò vniformiter, deinde difformiter graue iuxta limitem planum per verticem tranſiens, baſiq; parallelum, nempè ordinatim in ſpecie 1. 2. 3. 4. &c. Centrum grauitatis ita ſecabit illius axim, vt pars ad verticem ſit reliquæ dupla in vniformiter graui, tripla in primo difformi, quadrupla in ſecundo, quintupla in tertio, &c. & ſic deinceps ſimili ſeruato proceſſu.

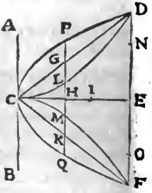


SIt conoides quodcunq; parabolicum, DCF, in baſi circulo, DF, & circa axim, CE, primò vniformiter graue, eiuſq; centrum gr. I. Dico, CI, eſſe duplam, IE. Fiat triangulum, DCF, pariter vniformiter graue, quod cum conoide ſecetur plano quocumq; ipſi, DF, æquidiſtante, ac faciente in conoide circulum, PQ, ſed in triangulo rectam, GK, quæ æquidiſtent ipſi, DF. Erit ergo grauitas circuli, DF, ad gr. circuli, PQ, vt circulus, DF, ad circulum, QP, vel vt q. DF, ad q. PQ, hoc eſt vt, EC, ad, CH, vel vt, DF, ad, GK, & ſubindè vt gr. DF, ad gr. GK. Sunt ergo hoc triangulum, & conoides proportionaliter analoga in grauitate. Erit igitur, CI, dupla, IE, vt contingit in triangulo, DCF. 1. huius. 10.1.Con.

Sit nunc conoides difformiter graue in prima ſpecie, iuxta limitem, AB, per verticem, C, ductum ipſi, DF, parallelum. Dico, ſi, I, ſit eius centrum gr. eſſe, CI, triplam, IE.

Digitized by Google

Sit enim trilineũ quadraticum, DLCMF, in quo plano per, H, ducto facta ſit, LM, parallela ipſi, DF, & ſumatur in, DF, circa, E, centrum circulus, NO, æqualis circulo, PQ. Erit ergo ratio gr. circuli, DF, ad gr. circuli, PQ, compoſita ex ratione



1. huius. gr. circuli, DF, ad gr. circuli, NO, ſc. ex ratione circuli, DF, ad circulum, NO, vel, PQ, vel q. DF, ad q. PG, hoc eſt, EC, ad, CH; & ex ratione gr. circuli, NO, ad gr. circuli, PQ, ſcilicet ex hypoteſi ex ratione, EC,

Def. 9. ad, CH. Duæ rationes verò, EC, ad, CH, faciunt ratio-

13. Exer. 4. nem q. EC, ad q. CH, vel rectæ, DF, ad rectam, LM, vel grauitatis earundem rectarum. Ergo Conoides, & triangu'um dictum erunt propor. analoga in grauitate. Quare erit, CI, tripla, IE.

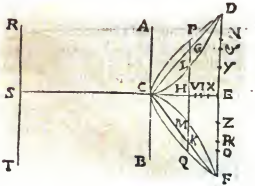
Eodem modo in conoide difformiter graui in ſecunda ſpecie, vtentes trilineo cubico, oſtendemus, CI, eſſe quadruplam, IE. Et ſic in 3. 4. 5. ſpecie, &c. procedentes vt in Prop. ant. effectum eſt, per ſubſequentia trilinea propoſitum verificari oſtendemus. Quod, &c.

PROPOSITIO XXXI.

Si conoides quodcunq; hyperbolicum ſupponatur primò vniformiter, deinde difformiter graue iuxta limitem planum per verticem tranſiens, baſiq; parallelum, nempè ordinatim in ſpecie 1. 2. 3. 4. 5. &c. Centrum grauitatis ita ſecabit illius axis partem duodecimam ordine quartam à baſi, vt pars verſus baſim ſit ad reliquam veluti ſexquialtera lateris tranſuerſi hyperbolæ, quæ

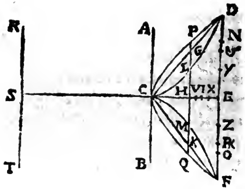
conoi-

conoides deſcripſit, ad axim conoidis, in vniſ. graui. In difformiter verò graui in prima ſpecie ita ſecabit axis vigeſimam partem ordine quintam à baſi, vt pars verſus baſim ſit ad reliquam veluti ſexquitertia eiuſdem lateris tranſuerſi ad axim conoidis. In difformiter autem graui in ſecunda ſpecie ita diuidet trigeſimam partem axis ordine ſextam à baſi, vt pars verſus baſim ſit ad reliquam veluti ſexquiquarta dicti lateris tranſuerſi ad axim conoidis. Et ſic in reliquis ſpeciebus ſimile ſeruato proceſſu, quam in Prop. 25. ſuperiori ſuimus proſecuti.



SIt conoides quodcunq; hyperbolicum, DCF, in baſi circulo, DF, & circa axim, CE, primò vniformiter graue, eiuſq; centrũ gr. I, & latus tranſuerſum hyperbolæ ipſum deſcribentis, SC, ac deniq; VX, pars duodecima axis, CE, ordine quarta à baſi, DF. Dico, XI, ad, IV, eſſe vt ſexquialtera, SC, ad, CE. Sit triangulum, DCF, in prima

Digitized by Google



ſpecie difformiter graue iuxta limitem, RT, per,S, ipſi, DF, æquidiſtanter tranſeuntem: ducto autem quocunq; plano ipſi, DF, parallelo, fiant ab eo in conoide circulus, PQ, & in triangulo, recta, GK, ſumaturq; recta, & ℞, æqualis ipſi, GK. Quoniam ergo grauitas circuli, DF, ad gr. circuli, PQ, eſt vt circulus, DF, ad circulum, PQ, vel vt quadratum, DF, ad q. PQ, hoc eſt vt rectangulum, SEC, ad rectangulum, SHC: inſuper quia grauitas rectæ, DF,
31.1.Con. ad gr. rectæ, GK, habet rationem compoſitam ex ratione gr. rectæ, DF, ad gr. rectæ, & ℞, & ex ratione gr. rectæ, & ℞, ad gr. rectæ, GK: & eſt vt gr. rectæ, DF, ad gr. rectæ, & ℞, ita, DF, ad, & ℞, vel ad, GK, ſiuè, EC, ad, CH; & grauitas rectæ, & ℞, ad grauitatem rectæ, GK, eſt ex hypotheſi vt, ES, ad, SH; duæ autem rationes, EC, ad, CH, &, ES, ad, SH, faciunt rationem rectanguli, SEC, ad rectangulum, SHC. Ideò tam gr. circuli, DF, ad grauitatem circuli, PQ, quam gr. rectæ, DF, ad gr. rectæ, GK, erunt vt rectangulum, SEC, ad rectangulum, SHC. Quapropter dictæ grauitates erunt inter ſe in eadem ratione, & conoides,

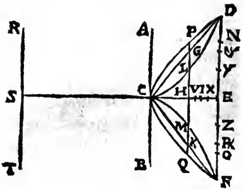
ac

Digitized by Google

ac triangulum inter ſe proportionaliter analoga in grauitate, communeque habebunt, I, centrum grauitatis. Sed in triangulo illud ſecat, VX, ita vt, XI, ad, IV, ſit vt ſexquialtera limitaris, SC, ad, CE. Ergo & in conoide, DCF, ipſum, I, ſic diuidet, VX, vt ſit, XI, ad, IV, veluti ſexquialtera lateris tranſuerſi, SC, ad axem conoidis, CE. 9. huius. 25. huius.

Sit nunc conoides, DCF, in prima ſpecie difformiter graue iuxta limitem, ACB, per, C, ipſi, DF, æquidiſtanter tranſeuntem, &, VR, pars vigeſima, CE, ordine quinta à baſi, DF, ſecta à centro gr. conoidis, I. Dico, XI, ad, IV, eſſe vt ſexquitertia, SC, ad, CE. Fiat trilineum quadraticum, DLCMF, in prima ſpecie difformiter graue iuxta limitem, RST, in quo ducto plano effecta fuerit recta, LM, parallela, DF, cui ſumatur æqualis, YZ, ſicut, & circulo, PQ, æqualis circulus, NO. Oſtendemus ergo grauitatem circuli, DF, ad grauitatem circuli, PQ, habere rationem compoſitam ex ratione gr. circuli, DF, ad grauitatem circuli, NO, hoc eſt ex ratione circuli, DF, ad circulum, NO, vel, QP, ſeù q. DF, ad q. PQ, hoc eſt rectanguli, SVC, ad rectangulum, SHC; & ex ratione gr. circuli, NO, ad gr. circuli, PQ, nempè ex hypotheſi ex ratione, EC, ad, CH, nam pro conoide eſt limes, AB,) quæ duæ rationes, nempè rectanguli, SEC, ad rectangulum, SHC, & rectæ, EC, ad, CH, componunt rationem parallelepipedi, ſub, CE, & rectangulo, SEC, ad parallelepipedum ſub, CH, & rectangulo, SHC, hoc eſt parallelepipedi ſub, SE, & quadrato, EC, ad parallelepipedum ſub, SH, & q. HC. Inſuper gr. rectæ, DF, ad gr. rectæ, LM, habet rationem compoſitam ex ratione gr. DF, ad gr. YZ, hoc eſt ex ratione, DF, ad YZ, vel ad, LM, nempè ex ratione q. EC, ad q. CH, & ex ratione gr. rectæ, YZ, ad gr. LM, ideſt ex hypoteſi ex ratione, ES, ad, SH, (nam pro trilineo eſt limes, RT,) quæ duæ rationes faciunt quoque rationem parallelepipedi ſub, SE, & q. EC, ad parallelepipedum ſub, SH, & q. HC. Ergo trilineum, DLCMF, difformiter graue limite, RT, & conoides, DCF, difformiter graue limite, AB, & vtraq; 21.1.Cor. 23. Exerc. 4.

in



9. huius. in prima ſpecie, erunt propor. analoga in grauitate, communeq; habebunt centrum grauitatis. Sed in trilineo centrum gr. quod ſit, I, ita ſecat, VX, vt ſit, XI, ad IV, veluti
25. huius. ſexquitertia, SC, ad, CE. Ergo, I, quatenus eſt centrum gr. conoidis, DCF, ita ſecat, VX, vt ſit, XI, ad, IV, veluti ſexquitertia lateris tranſuerſi, SC, ad axim, CE.

Quod ſi conoides ſupponatur difformiter graue in ſecunda ſpecie, limite, AB, vtemur trilineo cubico, CDF, in prima ſpecie difformiter graui, limite, RT, oſtendemuſq; ea eſſe propor. analoga in gr. vt ſupra factum eſt; aſſumptaq, VX, tanquam trigeſima parte, CE, ordine ſexta à baſi, DF, diuiſa ab, I, communi centro gr. probabimus vt ſupra, XI, ad, IV, eſſe vt ſexquiquartam lateris tranſuerſi, SC, ad axem, CE. Et tali methodo in reliquis ſpeciebus diffor. procedentes, eliciemus pro conoide, DCF, centra gr. prout ea pro trilineis in prima tantum ſpecie difformiter grauibus notificauimus in Prop. 25. Superiori. Quod, &c.

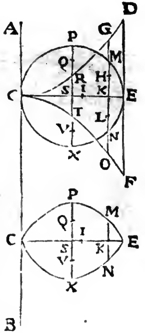
SCHOLIVM.

IVxta ſcholium Prop. 25 ſuperioris, poterit quoque oſtendi in conoide, DCF, vniſ. graui, eſſe, CI, ad, IE, vt 4. SC, cum 3. CE, ad 2. SC, cum 1. CE.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Si ſphæra, vel ſphæroides, ſupponatur primò vnif. deinde diff. grauis iuxta limitem planum ipſam in vertice tangens, nempè ordinatim in ſpecie 1. 2. 3. 4. 5. &c. Centrum grauitatis ita ſecabit eorum axim vt pars ad limitem ſit ad reliquam in vnif. grau. ſicuti 2. ad 2. in primo difformi, vt 3. ad 2. in ſecundo, vt 4. ad 2. in tertio vt 5. ad 2. & ſic deinceps aucto ſemper vnitate antecedente, & retento ipſo binario pro communi termino conſequente.



Sit ſphęra, vel ſphęroides circa axim, C E, centro, S, & ſiquidem ſupponatur vnif. grauis, manifeſtum eſt illius centrum, S, eſſe quoque centrum grauitatis eiuſdem, & partes axis vt 2. ad 2. Sit nunc in prima ſpecie diff. grauis iuxta limitem planũ, AB, tangens ipſam in vertice, C, eiuſque centrum gr. I. Dico, CI, ad, IE, eſſe vt 3. ad 2. Intelligatur. n. trilineum quadraticum in baſi, DF, ipſi, AB, parallela, & circa diametrum, C E, nempè, CDF, in prima ſpecie diff. graue, ſed iuxta limitem, D F, Inſuper ducantur intra, D F, A B, duo quæcũque plana, vt per, S, K, ipſi, AB, æquidiſtantia, & efficiẽtia in trilineo rectas, RT, GO, ipſi, DF, parallelas, ac in ſphæra, vel ſphęroide, circulos, P X,

NM.

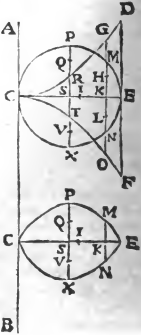
MN. Sumatur inſuper in, GO, recta, HL, ipſi, RT, æqualis, & in plano circuli, PX, circulus, QV, æqualis ipſi, MN. Igitur grauitas circuli, MN, ad gr. circuli, PX, habet rationem compoſitam ex ratione gr. circuli, MN, ad gr. circuli ſibi æqualis, QV, hoc eſt ex hypotheſi, ex ratione, KC, ad, CS, (quia pro ſphæra, vel ſphæroide eſt limes, AB,) & ex ratione gr. circuli, QV, ad gr. circuli, PX, quæ eſt eadem rationi circuli, QV, vel, MN, ad circulum, PX, ſeù q. MN, ad q. PX, vel rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC. Duæ rationes verò, KC, ad, CS, & rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC, componunt rationem parallalepipedi ſub, EK, & q. KC, ad parallaleppipedum ſub, ES, & q. SC. Ergo gr. circuli, MN, ad gr. circuli, PX, eſt vt paralleleppipedum ſub, EK, & q. KC, ad paralleleppipedum ſub, ES, & q. SC, quod ſerua.

Def. 12. 1. Geom. Indiu.

21.4. Con.

Vlterius grauitas rectæ, GO, ad grauitatem rectæ, RT, habet rationem compoſitam ex ratione gr. GO, ad gr. HL, nempè ex ratione, GO, ad, HL, vel ad illi æqualem, RT, hoc eſt ex ratione q. KC, ad q. CS, & ex ratione gr. rectæ, HL, ad gr. rectæ, RT, nempè ex hypotheſi ex ratione, EK, ad, ES, (quia pro trilineo, DCF, eſt limes, DF,) duæ rationes verò q. KC, ad q. CS, & EK, ad, ES, faciunt rationem paralleleppipedi ſub, EK, & q. KC, ad paralleleppipedum ſub, ES, & q. SC. Ergo gr. rectæ, GO, ad gr. rectæ, RT, eſt vt paralleleppipedum ſub, EK, & q. KC, ad paralleleppipedum ſub, ES, & q. SC. Sed ſic etiam probatum eſt eſſe gr. circuli, MN, ad gr. circuli, PX. Ergo trilineum, CDF, & ſphæra, vel ſphæroides, CPEX,

13. Ex. 4.



ſunt

ſunt proportionaliter analoga in grauitate, commune habebunt igitur centrum grauitatis. At in trilineo centrum gr. ita ſecat, CE, vt pars verſus verticem, C, ſit ad reliquam, vt 3. ad 2. Ergo, CI, ad, IE, erit vt 3. ad 2. 24. huius.

Quod ſi ſphæra, vel ſphæroides, fuerint diff. grauia in ſecunda, tertia, quarta ſpecie, &c. iuxta eundem limitem, AB; vtemur pro quadratico, trilineo cubico, qq. qc. &c. tanquã diff. graui ſemper in prima ſpecie iuxta limitem, DF, oſtendentes eſſe propor. analogum in grauitate cum dicta ſphæra, vel ſphæroide. Et ſubinde colligemus ex Prop. 24. ſuperiori, in tertia ſpecie, CI, ad, IE, eſſe vt 4. ad 2. in quarta, vt 5. ad 2. & ſic deinceps vt propoſitum eſt. Quod &c.

SCHOLIVM I.

SI circa, CE, Diametrum fuerit compoſitum ex duabus parabolis, CPE, CXE, quarum diametri, PS, SX, ſint in directum, ſupponaturq; hæc figura primò vnif. deinde diffor. grauis limite, AB, nempè ordinatim in prima 2. 3. 4. 5. ſpecie, &c. eadem centra grauitatis pro dicta figura colligentur. Fſto enim, quod ducta plana ipſi, AB, parallela effecerint rectas, PX, MN, ipſi, AB, parallelas, facilè igitur oſtendemus gr. MN, recta ad gr. recta, PX, eſſe vt gr circuli, MN, ad gr. circuli, PX. Sumpta enim, QV, æquali, MN, habebit gr. MN, ad gr. PX, rationem compoſitam ex ratione gr. MN, ad, gr. QV, hoc eſt, KC, ad, CS, & gr. circuli, MN, ad gr. circuli, QV; & ex ratione gr. recta, QV, ad rectam, PX, hoc eſt ex ratione, QV, vel, MN, ad, PX, ſeu rectanguli, EKC, ad rectangulum, ESC, vel q. MN, ad q. PX, aut circuli, MN, ad circulum, PX; ſiue gr. circuli, MN, ad, gr. circuli, PX, & hoc in prima difformi figura. Cum ergo grauitates rectarum, MN, PX, in figura parabolica, & grauitates circulorum, MN, PX, in ſphæra, vel ſphæroide ſint in ratione compoſita ex iiſdem rationibus, erunt propor. analoga in gr. & centra grauitatis eodem modo ſecabunt, CE. In aliis verò ſpeciebus diffor. non erit difficile eadem centra colligere propter analogiam, quam habent in figura parabolica ordinatim ad, CE, applicatæ cum quadratis applicatarum ad axim, CE, in ſphæra, vel ſphæroide. 3. Quart. Geo. Ind. 9. huius.

SCHOLIVM II.

Non prætereundum quoque eſt in eadem ſuperiori figura ſi velimus ex. gr. centrum gr. portionis ſphæræ, vel ſphæroidis, MCN, vnif. vel vtcumq; diffor. grauis iuxta limitem, AB, id obtineri poſſe mediante triangulo, vel trilineo, GCO, cum quo eſt propor. analogum in grauitate, vt patet ex demonſtratione præſentis Propoſitionis. Cum ergo triangulum, vel trilineum, GCO, ſit diff. graue in prima ſpecie iuxta limitem, DF, patet eiuſdem centrum gr. petẽdum eſſe ex Prop. 26 ſuperiori. Igitur portionis, MCN, vnif. grauis, centrum grauitatis, quod eſt illi commune cum triangulo, GCO (quippè quæ ſunt propor. analoga in grauitate) ita ſecabit $\frac{8}{12}$ axis, CK, poſt $\frac{4}{12}$ à baſi, MN, numeratas, vel ſi mauis dicere ſextam partem, CK, ordine tertiã à baſi, MN, vt pars verſus verticẽ, C, ſit ad reliquã ſicuti tripla, EK, ad, KC. Per quod nedũ ſcimus in hæmiſphærio, vel hæmiſphæroide illius axim ita diuidi à centro gr. vt pars verſus verticem ſit ad reliquã ſicuti 5. ad 3. ſed vniuerſaliter prodeunt centra gr. omnium ſphæræ portionũ planis tangẽti, AB, parallelis verſus, C, reſectarum. Similiter portionis, MCN, in prima ſpecie diff. grauis limite, AB, centrum gr. ita ſecabit $\frac{8}{20}$ ipſius, CK, poſt eiuſdem $\frac{5}{20}$ à baſi, MN, numeratas, vt pars verſus verticem, C, ſit ad reliquam veluti quadrupla, KE, ad, KC. Et ſic in reliquis ſpeciebus ſimili ſeruato proceſſu, quem indicat dicta Prop. 26. Immò hæc quoque circa ſegmenta figuræ parabolicæ, EPCX, reſecta verſus, C, per rectas ipſi, AB, parallelas ob eandem rationem verificabuntur.

Hæc pauca circa centra grauitatis figurarum tam vnif. quã diff. grauium libuit ſpeculari, potius vt fœcundiſſimæ huius doctrinæ quædam exempla traderemus, quam vt planè eandem tractaremus. Agnoſcet enim facilè ſtudioſus qualia, & quot ſcitu digna cogimur intermittere, vt aliàs ſæpè admonui, quæ lector puto æqui boniq; faciet, nec id ei omninò ingratũ futurũ ſpero, cũ in hac doctrina excolenda ampliſſimus eidẽ locus reliquatur. Antequam verò ad huius Exercitationis finem accedamus, viſum eſt quoque aliquod exemplar afferre cuiuſdam alterius difformitatis eiuſdẽ grauitatis, quã ex ſequẽti definitione, cũ allatis numero continuata nunc Lector intelliget.

DE-

DEFINITIO XV.

SI centrum cuiuſcunque circuli, vel ſphæræ ſtatuatur tanquam limes, iuxta quem augeantur in periphærijs circuli, & in ſuperficiebus ſphæræ, ſuper dicto centro deſcriptibilibus, gradus grauitatis iuxta rationem diſtantiarum à limite; vel ſi limes ſtatuatur in periphæria dati circuli, aut ſphæræ, ita vt grauiſſimum ſit in centro. Dicentur circulus, & ſphæra, iiſque incluſæ figurę, orbiculariter difformiter graues in prima ſpecie, iuxta datum limitem. Quod ſi gradus grauitatis fuerint, vt quadrata, vel cubi, q q. q c. &c. diſtantiarum: dicentur orbiculariter difformiter grauia in ſecunda, tertia, quarta, quinta ſpecie, &c. vt ſupra quoque conſuetum fuit.

SCHOLIVM.

HAc definitione præmiſſa, vt & in huiuſmodi difformitate grauitatis aliquod exemplum præbeamus, ſufficiet nobis tantum in ſemicirculo, & hæmiſphærio orbiculariter difformit graui limite centro, & in prima ſpecie, centrum grauitatis inuenire. Vt verò modus illud inueſtigandi, quicunque ſit, probabiliter euadat, per eundem prius centrum grauitatis eorundem tanquam vnifor. grauium inquiremus.

✠

PROPOSITIO. XXXIII.

In ſemicirculo vniformiter graui centrum grauitatis indagare.



Fiat vt arcus,BGC,ad chordam,BC,in dato ſemicirculo,BGC, ita axis, GA,ad, AD. Erit ergo, D, centrum grauitatis arcus, BGC,per ab alijs oſtenſa. Sumatur ipſius, DA,$\frac{1}{3}$,DP. Dico,P,eſſe centrũ grauitatis ſemicirculi, BGC. Intelligamus arcũ, BGC,tanquã appẽſũ in libra,GA,eiuſq;cẽtro gr.D,ſic & reliquos arcus deſcriptibiles ſuper centro,A, apprehendemus tanquam ſuſpenſos in punctis rectæ, DA, nempè in ſuis centris grauitatis. Inſuper ducatur per,D,ipſa, LM,parallela, ipſi, BC, & iungantur, LA, AM; ac centro,A, interuallo quocunque minori,GV,vt,AP,deſcribatur arcus,EPF,ſecans, LA, AM, in,H, K, & iungatur, HK, dirimens,GA,in, I. Intelligamus rurſus, LM, tanquam appenſam in libra, GA, ſuique centro grauitatis,D. Similiter vt,GA,vel,LA,ad, AD,ideſt arcus, BGC,ad,BC,vel,EPF,ad, EF, ita eſt, HA, vel, PA,ad. AI. Vnde,I,erit centrum gr.tam arcus, EPF,quam rectæ,HK,in quo vtrique ſuſpenſi concipiantur. Eodem modo quoſcumq; aliorum arcus ipſi, BGC, ſimiles, & rectam iungentẽ puncta occurſuum illius cum, LA, AM, intelligemus in cõmuni ſui centro ſuſpenſa. Eſt autem vt arcus, BGC, ad, EPF,ita,LA,ad,AH,&,LM,ad, HK, & ſubinde grauitas arcus, BGC, ad gr. EPF, vt gr.rectæ, LM, ad gr. rectæ, HK. Ergo ſemicirculus, BGC,& triangulum,LAM, ſunt propor. analoga in grauitate. Habebunt ergo commune centrum grauitatis. At illud in triangulo, LAM, eſt punctum, P,igitur,P, erit centrum gr. ſemicirculi, BGC. Hoc autem concordat

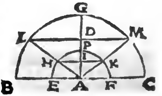
Torricellius, Guldinus Centrobaryc. li.1.

4. Sex Elem.

cordat cum Torricellio,& Guldino,qui lib.1.Centrobaryce,pag.105.ait,ſi fiat vt $\frac{1}{3}$, BGC,ad $\frac{1}{3}$, BC, hoc eſt vt, GA, ad, AD, ita $\frac{2}{3}$, GA,ad aliam ſumptam in, AG, ab,A, eius terminum eſſe centrum gr. ſemicirculi, BGC. Sed tale eſt, P, quia,PA,eſt $\frac{2}{3}$, AD, & vt,GA, ad, AD, ſiuè $\frac{1}{3}$, BGC, ad $\frac{1}{3}$, BC, ita ſunt $\frac{2}{3}$, GA,ad, AP. Quod &c.

PROPOSITIO. XXXIV.

In hæmiſphærio vnif. graui centrum grauitatis palam facere.



SIt hæmiſphærium, BGC, vnif.graue. Quæritur eius centrum grauitatis. Sit axis, GA,bifariam ſectus in, D, intelligaturque vnus, LAM, in baſi circulo, LM, circulo, BC, parallelo,& vertice centro, A. Similiter ſuper eodem, A,centro,radio minori, AG, deſcribatur quæcunque ſuperficies,ſphærica,EPF,quę ſecet coni LAM,ſuperficiem in periphæria circuli, HK, qui æquidiſtabit ipſi,LM, ſecet verò, GA,in, I. Punctum ergo, D,erit cētrum grauitatis ſuperficiei ſphæricæ, BGC, quod nouiſſimè probauit Torricellius, vnde hic amplius apparet Guldinum hallucinatum fuiſſe dum lib.1. ſuæ Centrobaricæ, pag.127. putauit centrum gr.ſuperficiei ſphæricæ hæmiſphærij idem eſſe cum centro gr. ſemicirculi, per axem illius tranſeuntis quod & nos reprobauimus in Exerc. 3. in fine Cap.14.Idem verò,D,eſt centrum gr.circuli, LM. Inſuper quia ſuperficies, BGC,ad ſuperficiē,EPF, eſt vt quadratum,GA,vel,LA,ad quadratum, AH (eſt enim, BGC, dupla circuli, BC,&, EPF, dupla circuli, EF,) hoc eſt, vt circulus, LM,ad circulum, HK: cumq; ſit,LA,ad,AD,vt,HA,ad,AI,&,LA, dupla, AD, erit &, HA, vel, PA, dupla, AI; quare, I, erit Arch. 1. de Sph.& Cyl. Prop. 31.

erit centrum gr. ſuperficiei, EPF, vt eſt & circuli, HK, ſuntq; ſuperficies, BGC, EPF, & circuli, LM, HK, proportio-
1. huius. nales, & ſubinde eorum grauitates pariter proportionales. Ergo hæmiſpherium, BGC, & conus, LAM, erunt propor.
9. huius. analoga in grauitate, commune ergo habebunt centrum gr.
8. huius. quia in vtroq; reperitur quoq; in axe, GA. Sed coni cen-
19. huius. trum gr. quod ſit ex. gr. punctum, P, diſtat à baſi, LM, per ¼ ipſius, DA. Ergo, P, erit quoq; centrum gr. hæmiſphærij, BGC. Cum verò, GD, ſit æqualis ipſi, DA, & DA, quadrupla, DP, erit, GD, quadrupla, DP, &, GP, quintupla, DP. Sed eiuſdem, DP, tripla eſt, AP. Ergo, GP, ad, PA, eſt vt 5. ad 3. prout à nobis & ab alijs demonſtratur. Inuentum eſt ergo centrum gr. hæmiſphærij, quod quærebatur.

PROPOSITIO XXXV.

Semicirculi, & hæmiſphærij, orbiculariter difformiter grauium in prima ſpecie, ac iuxta limitem centrum, grauitatis centrum inueſtigare.



Sit ſemicirculus, BGC, orbiculariter diffor. grauis in prima ſpecie, limite centro, A. Oportet illius centrum grauitatis inueſtigare. Supponantur autem omnia conſtructa vt in Schemate Prop. 33. ſuperioris, ſit tamen triangululum, LAM, difformiter graue in prima ſpecie limite, A, eiuſq; centrum gr. P, quod dico eſſe pariter centrum gr. ſemicirculi, BGC. Quod enim, D, ſit centrum gr. commune rectæ, LM, & arcui, BGC; &, I, commune rectæ, HK, & arcui, EPF, probabimus, vt factum eſt in dicta Prop. 33. Vlterius grauitas arcus, BGC, ad grauitatem vniformem arcus, EPF, eſt vt, LA, ad, AH, vel, DA, ad, AI, hoc eſt, LM, ad, HK, & ſubinde vt grauitas.

Digitized by Google

uitas, LM, ad gr. vniformem, HK. Inſuper grauitas vniformis arcus, EPF, hoc eſt gradus gr. in, EPF, vel, BGC, ad gr. difformem, ſeu gradum grauitatis eiuſdem, EPF, eſt vt, LA, ad, A H, vel, D A, ad, A I, aut ſicuti grauitas vniformis, HK, ſeu illius gradus gr. vel ipſius, LM, ad gr. difformem, ſeu gradum gr. eiuſdem, HK. Ergo ex æquo gr. arcus, BGC, ad gr. difformem arcus, EPF, erit vt gr. LM, ad gr. difformem, HK. Erunt ergo ſemicirculus, BGC, & triangulum, LAM, proportionaliter analoga in grauitate, vnde, P, erit quoq; centrum gr. ſemicirculi, BGC, diſtans à baſi, LM, per $\frac{1}{3}$, AD. Cum ergo, GA, ad AD, ſit proximè vt 11. ad 7. &, AD, ſexquitertia, AP, hoc eſt vt 7. ad $5\frac{1}{4}$, erit, GA, ad, AP, vt 11. ad $5\frac{1}{4}$, & diuidendo, GP, ad, PA, vt $5\frac{3}{4}$ ad $5\frac{1}{4}$, ſeu vt 23. ad 21. proximè. Deſeruiat nunc, BGC, pro hæmiſphærio orb. diffor. graui limite centro, A, & in prima ſpecie. Sint autem cætera conſtructa vt in Prop. ant. ſed tamen conus, LAM, in prima ſpecie difformiter grauis, limite, A, cuius ſit centrum gr. P, idcirco diſtans à baſi, LM, per $\frac{1}{5}$ ipſius, DA. Quod ergo, D, ſit centrum gr. commune circulo, LM, & ſuperficiei, BGC, vt &, I, commune circulo, HK, & ſuperficiei, EPF, probabitur vt factum eſt in Prop. ant. Rurſus grauitas ſuperficiei, BGC, ad gr. vniformem ſuperficiei, EPF, eſt vt ipſæ ſuperficies, hoc eſt vt q. LA, ad q. AH, vel q. LM, ad q. HK, vel circulus, LM, ad circulum, HK, vel gr. circuli, LM, ad gr. vniformem circuli, HK. Inſuper gradus gr. vniformis, EPF, vel, BGC, ad gradum difformem, EPF, eſt ex hypotheſi vt, LA, ad, AH, vel, DA, ad, AI, hoc eſt vt gradus gr. vniff. HK, vel, L M, circuli ad gradũ difformem circuli, HK. Ergo ex æquali gr. BGC, ad gr. difformem, EPF, erit vt gr. circuli, LM, ad gr. difformem circuli, HK. Igitur hæmiſphærium, BGC, & conus, LAM, erunt proportionaliter analoga in gr. & erit, P, illis commune centrum grauitatis. Cum ergo, GD, ſit æqualis, DA, &, DA, ſit 5. qualium, PA, 4. erit, GA, 10. qualium, PA, 4. & GP, 6. qualium, PA, 4. vel, GP, 3. qualium, PA, 2. ſicut etiam contingit in parabola vnif. graui, cuius vertex, G, baſis, BC. Quod, &c.

Def. 15.
23. huius.
19. huius.
Def. 15.
9 huius.

SCQ.

Digitized by Google

SCHOLIVM.

Haec etſi plurimum confirmentur per concordantiam duarum praecedentium Prop. 33. & 34. cum ab alijs oſtenſis, attamen, quia non adeò clarè videtur his adaptari Def. 12. de proportionaliter analogis in grauitate, vt non relinquatur ſtudioſo aliquis dubitandi locus, cum arcus in ſemicirculo, vel ſuperficies in hamiſphario videantur eſſe multò plures quam parallela in triangulo, vel circuli in cono, LAM, etſi quilibet ſignatus arcus, & parallela, vel qualibet ſignata ſuperficies, & circulus, habeant idem centrum gr. omniaq; cadant in recta, DA: propterea non aliter quam tamquam probabilia tibi huiuſce Propoſitionis inuēta propono benigne Lector, donec congruentior modus vel mihi ſubueniat hac centra inueniendi, vel tibi ſi modò circa hac orbiculariter difformiter grauia, tum in prima, tum etiam in reliquis difformitatis ſpeciebus, volueris laborare; mihi enim in praſenti hac quoq; propoſuiſſe ſpeculanda ſat eſſe videtur.

ADMONITIO.

Doctrinæ de centro grauitatis tam vniformiter, quam difformiter grauium, adeò connectitur menſura grauitatis, vt vna viciſſim ex alia inferatur. Id cum in vnif. grauibus notum ſit, manifeſtum quoq; hic euadet in difformiter grauibus. Propterea conſentaneum duximus poſt centra grauitatis, nonnulla quoq; attingere circa comparationem grauitatis vniformis eiuſdem figuræ tam planæ, quam ſolidæ, cum grauitate difformi, cui ſequentes Propoſitiones, cum præcedentibus numero continuatas, deſtinauimus.

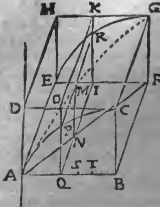
PRO-

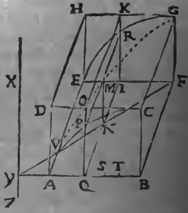
PROPOSITIO XXXVI.

Si ſit quæcunq; figura plana circa diametrum primo vnif. deinde diff. grauis ordinatim in 1.2.3.4.5. ſpecie, &c. iuxta limitem rectam vel tangentem in alterutro oppoſitorum verticum dictæ figuræ, vel illi quomodocunq; parallelam extra figuram ductam: grauitas vniformis eiuſdem figuræ ad primam grauitatem difformem erit, vt diameter (prolata ſi opus ſit vſq; ad limitem) ad interceptam eiuſdem partem inter limitem, & centrum grauitatis figuræ vnif. grauis. Sic prima grauitas difformis ad ſecundam difformem eiuſdem figuræ erit, vt eadem diameter (ſubintellige ſemper, prolata vſq; ad limitem, ſi opus, ſit) ad eius partem interceptam inter limitem, & centrum grauitatis eiuſdem figuræ primò difformis. Secunda ad tertiam, erit vt eadem diameter ad interceptam inter limitem & centrum grauitatis figuræ ſecundò difformis. Et ſic deinceps eodem ſeruato proceſſu. Porrò interceptam inter limitem, & centrum gr. figuræ vnif. grauis, dicemus centralem primam; figuræ verò primò difformis, centralem ſecundam, & ſic tertiam, quartam, &c.

SIt figura plana quæcunq; circa diametrum, AB, cuius tamen dimidiam, tantum exponimus, ABC, in ſemibaſi, BC, vertice, A, primò vnif. deinde diff. grauis ordinatim in 1. 2. 3. 4. 5. ſpecie &c. iuxta limitem, AD, tangentem in, A, in prima figura, vel, XZ, parallelam ipſi, DA, in ſecunda figura cui incidat, BA, producta in, Y, ſit inſuper, S, centrum gr. duplæ figuræ, ABC, vnif. grauis, T,

Digitized by Google





primæ difformis &c. & ſubindè, AS, vel, YS, prima centralis, AT, vel YT, ſecunda centralis &c. Dico grauitatem vniformem figuræ, ABC, ad eiuſdem primam grauitatem difformem eſſe vt, AB, ad, AS, in prima figura, vel vt, BY, ad, YS, in ſecunda. Item primam grauitatem difformem, ABC, ad ſecundam, vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT, &c. Fiat in angulo, DAB, ipſi, AB, applicatum parallelogrammum, DABC, & in baſibus, DABC, ABC, figuris fiant cylindrici, quorum latera eidem rectæ ſint parallela, nempè, HB, paralleleppipedum, &, GEFBAC, cylindricus. Extendatur inſuper planum indefinitum per limitem, DA, in prima figura, vel, XZ, in ſecunda, ac per, GF, efficiens in cylindrico, GEFBAC, figuram planam, AGF, vel, VGF. Deniq; ſumpto in, AB, quocunq; puncto, Q, per ipſum extendatur planum ipſi, GB, æquidiſtans, quod in, HB, faciat parallelogrammum, KOQI, in cylindrico, GAB, parallelogrammum, RPQI, & in trunco, GFBAC, vel, CVFBAC, parallelogrămum, MPQN, quæ omnia inter ſe erunt æquiangula. Supponamus autem tam parallelogrammum, DB, quam paralleleppipedum, HB, vnif. graue, ſed figuram, ABC, nunc primò difformē, in grauitate, ac limite, DA, vel, XZ. Grauitas ergo vniformis, CB, ad gr. difformem, PQ, oſtendetur, vt toties in ſimili caſu ſuperius

Margin note: 8. Primi Geo. Ind.

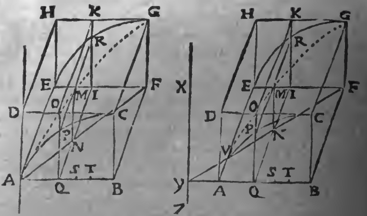
periùs

perius factum eſt, habere rationem compoſitam ex ratione gr. vnif. CB, ad gr. diffor. OQ, ſcilicet ex ratione, BA, ad, AQ, vel, BY, ad, YQ; & ex ratione gr. diffor. CQ, ad gr. diffor. PQ, eiuſdem gradus, nempe ex ratione, CQ, vel, CB, ad, PQ. Sed vt, BA, ad, AQ, vel, BY, ad, YQ, ita eſt, FB, ad, NQ. Ergo gr. vnif. CB, vel vnif. CQ, ad gr. diff. PQ, erit in ratione compoſita ex rationibus, CB, ad, PQ, &, FB, ad, NQ. Sed eædem componunt rationem parallelogrammi, GB, ad parallelogrammum, MQ, quia ſunt æquiangula, ergo gr. vnif. OQ, ad gr. difformem, QP, erit vt, GB, ad, MQ, ſeu vt grauitas vnif. GB, vel, KQ, ad gr. vnif. MQ, & ſic vbique. Ergo grauitates vnif. omnium linearum parallelogrammi, DB, ad gr. diff. omniũ linearum figuræ, ABC, erunt vt gr. vnif. omnium planorum, HB, ad gr. vniff. omnium planorum trunci, GFBAC, vel, GFVABC. Et ſubinde grauitas vnif. parallelogrammi, DB, ad gr. difformem figuræ, ABC, erit vt gr. vnif. HB, ad gr. vnif. trunci, GFABC, vel, GFVABC. Eſt autem grauitas vnif. figuræ, ABC, ad gr. vnif. DB, vt, ABC, ad, DB, vel vt cylindricus, GEB, ad, HB, hoc eſt vt grauitas vnif. cylindrici, GEB, ad gr. vnif. HB. Ergo ex æquali gr. vnif. ABC, ad primam gr. difformem eiuſdem, ABC; erit vt gr. vnif. cylindrici, GEB, ad gr. vnif. trunci, GFABC, vel, GFVABC, nempè vt dictus cylindricus ad dictum truncum. Cum verò oſtenſum ſit duos truncos dicti cylindrici eſſe in ratione reciproca partium diametri, AB, vel, YB, à centro, S, diuiſarum, patet componendo cylindricum, GEB, ad truncum inferiorem, GFABC, vel, GFVABC, eſſe vt, BA, ad, AS, vel, BY, ad, YS. Ergo gr. vnif. ABC, ad gr. primam diffor. eiuſdem, ABC, erit vt, BA, ad, AS, vel, BY, ad, YS.

Def. 8. 1. huius. Cor. 10. Exerc. 4. 10. huius. 1. huius. 1. huius. 1. huius. 17. huius.

Sit nunc, ABC, diff. grauis in ſecunda ſpecie, ſed cylindricus, GEB, in proximè antecedẽti, hoc eſt in prima ſpecie, &, HB, pariter vnif. graue, cæteris vt ſupra conſtructis. Grauitas ergo vnif. CB, vel, OQ, ad gr. diffor. ſecundam ipſius, PQ, oſtendetur vt ſupra eſſe in ratione compoſita ex ratione q. BA, ad q. AQ, vel q. FB, ad q. NQ, & ex ratione, CB, ad, PQ. Similiter gr. vnif. GB, ad gr. primam difformem, MQ, probabitur eſſe in ratione compoſita ex

Digitized by Google



rationegr. vnif. GB, ad gr. primam difformem, KQ, hoc eſt ex ratione, BA, ad, AQ, ſeù, BY, ad, YQ, ſcilicet ex ratione, FB, ad, NQ, & ex ratione gr. diff. KQ, ad gr. difformem eiuſdem gradus, MQ, hoc eſt ex ratione, KQ, ad, MQ, quæ eſt compoſita ex rationibus, IQ, vel, FB, ad, NQ, &,

23. Sexti Elem. OQ, vel, CB, ad, PQ. Duæ rationes verò, FB, ad, NQ, componunt rationem q. FB, ad q. NQ. Ergo gr. vnif. OQ, ad gr. ſecundam difformem, PQ, erit vt gr. vnif. GB, vel, K

Cori 10. Exerc. 4. Q, ad gr. primam difformem, MQ, & ſic vbiq; Ergo gr. vnif. DB, ad gr. ſecundam difformem, ABC, erit vt gr. vnif. HB, ad gr. primam diffor. trunci, GFABC, vel, GVFBAC.

10. huius. Quoniam verò gr. vnif. OQ, ad gr. primam difformem, QP, eſt vt gr. vnif. KQ, ad gr. primam difformem, RQ, & hoc

Cor. 10. Exerc. 4. 10. huius, vbiq: ideò conuertendo grauitas prima difformis, ABC, ad gr. vnif. DB, erit vt gr. prima difformis cylindrici, GEB, ad gr. vnif. HB; ſed grau. vnif. DB, ad gr. ſecundam difformem, ABC, oſtenſa eſt eſſe vt gr. vnif. HB, ad gr. primam diffor. trunci, GFABC, vel GVFABC. Ergo ex æquali gr. prima diffor. ABC, ad gr. ſecundam diffor. eiuſdem, ABC, erit vt gr. prima diffor. cylindrici, GEB, ad gr. primam diff. trunci, GFABC, vel, GFVABC. At quia grauitates truncorum

Cor. 17. huius. cylindrici, GEB, primò diff. grauis ſunt in ratione reciproca partium, AB, vel, YB, factarum à centro gr. T, figuræ duplæ, ABC, primò diff. grauis, ideò componendo gr. prima

diffor.

diffor. cylindrici, GAB, ad gr. primam difformem trunci, GFABC, vel GFVABC, erit vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT. Igitur gr. prima difformis, ABC, ad gr. ſecundam diffor. eiuſdem, ABC, erit vt, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT, ſecundam centralem.

Simili ratione oſtendemus gr. ſecundam difformem, ABC, ad tertiam eſſe, vt, BA, vel, BY, ad tertiam centralem, ſupponendo tunc cylindricum, GEB, ſuoſq; truncos ſecundò diff. graues, retinendoq; ſemper, HB, vnif. graue. Et ſic deinceps in omnibus ſpeciebus difformitatis ſimili proceſſu incedemus. Ex quibus patet in integra quoq; figura circa diametrum, AB, propoſitum verificari. Quod, &c.

C O R O L L A R I V M.

Ex his colligitur pariter grauitatem vniformem eiuſdem figuræ ad quamuis difformem comparatam ſe habere, vt poteſtatem diametri eiuſdem numeri cum grauitate difformi, ad factum ſub tot centralibus ordinatim à prima, quota eſt grauitas difformis. Vt in ſuperioribus ſchematibus grauitas vniformis, ABC, ad primam difformem eſt, vt, BA, vel, BY, ad, AS, vel, YS, primam centralem, vt probatum eſt. Eadem gr. vnif. ABC, ad gr. ſecundam difformem, ABC, erit vt q. AB, vel, YB, ad factum ſub duabus centralibus prima, & ſecunda, AS, AT, vel, YS, YT. Nam gr. vnif. ABC, ad ſecundam diff. ABC, habet rationem compoſitam ex ratione gr. vnif. ABC, ad primam diff. ABC, nempè ex ratione, BA, ad, AS, vel, BY, ad, YS; & ex ratione primæ difformis ad ſecundam, hoc eſt ex ratione, BA, ad, AT, vel, BY, ad, YT. Duæ rationes verò, BA, ad, AS, &, BA, ad, AT, faciunt rationem q. BA, ad factum ſub, AS, AT. Et ita duæ, BY, ad, YS, &, BY, ad, YT, faciunt rationem q. BY, ad factum ſub, YS, YT. Ergo gr. vnif. ABC, ad grau. ſecundam difformem erit vt q. AB, ad factum ſub, AS, AT, vel vt q. BY, ad factum ſub, YS, YT. Eodem modo oſtendemus gr. vnif. ABC, ad gr. difformem tertiam eſſe, vt cubus, AB, ad factum ſub prima, AS, ſecunda, AT, & tertia centrali; vel, vt cubus, BY, ad factum ſub prima, YS, ſecunda, YT, & tertia centrali, & ſic deinceps.

SCO-

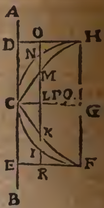
SCHOLIVM.

Aduerte tamen etſi ſuppoſuerimus figuram datam eſſe circa diametrum facilioris intelligantiæ gratia, attamen propoſitum quoque verificari circa quaſcunque figuras planas, aſſumpta vice diametri ex. gr. earum altitudine, & hoc ex vi Prop. 17. ſuperioris, & Corollarij allati pro diff. grauibus. Aduerte etiam in hac grauitatum comparatione nos ſemper ſupponere in recta parallela limiti, & ab eodem remotiſſima, vt in, CB, eundem gradum grauitatis, à quo verſus limitem procedit grauitas tam vniformis, quam quæcunque difformis. Sic & in ſolidis in plano limiti parallelo, & ab eodem remotiſſimo eundem gradum grauitatis ſemper ſupponemus, pro eadem figura tanquam vnif. vel diff. vtcunque graui.

PROPOSITIO XXXVII.

Eadem analogia oſtenſa in Prop. ant. de planis figuris, de ſolidis quoque verificatur.

Sit primò cylindricus, DF, circa axem, CG, in baſi figura quacunque, HF, vnif. grauis, & deinde diff. in prima, ſecunda ſpecie, &c. limite plano, AB, ipſi, HF, parallelo. Intelligatur quoque, DF, eſſe parallelogrammũ, circa diametrum, CG, in baſi recta, HF, vnif. graue, ac deinde diff. in prima, ſecunda ſpecie, &c. limite, AB, vt recta linea. Sumatur deinde in, CG, quoduis punctum, L, per quod agatur planum æquidiſtans ipſi, HF, ac faciẽs in cylindrico, DF, figuram, OR, ſimilem, æqualem, & ſimiliter poſitam ipſi, HF, & in parallelogrammo, DF, rectam, OR, exiſtentibus, HF, OR, rectis homologis figurarum, HF, OR. Vt ſi illæ ſint circu-



li, &

li, &, HF, OR, ſint earum diametri. Cum ergo grauitas vnif. HF, figuræ, vel figuræ, OR, ad quamcunque grauitatem difformem ſuppoſitam in eadem figura, OR, ita ſit gr. vniformis rectæ, HF, vel, OR, ad eandem prædictæ gr. difformem ſuppoſitam in recta, OR. Erunt grauitates vnif. omnium planorum cylindrici, DF, ad grauitates difformes eorūdem in data ſpecie, vt grauitates omnium rectarum, DF, vnif. ad gr. difformes earūdem in ſuppoſita ſpecie: & conſequenter grauitas vnif. cylindrici, DF, ad eiuſdem difformem, erit vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eiuſdem gr. difformem in data ſpecie. Inſuper ex demonſtratis patet cylindricum, DF, & parallelogrammum, DF, eſſe propor. analoga in gr. ſiue ſupponātur inſimul vnif. grauis, ſiue inſimul diff. grauia in data ſpecie, & conſequenter habere communia centra grauitatis. Sit, P, centrum gr. pro ipſis vnif. grauibus, &, Q pro iiſdem tanquam diff. grauibus in prima ſpecie. Quia ergo gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eiuſdem gr. primam difformem eſt per præced. Prop. vt, GC, ad, CP, etiam gr. vniformis cylindrici, DF, ad eiuſdem primam gr. difformem erit vt, GC, ad, CP. Sic oſtendemus primam difformem ad ſecundam in eodem cylindrico eſſe, vt, GC, ad, CQ, & gr. vnifor. ad ſecundam ſicuti q. GC, ad rectangulum ſub, CP, CQ. Et eodem modo in reliquis ſpeciebus procedemus.

Cor. 10. Ex. 14.

10. huius.

9. huius.

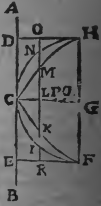
Quod ſi ſolidum non fuerit cylindricus, ſed ex altera parte deficiens, vt, HCF, circa axim, CG, tunc in eadem illius baſi, HF, & circa eundem axem, CG, conſtituemus cylindricum, & parallelogrammum, DF. Et per quodcumque punctum, CG, vt, L, traiecto plano ipſi, HF, æquidiſtante, ac faciente in cylindrico figuram, OR, & in ſolido figuram, NI, vt figura, HF, ad figuram, NI, ſic faciemus rectam, HF, ad rectam, MK, & ita, GF, ad, LK, & ſic vbique deſcribentes planam figuram, HMCKF. Erit ergo gr. vnif. figuræ, HF, ad gr. vnif. figuræ, NI, vt gr. vnif. rectæ, HF, ad gr. vniformem rectæ, MK. Vnde erunt, HEF, ſolidum, & plana figura, HMCKF, propor. analoga in gr. Eodem modo ſi comparentur grauitates figuræ, HF, & rectæ, HF, vnif. ad grau. difformes figuræ, NI, & rectæ, MK, in quacumq; ſpecie oſtendemus eſſe propor. analoga in gr. & ſubinde communia habebunt

Digitized by Google

bebunt centra gr. vt, P, centrum gr. pro iiſdem tanquã vnif. grauibus, &, Q, pro ipſiſmet tãquam in prima ſpecie difformiter grauibus. Et quoniam oſtenſum eſt gr. vnif. HF, vel, OR, figuræ ad gr. difformem figuræ, NI, eſſe vt gr. vnif. rectæ, HF, vel, OR, ad gr. diff. rectæ, MK, in eadem ſpecie, & hoc vbique. Ideò grau. vnif. cylindrici, DF, ad gr, difformẽ ſolidi, HCF, erit vt gr. vnif. parallelogrã-mi, DF, ad eandem grauit. difformem figuræ, HMCKF. Cum ergo gr. vnif. ſolidi, HCF, conuertẽdo, ſit ad gr. vnif. cylindrici, DF, vt gr. vnif. parallelogrãmi, DF, ad grau. vnif. figuræ, HMCKF, & gr. vnif. cylindrici, DF, ad gr. difformem ſolidi, HCF, vt gr. vnif. parallelogrammi, DF, ad eandem gr. difformem, HMCKF. Erit ex æquali gr. vniformis, ſolidi, HCF, ad gr. difformem eiuſdem, vt gr. vnif. figuræ, HMCKF, ad gr. difformem eiuſdem in eadem ſpecie. Cum ergo ex præc. Prop. gr. vnifor. HMCKF, ad eiuſdem primam gr. difformem ſit, vt, GC, ad, CP; etiam gr. vnif. ſolidi, HCF, ad eiuſdem gr. difformem erit vt, GC, ad, CP. Eodem modo oſtendemus gr. primam ad ſecundam eiuſdem ſolidi eſſe, vt, GC, ad, CQ, & gr. vnif. eiuſdem ad ſecundam difformem, vt q. GC, ad factum ſub, CP, CQ; & ſic in reliquis ſpeciebus quemadmodum in figuris planis.

Cor. 10. Ex. 4.

10. huius.



Exemplum attulimus quando limes, AB, tangit figuram, eodem tamen modo fiet demonſtratio etiam ſi non tangat. Similiter ſi ſolidum non habeat axim, aſſumentes illius altitudinem, vel quamcunq; rectam limite, AB, & baſis plano, HF, interceptam, eaq; diuiſa per parallela limiti plana tranſeuntia per centra gr. ſolidi tanquam vnif. grauis, deinde diff. in 1. 2. 3. ſpecie, &c. & vſurpantes illius portiones cadentes inter limitem, & dicta parallela plana per centra gr. producta, tanquam centrales, propoſitum nihilominus oſtendemus. Quod, &c.

COROL.

COROLLARIVM I.

CVm ergo hæc analogia tam in planis, quam in ſolidis verificetur, inuentaq; ſint centra gr. nonnullarum tam planarum, quam ſolidarum figurarũ, patet per has duas ſuperiores Propoſ. earundem grauitatum in diuerſis ſpeciebus proportionem obtinere poſſe, tum ad grau. vniformem earundem ſingillatim, tum etiã inter ſe comparatarũ. Sicuti vicíſſim ſi prius iućta fuiſſent harũ grauitatum in eadem figura proportiones, eiuſdẽ quoq; reſpondentia centra grauitatis colligi potuiſſent.

COROLLARIVM II,

PAtet quoq; ſi comparentur diuerſarum planarũ figurarum inter ſe, vel ſolidarum inter ſe quacunq; grauitates; cum in vnaquaq; fuerint nota centra gr. tanquam vnif deinde diff. graui. in 1.2.3 ſpecie, &c. innotuerit quoq; proportio grauitatũ vniformium comparatarum figurarum; quod manifeſta euadet ratio cuiuſcunq grauitatis vnius ad quamcunq; grauitatẽ alterius comparatarũ figurarum. Quas generales regulas nunc aliquibus ex figuris quarum ſupra inuenimus centra grauitatis, in exemplum applicabimus.

PROPOSITIO XXXVIII.

In parallelogrammo quocunq; diuerſarum eiuſdem grauitatum proportiones aſsignare.

IN quolibet parallelogrammo primò vnif. deinde diffor. graui in omni ſpecie ordinatim, ac limite quouis laterum, centrum gr. ita diuidit diametrum, vt pars ad verticem ſit ad reliquam in vnifor. graui, vt 1. ad 1. in primo difformi vt 2. ad 1. &c. ſicuti oſtendunt hi numeri 27. huius.

1	2	3	4	5	&c.
1	1	1	1	1	

Digitized by Google

Ergo tota diameter ad primam centralem erit vt 2. ad 1. ad ſecundam vt 3. ad 2. ad tertiam vt 4. ad 3. &c. veluti exhibent hi numeri.

2	3	4	5	6	&c.
1	2	3	4	5	Centrales

Sic ergo grauitas vniformis parallelogrammi ad primam difformem erit vt 2. ad 1. prima difformis ad ſecundam vt 3. ad 2. & ſic deinceps, vt oſtendet hæc ſecunda ſeries numerorum.

Quod ſi velimus rationem grauitatis vnif. parallelogrāmi ad ſingulas difformes ordinatim, inueniemus hāc ſeriem.

2	3	4	5	6	&c.
1	1	1	1	1	

namque vnif. grauitas ad primam difformem eſt vt 2. ad 1. Eadem ad ſecundam difformem, vt q. diametri, nempè 9. ad factum ſub prima, & ſecunda centrali, hoc eſt ſub $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{3}$. quod eſt $\frac{2}{6}$. nempè $\frac{3}{9}$. Eſt autem vt 9. ad 3. ita 3. ad 1. Pariter eadem grauitas vnif. ad tertiam difformem erit, vt cubus diametri, qui, vt apparet in ſuperius allata ſecunda numerorum ſerie, eſt 4. nempè 64. ad factum ſub $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, nempè ad $\frac{6}{24}$, vel ad $\frac{16}{64}$, ſcilicet vt 4. ad 1. & ſic deinceps fiat tertia ſeries numerorum.

Aliter quoque habebuntur rationes grau. vnif. dicti parallelogrammi ad difformes, nempè ex comparatione eiuſdem ad triangulum, & trilinea ordinatim ſubſequentia circa eandem diametrum parallelogrammi. Grauitas enim prima difformis eiuſdem æqualis erit grauitati vniformi trianguli, quod facilè probabitur. Eſt autem grau. vnif. parallelogrammi dupla grau. vnif. dicti trianguli. Ergo gr. vnif. parallelogrammi ad primam grau. difformem eiuſdem erit vt 2. ad 1. Sic cum eadem grau. vnif. parallelogrammi ſit tripla grau. vnif. trilinei quadratici, eadem erit ad ſecundam grau. diff. vt 3. ad 1. Et ſic in reliquis, quemadmodum indicat ſuperior tertia numerorum ſeries.

COROL-

COROLLARIVM.

EAEdem proportiones pro parallelogrammo colliguntur quoque pro cylindricis circa eandem diametrum cum parallelogrammo, vel in eadem tanquam in baſi exiſtentibus, cum habeant communia centra grauitatis, & ſubinde communes centrales.

SCHOLIVM

PRætereo autem alias figuras planas, quarum inuenimus cẽtra grau. cũ quilibet iuxta præoſtenſas regulas generales, facilè earundem diuerſarum grauitatum proportiones elicere poterit, tantumque gratia exempli inſigniora ſolida, de quibus egimus, in medium afferemus, nempè Conum, Conoides parabolicum, hyperbolicum, ac Sphæram, ſeù Sphæroides.

PROPOSITIO XXXIX.

Idèm in Cono præſtare vnif. & vtcumq; diffor. graui, limite plano ipſum in vertice tangente.

IAm conſtat ex Prop. 29. ſuperiori centrum, gr. ita ſecare axim, vt pars verſus verticem ſit ad reliquam in vnifor. graui vt 3. ad 1. in primo difformi vt 4. ad 1. &c. quemadmodum indicat hæc ſeries numerorum. 27. huius.

3	4	5	6	7	&c.
1	1	1	1	1	

Ergo axis ad primã centralẽ erit vt 4. ad 3. ad ſecundã. vt 5. ad 4. & ſic deinceps, ut patet in hac alia numerorũ ſerie

4	5	6	7	8	&c.
3	4	5	6	7	Centrales

Sic ergo coni grau. vnif. ad primam difformem erit vt 4. ad 3. prima ad ſecundam, ut 5. ad 4. &c.

Eadem quoq; coni grau. unif. ad primam difformem oſtendetur eſſe ut 4. ad 3. ad ſecundam, ut 5. ad 3. ad ter-

tiam, vt 6. ad 3. &c. quemadmodum indicat hæc ſeries.

4	5	6	7	8	&c.
3	3	3	3	3	

Qui numeri habentur vel faciendo quadratum, cubũ, &c. axis, & ducendo $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ &c. Vel, quod eſt facilius ducendo ſecundæ ſeriei numeros ſuperiores in ſe ipſos, & pariter, inferiores, vt 4. in 5. facit 20. & 3. in 4. facit 12. ita vt grau. vnif. coni ad primam difformem reperiatur vt 20. ad 12. hoc eſt vt 5. ad 3. ſimiliter ducendo in ſe 4. 5. 6. fiunt 120. & 3.4.5. faciunt 60. vnde grau. vnif. coni ad ſecundam diffor. reperitur vt 120. ad 60. Etenim grau. vnif. coni ad ſecundã difformem habet quoq; rationẽ compoſitam ex rationibus 4. ad 3. 5. ad 4. & 6. ad 5. nempè axis coni ad ſuas centrales, vt conſtat ex Cor. Prop. 36. ſuperioris. Per quod patet ratio extrahendi reliquos numeros dictæ tertiæ ſeriei.

PROPOSITIO XL.

Idem abſoluere in conoide parabolico vnif. vel vtcunque diff. graui, limite plano ipſum in vertice tangente.

EX Prop. 30. ſuperiori habetur in axe conoidis parabolici diuiſi per centrum grauitatis, partem verſus verticem eſſe ad reliquam in vnif. graui, ac primo, ſecundo difformi, &c. vt exhibent hi numeri.

2	3	4	5	6	&c.
1	1	1	1	1	

Vnde axis ad centrales, & ſubinde conoidis dictæ grauitates ordinatim erunt, vt indicant hi numeri.

3	4	5	6	7	&c.
2	3	4	5	6	Centrales.

Et conoidis grauitas vnif. ad ſingulas difformes erit ordinatim pro vt apparet in his numeris, deductis ex numeris ſecũdæ ſeriei, multiplicãdo tã ſuperiores inter ſe, quam inferiores.

3	4	5	6	7	&c.
2	2	2	2	2	

PRO-

PROPOSITIO. XLI.

Idem perficere in conoide hybperolico vniſ. & vtcunque diff. graui, limite plano ipſum in vertice tangente.

EX Prop. 31. conſtant centra grauitatis conoidis hyperbolici, & ſubinde haberi poteſt ratio axis ad primam centralem, ſecundam, tertiam, &c. & conſequenter grauitatis vniſ. conoidis ad primam difformem, primæ ad ſecundam, &c. nec non eiuſdem vniſ. ad primam, ſecundam, tertiam difformem, &c. iuxta datas regulas. Exempli gratia, viſo Schemate dictæ Prop. 31. grauitas vniſ. conoidis, DCF, ad primam difformem erit vt, EC, ad, CI; hoc eſt vt, EC, 12. ad, CV, 8. vna cum, VI, ad quam, XI, eſt vt ſexquialtera, SC, ad, CE. Qua ratione in cæteris quoq; ſpeciebus grauitatis procedemus.

PROPOSITIO XLII.

Idem determinare in ſphæra, vel ſphæroide, vniſ. vel vtcunque diffor. graui, limite plano ipſum in vertice tangente.

Ex Prop. 32. ſuperiori habetur in axe Sphæræ, vel Sphæroidis, diuiſæ per centrum grauitatis, partem verſus limitem ad reliquam eſſe vt exhibent hi numeri.

2	3	4	5	6	&c.
2	2	2	2	2	

Vnde axis ad centrales, & ſubinde earum grauitas vniſ. ad primam difformem, prima ad ſecundam, &c. erit vt oſtendunt hi numeri.

4	5	6	7	8	&c.	
2	3	4	5	6		Centrales

Et

Et earum grauitas vniformis ad ſingulas difformes velut in hac ſerie apparet, quorum numeri ex ſecunda ſerie deducti ſunt, vt in Prop. ant. factum eſt.

4	10	20	35	56	&c.
2	3	4	5	6	

SCHOLIVM.

Haec eadem quoq; patet verificari circa figuram ex duabus parabolis compoſitam, quæ habetur in Prop. 32. ſuperiori, quemadmodum hoc conſideranti facilè innoteſcet.

PROPOSITIO XLIII.

Si cylindrus, conus, conoides parabolicum, & ſphæra, fuerint circa eundem axim, triaq; priora ſolida in communi baſi, æquali circulo maximo ſphæræ, limes verò ſit planum ipſa in communi vertice tangens: inter eorum grauitates infraſcriptæ æqualitates reperientur.

Supponimus autem in omnibus planum à limite remotiſſimum, nempè baſi cylindri, coni, & conoidis, tangentem ex oppoſito limitis ipſam ſphæram, habere eundem gradum grauitatis.

Dico ergo cylindrum in prima ſpecie difformiter grauem eſſe æqualis ponderis cum conoide parabolico vnifor. graui.

Nam grauitas vnif. cylindri ad gr. primam difformem eiuſdem cylindri eſt vt 2. ad 1. per oſtenſa in Prop. 38. circa parallelogramma, & collecta pro cylindricis in eius Corollario. Sed eadem gr. vnif. cylindri ad gr. vnif. conoidis eſt vt cylindrus ad conoides, nempè vt 2. ad 1. Ergo prima grau. diffor. cylindri æqualis eſt grauitati vniformi dicti conoidis.

21. Quart. Geo. Ind.

Cylin-

Cylindrus in ſecunda ſpecie diffor. grauis eſt æqualis ponderis cum cono vnif. graui.

Grauitas enim vnif. cylindri ad eius ſecundam grau. difformem eſt vt 3. ad 1. Sed eadem grau. vnif. cylindri tripla eſt grauitatis vnif. coni. Ergo dictæ grauitates ſunt æquales. 38. huius 24. Sec. Geo. Ind.

Sphæra in prima ſpecie diffor. grauis eſt æqualis ponderis cum Cono vnif. graui.

Nam ſphæræ gr. vnif. ad eius gr. primam difformem eſt vt 4. ad 2. At cum ſphæra dupla ſit coni, eius grau. vnif. ad grau. vnif. coni eſt vt 4. ad 2. Ergo, &c. 42. huius. Cor. primæ Geo. Ind.

Sphæra in prima ſpecie diffor. grauis eſt æqualis ponderis cum conoide parabolico in prima ſpecie diffor. graui.

Nam ſphæræ prima gr. diffor. ad eius grau. vniformem eſt vt 2. ad 4. Grauitas vnif. ſphæræ ad gr. vnif. conoidis, vt 4. ad 3. Et gr. vnif. conoidis ad primam difformem eſt vt 3. ad 2. Ergo ex æquali grauitas prima difformis ſphæræ ad primam diffor. conoidis eſt vt 2. ad 2. nempè eidem æqualis. 42. huius. Elicitur ex prima ſecundi & 21. Quarti Geo. Ind. 40. huius.

Conoides parabolicum in prima ſpecie diffor. graue eſt æqualis ponderis cum cono vnif. graui.

Etenim prima grau. diffor. conoidis ad eiuſdem grau. vnif. eſt vt 2. ad 3. Grauitas vnif. conoidis ad grau. vnif. coni eſt vt 3. ad 2. Ergo ex æquali, &c. 40. huius

Conoides parabolicum in ſecunda ſpecie diffor. graue eſt æqualis ponderis cum cono in prima ſpecie diffor. graui.

Namq; ſecunda gr. diff. conoidis ad eius gr. vnif. eſt vt 2. ad 4. hoc eſt vt 3. ad 6. Grau. vnif. conoidis ad vnif. coni eſt vt 6. ad 4. & grau. vnif. coni ad eius primam difformem vt 4. ad 3. Ergo ex æquali, &c. 40. huius. 39. huius.

Ex ſuperioribus quoq; conſtat cylindrum in ſecunda ſpecie, Sphæram in prima ſpecie, conoides parabolicum in prima ſpecie diff. grauia, æqualiter inter ſe ponderare, quia æquè ponderant cum cono vnif. graui.

Has paucas illuſtriores excerpſimus æquationes inter dictas grauitates, tanquam huius doctrinæ inſignia exempla. Pluras alias poterit ſagax Lector ex Propoſitionibus antecedentibus depromere, cuius induſtriæ hoc relinquimus, vt tandem ad huius materiæ finem properemus.

PRO-

Digitized by Google

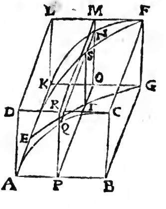
PROPOSITIO. LXIV.

Si proponatur quicunq; cylindricus, FKGBAC, vnif. grauis, in baſi figura, ABC, pariter vnif. graui, & ſit, CB, recta vel baſis eiuſdem, vel eandem tangens in vertice, B, ipſi, A, oppoſito; ſecetur inſuper idem cylindricus ſuperficie cylindracea quacunque, EFG, quam deſcripſerit recta, FG, incedens parallela ipſi, CB, ita vt exiſtens, AB, recta linea, fiat in parallelogrammo, KB, figura, GEAB: vlterius ſi eadem figura, ABC, ſupponatur hac noua ratione difformiter grauis, nempe ita vt gradus grauitatis in parallelis ipſi, CB, incedant ſicuti parallelæ ipſi, GB, ducta in figura, ABGE. Dico truncum, EFGBAC, vnif. grauem eſſe propor. analogum in grauitate figuræ, ABC, tanquam ſupradicta ratione difformiter graui; & grauitatem vnif. ABC, ad eiuſdem dictam grauitatem difformem eſſe, vt cylindricus, FAB, ad dictum truncum, FEGBAC.

FIat in angulo, ABC, ſub, AB, BC, parallelogrãmum, DB, compleaturq; parallepipedum, LB, ſub tribus planis, ABC, KB, FB, in angulo ſolido, B. Rurſus traijciatur quodcunq; planum ipſi, FB, æquidiſtans, ſecanſq; dicta ſolida, quod in, LB, FA, ſolidis, ac trunco, FEGB AC, faciat parallelogramma, MP, NP, SP, quæ erunt æquiangula. Hic ergo procedemus vt in Prop. 22. factum eſt, nempè oſtendendo grauitatem vnif. CB, ad difformem, QP, habere rationem compoſitam ex ratione gr. vnif. CB, ad difformem, RP, hoc eſt iuxta hypotheſim, ex ratione, GB, ad, TP, & ex ratione gr. diff. RP, ad gr. diff. PQ, hoc eſt

8. Primi Geo. Ind.

eſt ex ratione, RP, vel, CB, 1. huius.
ad,QP, nã, RP, eſt in ſe ipſa
vnifor.grauis, licet in gradu
diuerſo à gradu, qui eſt in,
CB.Duæ rationes verò,GB,
ad,TP,&,CB,ad,QP, cõpo- 23. Sexti Elem.
nunt rationẽ parallelogrã- 1. huius.
morũ,FB,SP,hoc eſt eorundem grau. vnifor.Ergo erũt
gr.vnif.CB,diff.QP,vniformis,FB, & vnif. SP,proportionales,figuraq; , ABC,tãquã diff. grauis propor.ana- Def.12.
loga in gr. trũco,FEGBAC.
Et cũ ſit gr. vnifor. CB,vel,
RP, ad diff. QP, vt gr. vnif.

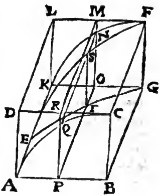


FB,vel,MP,ad gr.vnif.SP,cõcludemus gr.vnif.DB,ad diff. Cor. 10. Ex 4.
ABC,eſſe vt gr.vnif.LB,ad gr. vnif.trunci, FEGBAC. Et
quia gr.vnif.CB,vel,RP,ad vnif.QP,eſt vt,RP,ad,QP,vel
vt parallelogrãma,MP,NP,eorumq; grau.vniformes.Ideò 1.huius.
grauitates omniũ linearũ,DB,ad grauitates omniũ linearũ,
ABC,erunt vt gr.omniũ planorũ, LB, ad grauitates omniũ Cor. 10. Ex.4.
planorum,FA:& ſubindè gr.DB,ad gr.ABC,vnif.erit vt gr.
LB,ad gr.FA, vnif. & conuertendo,gr. vnif. ABC, ad vnif.
DB,erit vt gr.vnif.FA,ad gr. vnif. LB. At probatum eſt gr. 3.Ex.1.
vnif.DB,ad gr.dif.ABC,eſſe vt gr.vnif.LB,ad gr.vnif.trunci,FEGBAC, ergo ex æquo gr. vnif. ABC, ad difformem,
ABC, erit vt gr. vnifor. FA, cylindrici ad gr. vnif. trunci,
FEGBAC. Quod, &c.

SCHOLIVM.

Videt ergo Lector hanc Propoſitionem vniuerſaliſsimam eſſe, ita vt ſi reperiatur centrum gr. trunci, FEGBAC, 9.huius.
illico habeatur centrum gr. pro figura, ABC,hac ratione difformiter grauis, cuius difformitatis regulatricem poſſumus appellare ipſam figuram, ABGE, ſecundum regulam,GB; ſicuti, ABC, figuram regulatam. Similiter ſi ſciamus rationem cylindrici, FA, ad truncum, FEGBAC, innoteſcet quoque ratio gr. v-

Hhh *nif.*



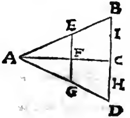
nif. ABC, ad eiuſdẽ hanc grau. difformem. Conſideret ergo artifex num ex nota figurarum regulatricis, ABGE, & regulata, ABC, menſura, in iiſdemque notis centris grauitatis, poſſit per aliquam regulam generalem inueniri centrum gr. dicti trunci, vel aliquid aliud notum præſupponendũ ſit; etenim ſi inueniret centrum gr. trunci, FGEABC, per eandem regulã poſſet inuenire centrũ gr. ſuperioris trunci, FKGE, vnde ſciens centra gr. dictorũ truncorum, & baſis cylindrici, FA, hoc eſt centrum gr. eiuſdem cylindrici, vel ſaltem æquilibrij. poſſet detegere rationem truncorum inter ſe, & ex his cõpoſiti, hoc eſt cylindrici, FA, ad truncum inferiorem, & ſubinde grau. vnif. ABC, ad eiuſdem grau. difformem. Res ergo ad hoc deducta eſt, vt ſi inueniamus regulam generalem habendi centrum gr. trunci, FEGBAC, ex dictis præſuppoſitis in figura regulatrice, ac regulante poſſimus nedũ quæcumq; in hac Exerc. per particulares regulas oſtenſa ſunt, tam circa centra, quam circa menſuram grauitatis, adhibitis pro regulatricibus triangulo, & trilineis ſupra cõmemoratis generaliter, & vnico actu demonſtrare, ſed plurima quoque circa innumeras alias ſpecies difformitatis oſtendere, nempe quæcumque ſit regulatrix, dummodo ea ſit in eadem altitudine cum regulata; parallelæque in ambabus figuris aſſumantur reſpectu regularum in eodem plano exiſtentium. Vt ſint. C B, regula pro, ABC. & BG, regula pro, ABGE. Hoc nequaquam reticendum cenſui, vt ſi per ſuperiora nentiquã modum naturæ difformiter plenumque in ſuis actionibus operãtis aſſecutus ſum, illa acrioris ingenij vi ſubacta, dũ ſub tanta generalitate demonſtrationes inſtituet huiuſmodi ſpeculationis limites non effugiat. Deniq; & nos ſequentem, ne pareat, addimus Propoſitionem.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XLV.

Si quacunq; figura plana circa axim ſecundum eandem regulam fuerit regulatrix, & regulata: idem erit centrum grauitatis eiuſdem figuræ vt diff. grauis iuxta eandem tanquam regulantem, ac ſolidi rotundi vnif. grauis ex eadem figura geniti, reuoluta circa eundem axim.



SIt triangulum æquicrure gratia exempli, ABD, circa axim, AC, & regula, BD, ſecundumq; eam, ABD, ſit figura regulatrix, ac regulata hoc eſt in prima ſpecie diff. grauis. Dico idem eſſe centrum gr. ABC, tanquam diff. grauis, & rotundi, hoc eſt coni, ABC, vnif. grauis. Ducatur quodcunq; planum rectè ſecans, AC, ac faciens in triangulo rectã, EFG, & in cono circulum, EFG. Grauitas ergo vnif. rectæ, BD, ad difformem rectæ, EG, habebit rationem compoſitam ex ratione gr. vnif. BD, ad grauitatem vnif. IH, quæ ſit æqualis, EG, hoc eſt ex ratione, BD, ad, IH, vel, EG; & ex ratione gr. vnif. IH, ad diff. EG, hoc eſt per hypoteſim, ex ratione, BD, ad, EG, quia nempè ſupponimus gradus grauitatis regulari à parallelis ipſi, BD, in triangulo, ABD. Duæ rationes verò rectæ, BD, ad rectam, EG, componunt rationem quadrati, BD, ad quadratum, EG, vel circuli, BD, ad circulum, EG, hoc eſt grauitatis circuli, BD, ad grau. circuli, EG. Ergo grauitas vnif. BD, ad difformem, EG, erit vt gr. vnif. circuli, BD, ad gr. vnif. circuli, EG. Igitur triangulum, ABD, tanquam difformiter graue, & conus, ABD, tanquam vnif. grauis,

1. huius.

23. Sexti Elem.

Hhh 2 erunt

6. huius. erunt propor. analoga in gr. Habebunt ergo commune centrum gr. cum illud pro triangulo, ABD, & cono, ABD, ſit quoq; in axe, AC, concordatq; hoc cum Prop. 23. ſuperiori, diſtabit enim à baſi, BD, per $\frac{1}{4}$ ipſius, AC. Hoc autem quod ſpecialiter demonſtrauimus in cono patet in omni figura plana circa axim verificari.

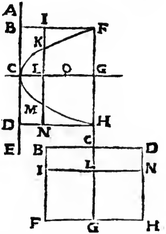
SCHOLIVM.

QVamuis perdifficile ſit certa ratione cõprehendere vtrum natura in diſtribuenda grauitate in vllis corporibus vtatur aliqua ex præconſideratis ſpeciebus difformitatis; & ſi vtitur, vbi, & quando id fiat agnoſcere: certi tamen ſumus eam in corporibus quomodocunq, ſuſpenſis obſeruare in ipſorum momentis, quod in gradibus grauitatis in prima 5. huius. *ſpecie ſuppoſuimus. Momenta enim æquègrauium ſunt in ratione diſtantiarum à fulcimento, quemadmodum gradus grauitatis ſunt in ratione diſtantiarum à limite. Cum ergo inter momenta grauium ſuſpenſorum, & gradus diuerſos grauitatis huiuſmodi analogia reperiatur, non in congruum duxi nonnulla quoque circa hanc materiam; momentorum attingere, plura Lectoris induſtriæ, quæ hic afferi poſſent relinquendo. Primo ergo ſequentem Prop. demonſtramus, in qua apparet quidam conſenſus graduum grauitatis difformis in prima ſpecie, cum grauium ſuſpenſorum momentis.*

PROPOSITIO XLVI.

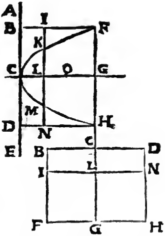
Si quæcunq; figura plana, vel ſolida circa axim, ita ſuſtineatur in alterutro extremorum, vel in puncto, quod ſit dictis extremis in directum, ſed vbicunque extra figuram; vt axis æquidiſtet horizonti: circumſcribatur autem parallelogrammum figuræ planæ, ſiuè cylindricus ſolidæ, quæ figuræ ſupponantur quoq; in prima ſpecie difformiter graues, iuxta limitem axi erectum

ctum, ac tranſeuntem per fulcimentum. Grauitas vnif. parallelogrammi, vel cylindrici ad grauitatem difformem datæ figuræ erit, vt momentum parallelogrammi, vel cylindrici, ab altero extremo axis, quod opponitur fulcimento, ſuſpenſi, ad momentum dictæ figuræ.



Sit figura plana, vel ſolida, FCH, circa axē, CG, in baſi, FH, in prima ſpecie diff. grauis limite, AE, per, C, vel vtcunq; remotè à, C, extra figuram perpēdiculariter ipſi, CG, tranſeunte, quæ in occurſu, CG, cum limite vt in, C, ita, ſuſtineatur, vt, CG, ſtet horizonti parallela; ſit quoq; parallelogrammum, vel cylindricus, BD, HF, eidem circumſcriptum, idemq; ſuſpenſum ex, G, vt apparet in figura. Dico grauitatem vnif. BH, ad gr. difformem figuræ, FCH, eſſe vt momentum, BH, ex, G, ſuſpenſi, ad momentum figuræ, FCH. Sumatur in, CG, quodcunq; punctum, L, per quod traiecta recta, vel plano baſi, FH, æquidiſtante, fiant in, BH, & figura plana, FCH, rectæ, ILN, KLM, & in ſolidis plana, ILN, KLM. Recordare autem nos vt aliàs ſemper, ſupponere in, FH, eundem gradum grauitatis communem ipſi, BH, &, FCH. Nunc grauitas vnif. FH, ad difformem, KM, eſt in ratione compoſita ex ratione grau. vnif. FH, ad diff. IN, hoc eſt iuxta hypotheſim ex ratione, GC, ad, CL, & ex ratione gr. difformis, IN, ad difformem, KM, nempè ex, ratione, IN, ad, KM. Ex iiſdem ratio-

.hu ius. rationibus verò, GC, ad, CL, &, IN, ad, KM, componitur ratio momenti, IN, ex, G, ſuſpenſæ ad, KM, ex, L, ſuſpensã. Ergo grau. vnifor. FH, vel, IN, ad difformem, KM, eſt vt momentum, IN, ex, G, ſuſpenſæ ad momentum, KM, & hoc vbiq; in, CG, verificatur.



Cor. 10. Ex. 4. Ergo grauitates omnium rectarum, vel planorum, BH, vniformes ad grau. difformes omnium rectarum, vel planorum figuræ, FCH, erunt vt momenta omnium rectarum, vel planorum, BH, ex, G, ſuſpenſorum, ad momenta omnium rectarum, vel planorum, FCH, ex, CG, ſuſpenſorum. Quapropter gr. vnif. BH,
10. huius. ad difformem, FCH, erit vt momentum, BH, ex, G, ſuſpenſi ad momentum figuræ, FCH, ex, CG, ſuſpenſæ. Hoc verò eodem modo oſtendetur, ſi, C, remoueatur à limite, vel ſi fulcimentum, & limes ſint in, G, ſiuè vtcunq; ab eo remotè extra figuram, tunc autem, BH, debet ſuſpendi in, C. Ergo patet propoſitum.

COROLLARIVM I.

4.huius. *QVoniam grauitas vnifor. IN, ad vnif KM, eſt vt, IN, ad, KM, nempè vt momentum, IN, ad momentum, KM, ſi, IN, KN, ex, G, ſuſpendãtur; & hoc vbique. Ideò cõ-*
Cor. 10. Exerc. 4. *cludemus grauit. vnif BH, ad vnif. figura FCH eſſe vt momẽtum BH ad momentum, FCH, ex, G, ſuſpenſorum. Vnde conuertendo grau. vnif. FCH, ad vnif. BH, erit vt momentũ, FCH, ad momentum BH, ex, G ſuſpenſorum. Et cum grau. vnif. BH, ad difformem, FCH, oſtenſa ſit eſſe vt momentum BH, ex, G ſuſpenſi, ad momentum figuræ, FCH, ex, CG, ſuſpenſæ. Ideò ex*

aqua-

æquali grau. vniformis FCH, ad difformem, FCH, erit vt momentum, FCH, ex, G, ſuſpenſæ ad momentum eiuſdem, FCH, ex, CG, ſuſpenſæ.

COROLLARIVM II.

Voniam ergo oſtenſum eſt grau. vnif. FCH, ad eiuſdem grau difformem in prima ſpecie eſſe vt, GC, ad primam, centralem, quæ ſit, CO: patet hinc ſequi momentum FCH, vt ſuſpenſæ ex, G, ad eiuſdem, FCH, momentum, vt ſuſpenſæ ex, CG, eſſe vt, GC, ad CO Hoc autem alia huiuſmodi ratione apparet verum eſſe, quia eſt idem momentũ figuræ, FCH, ex tota longitudine. CG. ſuſpenſæ, & eiuſdem, FCH, ab eadem, CG. ſuſpenſæ tantum per centrum grauitatis, O. Si autẽ, FCG, ſit ſuſpenſa ſemel in, O, & iterum in, G, quoniam eſt, idem graue, momentum in, G, ad momentum in, O, erit vt, GC, ad, CO. Patet ergo è contra ex hoc oſtenſo concludi pariter grau. vnif. FCH, ad eiuſdem, FCH. grau. primam difformem eſſe vt, GC, ad, CO. Quod innuendum cenſui, vt hic veritatis conſenſus Lectori innoteſceret. 36. huius. 5. huius.

Sed & has quatuor ſequentes Propoſitiones ad hanc momentorum doctrinam facientes ſubnectere libuit.

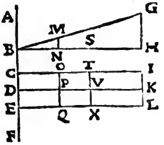
PROPOSITIO XLVII.

Si cylindricus quicunque, vel parallelogrammum circa axim, ita in alterutro extremorum axis ſuſtineatur, vt idem axis ſtet horizonti parallelus. Scala momentorũ partium eorundem, planis ad axem rectis abſciſſarum, erit quodcunque triangulum, rectangulum, cuius idem axis ſit altitudo.

Sit ex. gr. parieti, AF, infixus cylindricus, CELI, (idem eſt ſi parallelogrammum, CL, ſit infixum rectæ, AF,) ſecundum, CE, circa axem, DK, qui ſtet horizonti paral-lelus.

lelus. Fiat autem triangulum, BHG, rectangulum ad, H, cuius altitudo, BH, ſit æqualis & parallela ipſi, DK. Dico hoc eſſe ſcalam momentorum in, C L. Sumatur in, D K, quoduis punctum, P, &, B N, æqualis, DP; ducaturque per P, planum baſi, IL, parallelum, efficiens in cylindrico planum, OQ, (rectã in parallelogrammo) & per, N, recta, NM, parallela ipſi, HG. Erit ergo momentum, IL, ad momentum, OQ, vt, KD, ad, DP, nempè, HB, ad, BN, hoc eſt vt, GH, ad, MN. Si ergo, GH, ſignet momentum, IL, & MN, ſignabit momẽtum, OQ, & ita quælibet in triangulo, BGH, parallela ipſi, GH, ſignabit momentum rectæ, vel plani ſibi reſpondentis in, CL. Ergo parallelæ ipſi, GH, in triangulo, GBH, procedunt vt momenta planorum, C L, (ſiue rectarum in parallelogrammo,) & propterea appellamus triangulum, BHG, ſcalam momentorum, CL. Quod, &c.

5. huius.



C O R O L L A R I V M I.

Hinc ſequitur eadem ratione ſecari, ex. gr. à recta, *MN, omnes lineas, BGH, ſeù triangulum, BGH, & ab, OQ, omnia momenta, C L, ſeù momentum grauis, CL, ſequitur quoque, GBH, triangulum ad, MBN, eſſe vt momentum, CL, ad momentum, CQ. Quapropter innoteſcit momenta, CL, CQ, eſſe vt quadrata, HB, BN, ſeù vt quadrata, KD, DP, quod de priſmatibus & cylindris oſtendit quoque Galileus in poſtremis Dialogis ad Prop. 3. Dialogi ſecundi.*

COROL.

COROLLARIVM II.

SI ſit diuidendum momentum, CL, in datam rationem, quæ ſit ex. gr. vt, HN, ad, NB, ſumentes, BS, mediam proportionalem inter, HB, BN, & DV, æqualem, BS, extendenteſq; planum, TVX, ipſi, IL, æquidiſtans, ſciamus momentum, CL, ad momentum, CX, eſſe vt q. KD, ad q. DV, hoc eſt, vt, HB, ad, BN; & diuidendo, momentum, TL, ad momentum, CX, erit vt, HN, ad, NB, nempè in data ratione.

Aliter ſi proponatur diuidendum momentum, CL, deinceps in quotcunq; æqualia momenta, ſumamus radices quadratas numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. & has ſignabimus in, DK, à, D, verſus, K, in punctiſq; notatis diuidetur, DK, in partes æqualium momentorum.

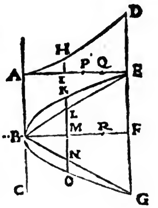
Similiter hinc patet ſi, DK, ſecetur in quotcunque partes æqualis longitudinis à, D, verſus, K, procedendo, proxima ipſi, D, hoc eſt prima momentum forè 1. ſecunda 3. tertia 5. quarta 7. & ſic deinceps iuxta numeros impares ab vnitate continuatos, ſic enim ſe habent quadratum vnitatis, & differentiæ quadratorum numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c.

PROPOSITIO LXVIII.

Eſto parieti, AC, infixum conoides parabolicum, vel triangulum, EBG, vertice, B, circa axim, BF, qui ſtet horizonti parallelus; ſit verò ſemitrilineum, AED, quadraticum rectangulum ad, E, cuius diameter, AE, æqualis ſit, & parallela ipſi, BF. Dico hoc eſſe ſcalam momentorum dicti conoidis, & trianguli.

SVmantur vtcunq; BM, & AI, ſed inter ſe æquales, extenſoq; plano per, M, baſi, EG, æquidiſtante, & per, I, recta, IH, parallela, IH, fiat in conoide circulus, KMO,

& in triangulo, EBG, recta, LMN. Momentum ergo circuli, EG, ad momentum circuli, KO; habet rationem
6. huius. compoſitam ex ratione circuli, EG, ad circulum, KO, vel q. EG, ad q. KO, hoc eſt FB, ad, BM; & ex ratione; FB,
20. Primi Con. ad, BM; quæ due rationes, FB, ad, BM, faciunt rationem q.FB, ad q.BM,
23. Ex. 4. vel q. EA, ad q. AI, vel rectæ, ED, ad, IH. Eodẽ modo oſtendemus rectæ, EG, momentum ad momentum rectæ, LN, eſſe vt q. FB, ad q. BM, vel q. EA, ad q. AI, hoc eſt vt recta, ED, ad rectam, IH, & hoc vbicunque. Ergo trilineum, AED, erit ſcala momentorum tam pro conoide, quam pro triangulo, EBG. Quod, &c.



COROLLARIVM I.

15. huius. *Trilineum, DAE, ad trilineum, HAI, eſt vt illis circumſcripta parallelogramma, nempè in ratione compoſita ex ratione, DE, ad, HI, ſiuè q. EA, ad q. EI, & recta,*
23. Sexti Elem. *EA, ad, AI, ſcilicet eſt vt cubus, EA, ad cubum, AI. Et quia momentum conoidis, EBG, ad momentum conoidis, KBO, eſt vt trilineum, DAE, ad, HAI, ideò erit vt cubus, EA, ad cubum, AI, vel vt cubus, FB, ad cubum, BM. Momenta ergo in conoidibus (vt etiam in triangulis) ab ipſo, B, ſunt im ratione cuborum eorundem axium.*

COROLLARIVM II.

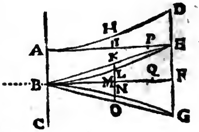
SI ergo detur ex gr. ratio, EI, ad, IA, & ita ſecandum ſit momentum conoidis, EBG, oportebit inter, EA, AI, duas medias continuè proportionales ſumere, vt, AQ, AP, &, BR, æquali exiſtente ipſi, AQ, per, R, plano ipſi, EG, parallelo ſecabitur, EBG, in partes, quorum momenta erunt in data ratione.

Si velimus conoides, ABG, ſecare per plana ipſi, EG, parallela in partes æqualium momentorum initio, à, B, facto poterimus id efficere ſumendo radices cubicas numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. (id facilè per logarithmos, vel circino proportionis, obtineri poteſt) notanteſque puncta in, B F, per quæ traiecta plana, EG, parallela, ipſum diuident in partes æqualium momentorum.

Si, B F, ſecetur in quotcunq; partes æquales, initio, à, B, facto per hæc traiecta plana, EG, parallela ita ſecabunt conoides, EBG, vt proxima ipſi, B, partis, hoc eſt prima momentum ſit 1. ſecunda 7. tertia 19. quarta 37. quinta 61. &c. quia ſic ſe habent cubus vnitatis, & differentia cuborum horũ numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. Eadẽ quoque verificantur circa triangulum, EBG.

PROPOSITIO XLIX.

Eſto parieti, ABC, infixus conus, ſeu trilineum quadraticum, BEG, vertice, B, circa axim, BF, ita vt, BF, ſtet horizonti parallelus; ſit verò ſemitrilineum, AED, cubicum, & rectangulum ad, E, eiuſq; diameter, AE, ipſi, BF, parallela, & æqualis. Dico hoc eſſe ſcalam momentorum dicti coni, & trilinei, EBG.



SVmantur vtcunq; BM, & AI, ſed inter ſe æquales, ſitq; planum, ſeù circulus, KO, & recta, LN, æquidiſtans baſi, EG, ſeù rectè axim, BF, ſecantes, & HI, ipſi, DE. Momentum ergo circuli, EG, ad momentum circuli, KO, habebit ra-
6. huius. tionem cōpoſitam ex ratione circuli, EG, ad circulum, KO, vel q.EG, ad q.KO, hoc eſt q.FB, ad q.BM, & ex ratione, FB, ad, BM; ſcilicet erit vt cubus, FB, ad cubum, BM, hoc eſt vt rectæ, ED, HI. Sic oſtendemus momenta rectarum, EG, LN,
23. Ex.4. eſſe vt, ED, HI. Erit ergo, AED, ſcala momentorum coni, & trilinei, EBG. Quod, &c.

COROLLARIVM I.

TRilinea, AED, AIH, ſunt vt illis circumſcripta parallelogramma hoc eſt in ratione compoſita ex rationibus,
35. huius. *ED, ad, IH, vel cubi, EA, ad cubum, AI, & ex ratione, EA, ad, AI,*

AI, hoc eſt ſunt & qq. EA. ad qq. AI. Ex hoc colligemus mométa conorum planis axi erectis verſus, AB, abſciſſorum (vt & trilineorum) eſſe vt qq. longitudinum, BM, BF, &c.

COROLLARIVM II.

SI ergo detur ratio vt, EI, ad, IA, & ita ſecandum ſit momentum. EBG, oportebit inter EA. AI, ſumere tres medias continuè proportionales, quarũ ipſi, AE, propior ſit, AP, eidemq; æqualis, BQ. Etenim per, Q traiecto plano ipſi, EG, parallelo ſecabitur, EBG, in partes momentorum in data ratione, EI, ad, IA. Momentum enim coni. EBG, ad momentum coni circa BQ, erit vt qq. EA, ad qq. AP ſcilicet vt, EA, ad, AI. Vnde diuidẽdo patet &c. ſicuti & in trilineo, E B G.

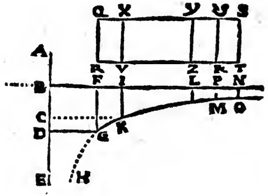
Si velimus hac ſecare in partes æqualium momentorum initio facto à, B, id obtinebimus ſumendo radices qq numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c. & notando puncta in, BF, vt ſupra, &c. Si, BF, ſecetur in quotcunque partes æquales initio facto à, B, traiecta per notata puncta plana rectè axim, BF, ſecantia, diuident, EBG, ita vt pars prima ſit 1. ſecunda 15. tertia 65. quarta 175. quinta 369. &c. quia ſic ſe habent qq. vnitatis, et differentia qq. numerorum 1. 2. 3. 4. 5. &c.

PRO-

PROPOSITIO L.

Si ſint aſymptoti, EB, BN, hyperbolæ, HGO, angulum rectum, EBN, continentes, ſumptis autem in ea vtcunque punctis, G, O, ducantur, GD, parallela ipſi, NB, &, GF, ON, ipſi EB; fiatque parallelogrammum rectangulum, QRTS, cuius ſit, RT, æqualis, & parallela ipſi, FN, &, RQ, ipſi, FG, in directum; ſupponaturq; planum, BNOGD, ſuſtineri ab, AE, in, BD. Dico, QT, rectangulum eſſe ſcalam momentorum plani, FNOG.

SVmatur enim in, HO, aliud quodcunq; punctum, K; à quo ducatur, KI, parallela ipſi, FG, &, KC, ipſi, NB. Momentum ergo, FG, ad momentum, IK, habebit ra-



6. huius. 12. ſecun. Conic. tionem compoſitam ex ratione, FG, ad, IK, hoc eſt ex ratione, IB, ad, BF, (quia rectangula, DF, CI, ſunt æqualia, vnde

vnde habent latera reciproca circa, angulos, F,I,) & ex ratione, BF, ad, BI. Sed duæ rationes, IB, ad, BF, &, BF, ad, IB, faciunt rationem æqualitatis. Ergo momenta rectarũ, FG, IK, erunt æqualia. Si ergo ſumatur, RV, æqualis, FI, & per, V, ducatur, VX, parallela ipſi, QR, erit momẽtum, FG, ad momentum, IK, vt, QR, ad, XV, & hoc vbique. Ergo, QT, erit ſcala momentorum plani, FNOG. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

QVemadmodum ergo ſecabitur, QT, per parallelas ipſis, QR, ST, ita ſecabitur momentum plani FNOG, per parallelas ipſi, AE, in directum cum præfatis conſtitutas. Vnde hinc ſequitur ſi ſumantur in, FN, quotcunque, & vbicunque eiuſdem partes æquales, vt, FI, LP, quibus reſpondeant æquales, RV, ZB, extenſis ipſis, FG, QR, parallelis per dicta puncta, momentum plani, FGKI, æquari momẽto plani LM, quemadmodum rectangula, illis reſpondentia, QV, TB, inter ſe ſunt æqualia.

Sed circa hanc materiam momentorum pluribus quoq; ſpeculatione dignis intermiſſis, ne tua nimis abutar patientia, humane Lector, huic doctrina finem impono, adiectis tantum ſequentibus ſcholijs, cum mihi præſertim proximè ſubſequens neutiquam prætereundum videatur.

SCHOLIVM I.

Circa corporeas qualitates.

CVm in Propoſitionibus 36. 37. ſuperioribus oſtenſum fuerit in figuris tam planis, quam ſolidis circa diametrum grauitatem vniformem cuiuſque figuræ ad eiuſdem primam difformem eſſe vt diametrum (productam ſi opus ſit vſque ad limitem) ad primam centralem; primam difformem ad ſecundam, vt eandem diametrum ad centralem ſecũdam, &c. nunc ſtudioſo innuendum duxi, hoc nedum circa grauitatem verificari ſed etiam de omni re, quæ induat, vt aiunt philoſophi, modum

Digitized by Google

dum quantitatis, & ſubindè hoc de ijs omnibus, præcipuè verò de qualitatibus corporeis, tãquam demonſtratum recipi poſſe. Nemo enim puto negabit eoſdem gradus quos circa grauitatem conſiderauimus, pariter ex. gr. circa lucem, calorem, colorem, aliaſuè corporeas qualitates concipi poſſe. Si itaque ſuppoſuerimus has diffundi in planis, & corporibus, iiſdem ſuppoſitis legibus grauitatis, nempè vel iuxta rationem diſtantiarum à limite, vel iuxta quadrata, cubos, &c. eorundem diſtantiarũ, certò ſciemus quam rationem habeat ex. gr. lux vniformis ad difformem in prima ſpecie ſecunda, tertia &c. quæ illuſtrat datum planum, vel ſolidum: mutato enim in dictis Prop. nomine grauitatis in nomen lucis, eadem in ijs de luce, quæ de grauitate oſtenſa ſunt, concludentur, ſeù de alijs quibuſuis corporeis qualitatibus; ſicuti & Propoſitiones ab ijs dependentes, quæ ſunt a 38. vſque ad 43. ad dictas omnes qualitates pariter extendentur.

Sic ergo per Prop. 38. luce vniformiter ex. gr. ſuper parallelogrammum radiante, deinde difformiter in prima ſpecie, ſecunda, &c. limite quocunque latere, ita vt in oppoſito latere ſupponatur vnus, & idem lucis gradus; ſciemus lucem vniformem ad primam difformem eſſe, vt diameter parallelogrammi eſt ad primam centralem, nempè duplam: deinde primam ad ſecundam difformem, vt 3. ad 2. &c. vt oſtendunt hi numeri ex dicta Prop. 38. deſumpti.

2	3	4	5	6	*&c.*
1	2	3	4	5	*Centrales.*

Sciemus quoque hanc vniformem ad ſingulas difformes eſſe vt patet in his numeris ex eadem deſcriptis.

2	3	4	5.	6	*&c.*
1	1	1	1	1	

Et eodem modo in cæteris figuris tam planis, quam ſolidis, quæ ibidem à Prop. 38. vſque ad 43. conſiderantur, proportionem lucis vniformis ad ſingulas difformes colligemus. Itaque ex hoc intelligitur quod ſi natura hac lege operaretur ipſius, vel lucis diſtributio in rebus illuſtratis penderet ab earundem centro grauitatis, ſi eas tanquam graues ſupponeremus: idemque in alijs, qualitatibus contingeret. Quis ergo non admirabitur huiuſce vim centri, quod limites grauitatis egrediens nedum

cate-

cæteras qualitates corporeas, eaſque gregarias, moderaretur, ſed vel in ipſa luce omnium nobiliſſima ſui imperij leges exerceret. Iure meritò igitur Guldinus centrum grauitatis tot, quot in eius Cẽtrobaryca apparet, laudibus cumulauit, cui ſi & hæc nota fuiſſent, fortè non ideò ab Indiuiſibilibus abhorruiſſet, ex eò quod nullã cẽtro grauitatis per hæc fructus & gloriæ acceſſionẽ fieri poſſe ſperaret vt dixit Tom.2.pag.349. Hæc ſunt benigne Lector, quæ mihi in hac noua doctrina pro tenuitate mea licuit inuenire: cumque rudicer, & ſatis imperfectè à me digeſta ſint, rogo vt meos hoſce qualeſcunque conatus æqui bonique facias, quibus ſaltem acriora ingenia fortè permota huiuſmodi de vniformiter difformiter grauibus completam, & omnibus numeris abſolutam doctrinam, aliquando ſpero, in lucem proferent.

SCHOLIVM II.

Denique amice ſtudioſe, dum huius doctrinæ riui hic clauduntur; tibi innuendum duxi, in illis Propoſitionibus, in quibus probatur. Figurarum difformiter grauium, linearum, ſeù planorum grauitates habere inter ſe rationem compoſitam ex ratione molium, & diſtantiarum à limite, ſeù quadratorum, Cuborum, &c. earundem; Quod id breuius ſic obtineri potuiſſet. Conſtat ex Propoſit. 3. grauitates molium diuerſorum graduum eſſe inter ſe in ratione compoſita ex ratione molium, & ipſorum graduum grauitatis: ſed gradus ſunt vt diſtantiæ, vel vt earum quadrata, cubi, &c. per definitiones. 8. 9. 13. & 14. ergo grauitates dictarum molium erunt in ratione compoſita ex ratione molium, & diſtantiarum à limite, vel quadratorum, cuborum, &c. earundem. Sic tamen dictæ Propoſitiones relictæ ſunt, cum, ſi quid ſuperflui, nihil tamen habeant falsitatis.

Inſimul, dum hic terminantur quoque demoſtrationes per Indiuisibilia (in ſequenti enim Exercitatione ſexta, & vltima, vel nulla huiuſmodi, vel admodum pauca afferentur)

tur) diſſimulare nequeo, quod aliquis fortè me reprahendet, dum hic, & in tota mea Geometria Indiuiſibilium, nomen omnium linearum in figuris planis vſurpaui, cum melius conformiter, nomini omnium planorum in ſolidis, videretur eſſe nomen omnium rectarum. Scitò tamen hoc è calamo excidiſſe, dum definitiones ſtabilirem, diſtinguerem que lineas recti tranſitus à lineis obliqui tranſitus, vt euitarem alliterationem rectarum, & recti tranſitus, quod nomen poſtea retinui, tacitè ſemper ſubintelligendo lineas rectas. Sed de his ſatis dictum ſit.

Lib. 2. Geo. Ind. def. 1.

EXER-

EXERCITATIO
SEXTA.
De quibuſdam Propoſitionibus Miſcellaneis.

IN ſingulis Exercitationibus, quas anteà ſtudijs tuis, Amice Lector, propoſui vna quadam methodo, certum obſeruans ordinem, vnam tantummodo materiam ad ampliorem noſtræ Indiuiſibilium Geometriæ doctrinam pertractaui: In præſenti vero Exercitatione ex demonſtrationibus aliquorum Theorematum inter ſeſe nequidquam communicantium nulla methodo regulari, nullo ordine determinato, ſuper diuerſorum Mathematum diuerſis proprietatibus Miſcellanearum Propoſitionum ſpeculationes tùm lineares, tùm mixtas, & ſolidas propono.

Vbi quidem quid reprehenſione dignum reputas? Dùm & Pappus Alexandrinus in Collectionibus Mathematicis, alijque in Propoſitionum Decadibus omnium conſenſu laudati extiterunt, quamuis in huiuſmodi

Digitized by Google

Operum voluminibus aliquis ordo rerum non appareat. Ingenio equidem tuo in præmiſſarum Exercitationum ſtudijs valdè exercitato iucunda rerum, quæ in præſenti Exercitatione ſunt varietas allatura ſolatium eſt, præter vtilitatem, qua prodeſt ijs, qui nouas inſtituere ſpeculationes deſiderant plurimarum ſcientiæ concluſionum, quamuis inordinatim proponantur. Illud etiam fortaſſe vtilius, vel ſine dubio iucundius in hoc opere ſenties, vbi tuo genio, & libero arbitrio poteris vni ex infraſcriptorum Theorematum reſolutionibus, cui primùm volueris incumbere, quamuis reliquorum demonſtrationes non videris, cum vnumquodque independenter à præcedentibus demonſtretur. Exercitatio ergò, quam præ manibus habeo diuerſorum ſtudiorum eſt, quæ mihi de tempore in tempus in huiuſmodi Theorematum reſolutionibus amici Geometræ propoſuerunt, de quibus quidem, cum in meorum ſtudiorum ocijs perpetrata ſint, ocia pariter ingenij tui, quod adeò benignè Indiuiſibilibus meis hucuſque defatigaſti, fraudare non valeo.

De

De modo facili deſcribendi Sectiones Conicas, & in omnibus vniformi.

DVm mea Geometriæ Ind. Librum Sextum contexerem incidi in modum deſcribendæ parabolæ ſatis facilem, quem in eo Libro Scholio 2. Prop. 9. ſtudioſis poſtmodum communicaui. Diù dolui non poſſe pariter hyperbolam, & ellipſim tam facili ratione deſcribi. At denique; animaduerti idem in ijs quoq; perfici poſſe, quod mihi non parum attulit voluptatis. Hunc ergo modum hic palam faciendum ad publicam vtilitatem duxi, quod præmiſſa ſequenti Lemmatica Propoſitione nunc præſtabo.

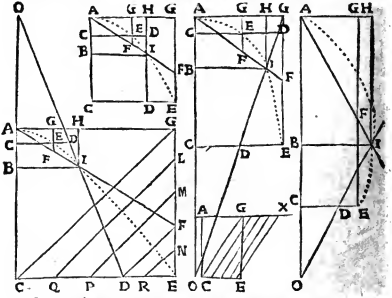
PROPOSITIO. I.

Sit coni ſectio, cuius vertex, A, & in ea ſumatur punctum quodlibet, I, per quod duæ rectæ ducantur, in parabola quidem, IA, &, IH, parallela diametro, AC, at in reliquis, IA, IO, ad extremitates diametri tranſuerſæ, AO: ſumpto rurſus in iiſdem quolibet puncto, E, per ipſum extendantur, CED, quidem parallela tangenti, AG, in vertice, A, &, GEF, parallela diemetro, AC, occurentibus ſibi his rectis lineis indefinitè productis in punctis, G, C, D, F, Dico igitur, GE, ad, GF, eſſe, vt, CE, ad, CD.

Pro-

Digitized by Google

PRoducantur per, I, in omnibus, IB, parallela, AG; & in hyperbola, ac ellipſi, IH, parallela ipſi, AC. Quod ergo quadratum, CE, ſit ad rectangulum ſub, CD,



BI, vt, CA, ad, AB, in parabola manifeſtum eſt, cum, CD, BI, oppoſita latera parallelogrammi, CI, ſint æqualia, ſitq; 10. Primi Con. quadratum, CE, ad quadratum, BI, nempè ad rectangulum ſub, CD, BI, vt CA, ad, AB; in reliquis verò ſic probabitur. De foris ſumpto quadrato, BI, intermedio inter quadratum, CE, & rectangulum, ſub, CD, BI, habebit quadratum, CE, ad rectangulum ſub, CD, BI, rationem compoſitam ex ratione quadrati, CE, ad quadratum, BI, & ex ratione quadrati, BI, ad rectangulum ſub, BI, CD. Sed quadratum, CE, ad quadratum, BI, eſt vt rectangulum,
21. Primi Conic. OCA, ad rectangulum, OBA; & quadratum, BI, ad rectangulum ſub, BI, CD (quia habent communem altitudi-
4. Sexti Elem. nem, BI) eſt vt, BI, ad, ED, nempè vt, BO, ad, OC, hoc eſt, ſumpta communi altitudine, AC, vt rectangulum ſub, BO, AC, ad rectangulum ſub, OC, CA. Igitur quadratum, CE, ad rectangulum ſub, BI, CD, rationem habet

com-

compoſitam ex ratione rectanguli ſub, OB, AC, ad rectangulum, OCA, & rectanguli, OCA, ad rectangulum, OB A. Duæ rationes verò rectanguli ſub, OB, AC, ad rectangulum, OCA, & rectanguli, OCA, ad, OBA, componunt rationem rectanguli ſub, OB, AC, ad rectangulum, OBA. Ergo quadratum, CE, ad rectangulum, ſub, BI, CD, erit vt rectangulum ſub, OB, AC, ad rectangulum, OBA, ideſt (propter communem altitudinem, OB) vt, CA, ad, AB. In omnibus ergo ſectionibus conicis (quod etiam in circuli circumferentia verificabitur) erit quadratum, CE, ad rectangulum ſub, BI, CD, vt, CA, ad, AB. Sed in iiſdem eſt, CA, ad, AB, vt, EG, ad, HI, propter æqualitatem oppoſitorum laterum parallelogrammorum, AE; AI, &, EG, ad, HI, de foris ſumpta media, GF, habet rationem compoſitam ex ratione, EG, ad, GF, & GF, ad, HI, Igitur quadratum, CE, ad rectangulum, ſub, BI, CD, habet rationem compoſitam ex ratione, EG, ad GF, &, GF, ad, HI. Sed idem quadratum, CE, ad rectangulum ſub, BI, CD, habet rationem compoſitam ex ratione, CE, ad, BI, & CE, ad, CD; ergo duæ rationes, CE, ad, BI, &, CE, ad, CD, ſimul ſumptæ æquantur duabus rationibus, EG, ad, GF, &, GF, ad, HI, ſimul ſumptis. At ratio, CE, ad, BI, hoc eſt, AG, ad, AH, æquatur rationi, GF, ad, HI. Ergo ratio reliqua reliquæ æquabitur. Erit ergo, GE, ad, GF, vt, CE, ad, CD. Quod oſtendendum erat.

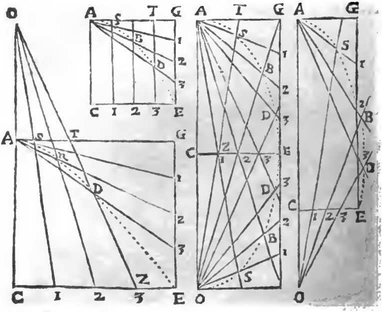
23. Sexti Elem.

4. Sexti Elem.

COROLLARIVM

Hinc manifeſtum eſt ſi velimus ex gr ſectionem deſcribere circa diametrum, AC, vertice, A, & in hyperbola, ac ellipſi latere tranſuerſo, AO, tangat autem, AG, ſectionem in, A, efficiatque cum, AC, quemcumque angulum, inſuper ſumpto quocunque puncto, E, per quod ſectio tranſire debeat; quod, completo parallelogrammo, AE, ſectiſque, CE, EG, ex. gr. in punctis, D, F, ita ut ſit, EC, ad, CD, ſicuti, EG, ad, GF, ac ductis in parabola, HD, parallela, AC, &, AF, in reliquis verò, OD, AF, iiſque, si opus sit, indefinitè productis; I, punctum occurſus earundem erit in propoſita ſectione.

PRO-



PROPOSITIO II.

Iiſdem ſuppoſitis Sectiones Conicas deſcribere.

SIt vertex, A, diameter, AC, latus tranſuerſum, AO; punctum in ſectione, E, tangenſq; ipſam in, A, nempè, AG, quæ cum, AC, efficiat quemcumque angulum, ſitque ipſa ſectio, AE, deſcribenda. Complebimus ergo parallelogrammum, ACEG, cuius latera ab, A, remotiora, nempè, CE, EG, in quotcunque partes æquales (vtrobique tamen eiuſdem numeri) vt ex. gr. in quatuor diuidemus, puncta diuiſionum notantes numeris 1.2.3.&c. à, C, G, verſus, E. Deinde in omnibus ſectionibus ducemus ab, A, ad puncta notata in, GE, occultas rectas lineas. Rurſus in parabola extendemus per puncta notata in, CE, indefinitas occultas parallelas ipſi, AC, ſed in reliquis ab, O, ad eadem puncta

puncta in, CE, notata extendemus, ac producemus, ſi opus ſit, occultas rectas lineas, ita vt occurrant prioribus ductis ab, A, ad puncta in, GE. Puncta ergo occurſuum primarum, ſecundarum, &c. vt, S, B, D, erunt in propoſita ſectione per Prop. ant. per quæ &, E, curuam leniter extendentes, habebimus optatam ſectionem per puncta continuata deſcriptam, vt apparet in appoſita figura.

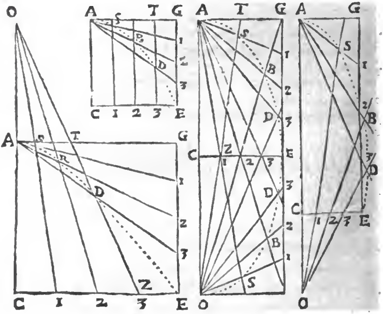
SCHOLIVM I.

AD parabolam ergo deſcribendam ſufficit dari, AC, CE, ad quemcunq; angulū ſtatuto vertice, vt in, A, in reliquis verò præter hæc determinandū eſt latus, ſeu diameter tranſuerſa, AO, Similiter quoad ellipſim obſeruandum eſt iiſdem datis nos poſſe deſcribere quartam partem eiuſdem, ſeù eadem quarta minorem, aut maiorem, modo iam dicto: cum verò ſemiellipſim deſcribere volemus, opus erit operationem efficere tam in parallelogrammo, OE, quam in, AE, quæ omnia apparent in proximè ſuperiori Schemate. Porrò integras ſectiones hac arte delineari poſſe ſuperfluum eſt commemorari.

SCHOLIVM II.

ETſi dictum eſt, CE, EG, in æquas partes, eiuſdemque numeri eſſe diuidendas, id tamen non eſt abſolutè neceſſarium, ſed ſufficit eas proportionaliter ſecari, vt patet ex Cor. Prop. ant. Hoc autem facilè obtinebimus, ſi ducentes rectam, CG, exempli gr. vt patet in figura hyperbolæ Propoſitionis primæ, eidem, CG, parallelas quotcunque extendemus, vt, QL, PM, DF, RN, ipſaſque ſpiſſiores vbicunq; opus eſſe agnouerimus, vt accuratius ſectio deſcribi poſſit: dictæ enim parallelæ proportionaliter ſecabunt latera, CE, FG. Has quidem parallelas facilè ducere artificibus notiſſimum eſt, verum facillimè fieri poterunt, ſi, quemadmodum apparet in figura Prop. prima, & in parallelogrammo, AE, ſeorſim poſitò, cuius productum eſt latus, AG, indefinitè in, X, aſſumpſerimus circino quaſcunque 2. Sex. El.

aquas partes tam in, CE, quam in, GX, iungentes notata puncta, prima nempè, ſecunda, tertia, &c. rectis lineis, quæ erunt ipſi, G C, parallela, & hoc in omni ſectione fieri poterit.



SCHOLIVM III.

SI in ſuperiori ſchemate Propoſitionis ſecunda daretur ex. gr. AT, latus rectum deſcribenda parabola, ſeu, AT, latus rectum, &, OA, tranſuerſum deſcribenda hyperbola, vel ellipſis, in angulo, GAC, tangentis, GA, in vertice, A, cum diametro, AC, non alio, vt antea, dato puncto in ſectione, prius aliquod punctum in ipſa ſectione quæreremus, quod ſic fieret. In diametro, AC, ſumpto quocunque puncto, C, & ab eo ducta tangenti, AG, indefinitata parallela, CE, rectangulo ſub, CA, AT,
14. Sec. Elem. *in parabola aquale ſumeremus quadratum, CE. At in reliquis, iuncta, AT, eaque producta indefinitè verſus, T, vt haberetur pun-*

punctum, Z, rectangulo ſub, AC, CZ, ſumeretur æquale quadratum, CE, & completo parallelogrammo, AE, ipſa ſectio, AE, vt ſupra deſcriberetur. Manifeſtum eſt enim quod punctum, E, eſſet in ſectione, cum quadratum, CE, ſit æquale rectangulo ſub, CA, &, AT, latere recto in parabola; in hyperbola verò, & ellipſi æquatur quadratum, CE, rectangulo ſub, AC, CZ, excedens in hyperbola latus rectum, AT, & in ellipſi ab eo deficiens rectangulo ſimili ei, quod ſub latere recto, AT, & tranſuerſo, AO, continetur, ijs conformiter, quæ in Elementis conicis traduntur. 11.12.13. 1. Conic.

Cum ſuperiorem praxim ex me quoque intellexiſſent Torricellius, & Roccha, eiuſdem ipſi quoque diuerſam à ſuperiori, elegantemque rationem attulerunt.

De mirabili quadam vi parabolica.

C*Vm plures, eaſque admirandas parabola proprietates habeat, quarum nonnullas in noſtro Speculo vſtorio explicauimus, nunc quandam inſignem tradimus, quæ conſiſtit in cogendis, ac conſtipandis lineis quas intra ſui cauitatem excipit ipſa parabola, ſeù conoides parabolicum axi æquidiſtantes, vt mox duabus præmiſſis ſequentibus lemmaticis Propoſitionibus oſtendetur.*

PROPOSITIO III.

Si quæcunque recta linea, AE, in duobus punctis, CD, ita ſecta fuerit, vt ſit, AE, AD, ED, quemadmodum quadratum, AC, ad quadratum, CD: tres rectæ, AE, CE, DE, proportionales erunt.

SI enim, CE, non eſt media proportionalis inter, A E, E D, talis erit vel



19.5. Ele. maior, vel minor ipſa, CE, ſit primò maior, vt, B E. Cum ergo ſit tota, AE, ad totam, BE, ſicuti ablata, BE, ad ablatam, ED, erit reliqua, AB, ad reliquam, BD, vt tota, AE, ad totam, BE. Quoniam verò, AE, BE, DE, ſupponũtur proportionales, erit, AE, ad, ED,
Cor. 2. 20 6. Elem. vt quadratum, AE, ad quadratum, EB. Et quia vt, AE, ad, EB, ita oſtenſum eſt eſſe, AB, ad, BD, ideò quadratum, AE, ad quadratum, EB, erit vt quadratum, AB, ad quadratum,
22.6. Ele. BD. Sed vt quadratum, AE, ad quadratum, EB, ita dictum eſt eſſe, AE, ad, ED. Ergo vt, AE, ad, ED, ita erit quadratũ, AB, ad quadratum, BD. Sed vt, AE, ad, ED, ita ſupponitur eſſe quadratum, AC, ad quadratum, C D. Igitur quadratum, AC, ad quadratum, CD, erit vt quadratum, AB, ad
14.6. Ele. quadratum, BD. Sed prima eſt maior tertia, nempè quadratum, AC, quadrato, AB, ergo & ſecunda quarta maior erit, hoc eſt quadratum, CD, maius quadrato, BD, ſed & eodem minus eſt, quod eſt abſurdum. Non ergo maior, CE, erit media proportionalis inter, A E, E D. Eodem modo oſtendemus nec minorem, CE, talem eſſe poſſe. Ergo, CE, erit talis media, ipſæque, AE, CE, DE, proportionales erunt. Quod, &c.

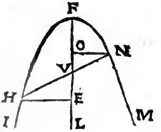
PROPOSITIO IV.

Sit quæcunque parabola, IFM, cuius vertex, F, diameter, FL, in qua ſumpto quocunque puncto, V, per ipſum hinc inde vſque ad ſectionem producatur recta, NVH, non parallela tangenti in, F, & à punctis, H, N, ordinatim ad, FL, applicentur, HP, NO. Dico tres, FP, FV, IO, proportionales eſſe.

Eſt

Digitized by Google

EST enim quadratum, HP, ad quadratum, NO, vt, PF, ad, FO. Sed vt quadratum, HP, ad quadratum, NO, ita eſt quadratum, PV, ad quadratum, VO; ſunt enim triangula, HPV, OVN, ſimilia propter parallelas, HP, NO, & ideò, HP, NO, PV, VO, proportionales, ac ſubinde earum quadrata proportionalia. Ergo, PF, ad, FO, erit vt quadratum, PV, ad quadratum, VO, & conſequenter tres, FP, FV, FO, proportionales erunt. Quod, &c.



20. Primi Conic.

4. Sex. Dlem.

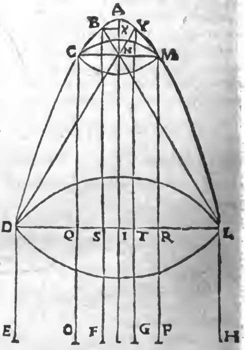
Ex. ant.

PROPOSITIO V.

Si in parabolam, DAL, cuius vertex, A, axis, AI, baſis, DL, focus, N, inter, IA, cadens, & per, N, applicatam, CNM, incidant parallelæ eidem axi, AI, vt, ED, HL, OC, PM, FB, GT, binæ æquidiſtantes ab, AI, ſecanteſq; DL, in punctis, Q, S, T, R, hæ autem, ac reliquæ huiuſmodi reflectantur à linea, DAL, vel à caua ſuperficie, DAL, conoidis, DAL, incident omnes in focum, N, vt probaui in meo Speculo vſtorio Cap. 9. Dico nunc quod, ſi eædem protenſæ vltra focum, N, ſecundò ab eadem linea, vel ſuperficie, DAL, reflectantur, eædem parallelæ incidentes in portiones, DC, ML, & æquidiſtanter axi, AI, & conſtipatiores egredientur ex, DAL, quam ingreſſæ fuerint.

Paral-

PArallelæ enim ex. gr. ED, HL,reflexę à punctis, D,L,concurrẽt, in, N,& vltra protenſę iterum incident in puncta, Y, B,à quibus reflectẽtur per, YTG, BSF,æquidiſtantes ipſi, AI, per oſtenſa in meo ſpeculo vſtorio Cap.9. in Coroll. hoc eſt ſtrictiores erunt in egreſſu, quam in ingreſſu, quantum, ST, minor eſt, DL. Hoc idem oſtendemus de parallelis,OC,PM,quę alternatim reflectũtur,nempè,OC, per, CMP, &,PM, per,MCO, & idem probabitur de alijs axi parallelis inter,ED,OC,vel inter,HL,PM,cadentibus, quod nempè,& parallelæ axi,& conſtipatiores reflectãtur in egreſſu à linea,vel ſuperficie,DAL,quã fuerint in ingreſſu.Quod,&c.



S C H O L I V M.

PArallelæ intra, OC, PM, ingredientes in egreſſu diſtantiores erũt inter ſe,vt facilè conſtabit ſi inſpiciamus,FSB, GTY,quæ ingreſſa in diſtantia,ST,egrediuntur per,LH, DE,in diſtantia,DL. Vis ergo parabolica tam in parabola,quam in conoide parabolico, DAL,cernitur in parallelis incidentibus in,DC, LM,quæ omnes ſecundò reflectuntur per portiones,CB,YM. Itaq; cum baſis conoidis,DAL,ſit circulus,DL,menſura quãtitatis parallelarum axi, AI, ingredientium cauam ſuperficiem eiuſdem,

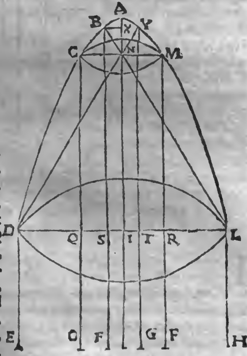
Digitized by Google

eiuſdem, incidentiumq; in, DC, ML, erit armilla, cuius latitudo eſt, DQ, RL, & menſura earundem parallelarum reflexarũ poſt concurſum in, M, iterũ à caua ſuperficie, CB, YM, egredientiũq; ex dicta caua ſuperficie, erit armilla, cuius latitudo, QS, TR. Si ergo detegamus quam rationem habeat armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, ſciemus, qua ratione in propoſita ſuperficie conoidali, DAL, magis conſtipentur parallelæ axi, AI, in egreſſu, quam fuerint in ingreſſu, quod ex ſequenti Propoſ. conſtabit.

PROPOSITIO VI.

In eadem ſuperiori figura ijſdem ſuppoſitis, armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, eſt vt, IA, ad, AN.

QVoniã enim circulus, DL, ad circulum, QR, eſt vt quadratum, DL, ad quadratum, QR, diuidendo, armilla, DQ, RL, ad circulum, QR, erit vt exceſſus quadrati, DL, ſuper quadratum, QR, ad quadratum, QR. Inſuper circulus, QR, ad circulum, ST, eſt vt quadratum, QR, ad quadratum, ST, vnde per conuerſionem rationis, circulus, QR, ad armillam, QS, TR, erit vt quadratum, QR, ad exceſſum q. QR, ſuper q. ST.

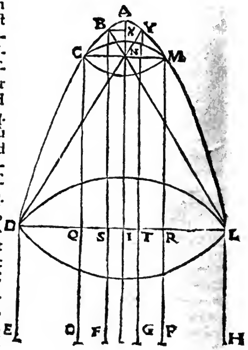


Ergo

Ergo ex æquo armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR; erit vt exceſſus q. DL, ſuper q. QR, ad exceſſum q. QR, ſuper q. ST, vel vt exceſſus q. DI, ſuper q. QI, ad exceſſum q. QI, ſuper q. SI. Applicetur nunc, BX, vnde, AI, AN, AX, proportionales erunt, ſed vt, AI, AN, AX, ita ſunt quadrata applicatarum, DI, CN, BX, vel quadrata rectarum, DI, QI, SI, ergo hæc erunt proportionalia. Cum ergo totum q. DI, ad totum q. QI, ſit vt q. QI, ablatum ad ablatum q. SI, erit reliquum ad reliquum, ideſt exceſſus q. DI, ſuper q. QI, ad reliquũ, ideſt ad exceſſum q. QI, ſuper q. SI, vt totum ad totum, nempè vt q. DI, ad q. QI, ſeù ad q. CN. Sed exceſſus q. DI, ſuper q. QI, ad exceſſum q. QI, ſuper, q. SI, eſt vt armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, vt probatum eſt. Et vt q. DI, ad q. CN, ita, IA, ad, AN. Ergo armilla, DQ, RL, ad armillam, QS, TR, erit vt, IA, ad, AN. Quod oſtendendum proponebatur.

4. huius. 20. Primi Conic.

20. Primi Conic.



COROLLARIVM I.

Fiunt ergo parallela axi, AI, in egreſſu conſtipatiores, quam erant in ingreſſu ſecundum rationem axis, IA, ad, AN quæ

eſt quarta pars lateris recti parabolæ, DAL, vt ego oſtendi in ſpeculo vſtorio, Cap. 9.

COROLLARIVM II.

Patet etiam ſi detur ratio diametri baſis conoidis parabolici ad illius axim, quod poterit proportio dictæ conſtipationis manifeſtari. Vt ſi in eadem figura detur ratio, DL, ad, IA, conſtabit ratio, DI, ad, IA, & quadrati, DI, ad q. IA, ſed quadratum, DI, æquatur rectangulo ſub, IA, & latere recto parabolæ, DAL, ergo nota erit ratio rectanguli ſub. IA, & dicto latere recto, ad quadratum, AI, hoc eſt (propter communem altitudinem, AI,) ratio lateris recti ad, AI. Cum verò, AN, ſit $\frac{1}{4}$ dicti lateris recti, conuertendo, conſtabit quā rationem habeat, IA, ad, AN, & ſubinde innoteſcet proportio dicta conſtipationis.

SCHOLIVM.

Ivxta ſuperius Cor. 2. effecta eſt ſequens tabella, in cuius prima columna ponuntur numeri partium axis cuiuſcunq; conoidis parabolici, cuius baſis diameter ſemper ſupponitur earundem partes 12. in 2. verò columna habentur numeri explicantes proportionem dictæ conſtipationis in propoſito conoide.

Vt ex. gr. ſi in ſuperiori figura, DL, fuerit 12. & axis, AI, earundem partium 18. in columna axis quæſito num. 18. ſumo e regione ipſius adiacēte columna ſub titulo proportionis, numeros 36. & 1. qui indicāt mihi in tali conoide parallelas axi fieri conſtipatiores in egreſſu, quam in ingreſſu ſecundum rationem 36. ad 1. Conſtat autem ex ſuperiori tabella ſi axis fuerit 3. & diameter baſis conoidis 12. quod in ingreſſu, & egreſſu erit eadem paralellarum conſtipatio; & ſi axis fuerit minus quam partes 3. in egreſſu potius parabolæ diſgregabuntur, & propterea tabella incipit à partibus 3. ipſius axis.

Axis	Proportio
3	1. 1
4	16. 9
5	25. 9
6	4. 1
7	49. 9
8	64. 9
9	9. 1
10	100. 9
11	121. 9
12	16. 1
13	169. 9
14	196. 9
15	25. 1
16	256. 9
17	289. 9
18	36. 1
19	361. 9
20	400. 9
21	49. 1
22	484. 9
23	529. 9
24	64. 1

Digitized by Google

De Perſpicillorum focis.

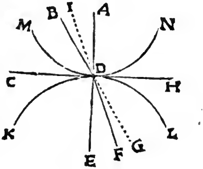
Si quis careat prænominato Speculo vſtorio, in quo nomen ſoci explicaui, ſciat focum à me appellari punctum illud, ad quod radij incidentes in quandam lineam, ſeu ſuperficiem, ſiuè paralleli, ſiuè conuergentes, vel diuergentes reflexi concurrunt, aut à quo diuergunt: vt in ſuperficiebus, quæ à ſectionibus conicis per ipſarum reuolutionem circa axim oriuntur, dum in ipſas incidunt radij, quarum Tabellam tradidi in dicto Speculo Cap. 23. Huius ope cum dicti foci præcisè ſciri poſſint, haud tamen hucuſq; detegere licuit quod ſciam vbinam radij paralleli axi ingredientes parabolam, hyperbolam, vel ellipſim cryſtallinam poſt ipſam refracti præcisè concurrant. Id verò ſatis propinq; obtinuit Keplerus in aliquibus lentibus cryſtallinis, ſeù perſpicillis ſuperficiebus ſphæricis contentis, docens in ſua Dioptrice vbinam eſſet punctum concurſus dictorum radiorum axi, hoc eſt radio per vmbilicum lentis perpendiculariter illius ſuperficiebus tranſeunte parallelorum, quem & focum appellauit. Cum verò non in omnibus perſpicillorum generibus, quæ planis, & cauis, vel concauis ſphæricis ſuperficiebus promiſcuè comprehenduntur focos adinuenerit, propterea quædam hic circa huiuſmodi doctrinam tum ad eam elucidandam, tum ad prædictos focos proximè inueniendos, eiuſdem Kepleri ſuppoſitionibus inſiſtens, quæ meæ menti occurrerunt, tradere decreui. Aſſumo igitur ex eodem hoc præcipuè, quod nempè radij

lumi-

luminoſe cryſtallum ingredientes vſq; ad gradum 30. inclinationis habent angulum refractionis, qui eſt circiter tertia pars inclinationis, quo præmiſſo ſequentes Propoſitiones demonſtrantur.

PROPOSITIO VII.

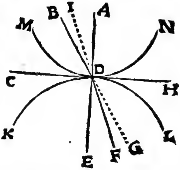
Radij è criſtallo in aerem egreſſi cum inclinatione infra gradus 20. refracti ſupperaddunt ſuæ inclinationi dimidium eiuſdem inclinationis.



SIt cryſtallum, CEH, & eius plana ſuperficies, CH, diſcriminans cryſtallũ ab aere, CAH, inſuper ſit radius, AE, incidens perpendiculariter ipſi, CH, qui ab aere, CAH, ingrediens in cryſtallum, CEH, penetrabit irrefractus ex cõmuni Opticæ doctrina. Sit nunc radius, BD, ipſi CH, &, AD, obliquus, faciẽs cum, AD, angulum, BDA, nempe inclinationem radij, BD, (Keplerus enim vocat inclinationẽ radij angulum, qui cõtinetur radio incidẽte in ſuperficiẽ diaphani, & perpẽdiculari ſupereandẽ ſuperficiem à puncto incidentiæ ducta) qui nõ ſuperet gradus 30. Radius ergo, BD, ab aere, CAH, in cryſtallũ, CEH, ingreſſus non rectè incedet, vt per, DG, ſed quia cryſtallũ eſt medium denſius, quam aer, ideò, BD, incendet vt per, DF, accedens ad perpendicularem, DE, anguluſque, GDF, dicitur refractio radij, BD, cuius inclinatio eſt quoque angulus, EDG, cum enim ſint rectæ, BDG, ADE, ideò anguli,

Diopt. Kepleri num. 1.

Axioma opticum Diopt. num. 2.



BDA, EDG, ſunt æquales. Quia verò ex allata Kepleri ſuppoſitione refractio eſt tertia pars inclinationis (intellige ſemper circiter) vſque ad gr. 30. inclinationis, ideò angulus, G D F, erit $\frac{1}{3}$ ipſius, GDE, &, GDF, $\frac{1}{2}$ ipſius, FDE. Si ergo acceperimus è conuerſò radium, FD, tanquam egredientem ex cryſtallo, C E H, in aerem, C A H, non ibit per, DI, quæ ſit in directum ipſi, DF, ſed quia à denſiori, ægreditur in medium rarius, diſcedet à perpendiculari, AE, vt communiter Optici docent. Sed dico quod incedet per, DB. Nam quando ingreditur, BD, & per, DF, ergo egrediẽs, FD, ibit viciſſim per, DB, eadem enim eſt refractio radiorum, ſiuè illi natura ſua ingrediantur ſiuè egrediantur, vel vt tales conſiderentur, inquit Keplerus num. 2. in ſua Dioptricę. Cum ergo anguli, E F D, ADI, ſint æquales, vt &, FDG, BDI, ſit autem, FDG, $\frac{1}{2}$ ipſius, FDE, erit quoque, BDI, $\frac{1}{2}$ ipſius, I D A. Sed, IDA, non excedens gr. 20. cum æquetur ipſi, FDE, inclinationi radij, FD, tanquam egredientis in aere, eſt eiuſdem pariter inclinatio; B D I, verò refractio. Ergo radius egrediens à cryſtallo in aerem infra gr. 20. inclinationis ſuperaddit ſuæ inclinationi angulum refractionis, qui eſt eiuſdem inclinationis ferè dimidium. Quod oſtendere opus erat.

Axioma opticum Diop. nu. 2.

COROLLARIVM I.

Patet ergo infra gr. 30. inclinationis, radios ab aere in cryſtallum ingreſſos facere angulum refractionis, qui eſt $\frac{1}{3}$ inclinationis ſeù diminuere per $\frac{1}{3}$ ſuam inclinationem, ſicuti dictum eſt angulum, GDF, eſſe $\frac{1}{3}$ ipſius, GDE; & eoſdem radios à cryſtallo in aerem egredientes infra gr. 20. facere angulum refractionis, qui eſt $\frac{1}{2}$ inclinationis, ſeù augere ſuam inclinationem per $\frac{1}{2}$ eiuſdem, ſicuti probatum eſt, IDB, refractionem radij,

F D,

Digitized by Google

FD, tanquam egredientis, eſſe ½ ipſius, IDA, inclinationis, qua idem radius, FD, egreditur è cryſtallo in aerem per, DB.

COROLLARIVM II.

IN eadem ſuperiori figura ſi cryſtallum non terminetur ad ſuperficiem planam CH ſed ad conuexam, KDL, cuius centrum, E, vel ad cauam, MDN, cuius centrum, A eadem quoque ſuperius dicta verificabuntur. Cum enim radij tranſeuntes per centrum ſphæricæ ſuperficiei ſint eidem perpendiculares, ideò erit, AE, perpendicularis tam ſuperficiei ſphæricæ, KDL, quam, MDN, exiſtenteque cryſtallo, KDLE, vel, MDNE, ipſum penetrabit irrefractus. Erit quoque inclinatio radij, BD, ingredientis in cauam, MDN, cryſtalli ſuperficiem angulus, BDA, vel, EDG. Iidem quoque erunt inclinatio eiuſdem, BD, ingredientis in conuexam, KDL. Similiter inclinatio radij, FD, egredientis è cryſtallo, KDL, vel, MDN, in aerem erit angulus, FDE, vel, IDA, ſicuti circa planam ſuperficiem, CH, dicebatur.

SCHOLIVM.

ANtequam ad lentium focos inquirendos accedamus cõgruit prius intelligere varietates, quæ in ipſis contingere poſſunt merito ſuperficierum planarum, cauarum, & conuexarum ſphæricarum, quibus comprehenduntur. Lentes ergo cryſtallinæ (idem de vitreis intellige, in quibus refractiones sũt proximè eædem cum prædictis vt in Dioptr. numero 6. inquit Keplerus) ſunt in forma diſci orbicularis latiores, quam profundiores, verum cum ſit parua profunditas eam negligit Keplerus, aſſumitque tamquam nulla eſſet. Illæ ergo aut ex vna parte ſunt planæ, & ex altera conuexæ, vel cauæ; vel ſunt vtrimque conuexæ ſiuè vtrinq; cauæ, cõuexitate, vel cauitate tam æquali, quam inæquali & has Keplerus puras quoque vocat. Similiter aut ſunt ex vna parte conuexæ, & altera cauæ, æquali, vel inæquali, conuexitate & cauitate, quas mixtas appellat: cum verò cauitas eſt ex maiori circulo, quam conuexitas, talis lens ab eo dicitur, Meniſcus. Propoſitum igitur mihi eſt tantum in præſenti demonſtrare in omnibus vnicam regulam generalem pro inueniẽdo earum foco proximè verificari, quę eſt huiuſmodi.

Dioptr. num. 25.

Diop. nu. 26.

Diop. nu. 27.

Diop. nu. 130.

Regu-

Google

Regula generalis ad inueniendos lentium, ſeù perſpicilorum focos.

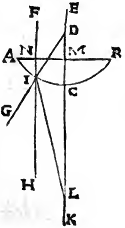
IN omnibus huiuſmodi lentibus, conuexis, vel cauis in contrarias partes vergentibus, vt aggregatum ex ſemidiametris conuexitatum, vel cauitatum (ſed couexis, vel cauis in eandem partem vergentibus, vt eorundem ſemidiametrorum differentia) ad ſemidiametrum conuexitatis, vel cauitatis radios parallelos aſpicientis: ita duplum reliquæ ſemidiametri eſt ad diſtantiam foci ab ipſa lente.

Diop. nu. 33. Poſtulamus autem & nos cum Keplero, vt lentis conuexæ, concauæ, vel mixtæ ſuperficies vtraque centrum ſui circuli habeat in eadem linea, quæ per medium eiuſdem vmbilicum tranſeat.

PROPOSITIO VIII.

Sit lens, ACB, planam habens ſuperficiem, AB, ad radios parallelos conuerſam, & conuexam, ACB, non excedentem gradus 30. cuius centrum, D; tranſeat vero radius indefinitus, EDMK, per centra, D, M, ſeù lentis vmbilicum, qui erit perpendicularis tam ſuperficiei, AB, quam, ACB, & ideò penetrabit lentem irrefractus, is verò ſacet conuexum, ACB, in, C; intelligantur nunc quotcunque alij radij eidem, EK, paralleli venientes ex parte, E, & in planum, AB, incidentes, cui neceſſariò perpendiculares erunt, & ideò irrefracti peruenient ad conuexum, ACB. Dico hos omnes in aerem egredientes,

tes, & indefinite protenſos, concurrere in punctum ipſius, EK, quod abeſt à lente, A C B, per duas ferè ſemidiametros, DC, conuexitatis, A C B.



SIt eorum vnus, FN; incidens in, N, qui lentem irrefractè penetrans perueniet in, I; producatur autem indefinitè in, H, & per, D, I, puncta protendatur recta, DIG. Quoniam ergo, DIG, venit à centro, D, conuexitatis, AC B, erit ipſa eidem conuexitati perpendicularis, & idcircò angulus, FID, vel illi æqualis, GIH, erit inclinatio radij, FH, ſuper conuexum, ACB; refringatur nunc radius, FI, in aerem egrediens, per, IL. Dico, LC, eſſe ferè duplam, CD. Cum enim, FI, in aerem egrediens per, IL, ſuperaddat ſuæ inclinationi, quæ eſt, GIH, dimidium eiſdem (eſt, namque, GIH, minor quam gr. 20. nam æquatur angulo, IDC, ſeù, quoad numerum graduum, arcui, IC, qui nõ eſt maior, AC, gr. 15. cum, ACB, ponatur non excedere gr. 30.) erit angulus, LIH, ½ ipſius, HIG, ſed, LIH, æquatur ſibi coalterno, ILD, &, HIG, interiori, IDL, ergo, IDL, erit duplus anguli, ILD. Sed in arcubus, & angulis infra gr. 15. ſinus recti eorundem ſunt ferè in eadem ratione cum iiſdem arcubus, vel angulis, vt & Keplerus inquit num. 34. Ergo ſinus anguli, D, duplus erit ſinus anguli, L, latera verò, LI, ID, ſunt vt ſinus angulorum, D, L. Igitur, LI, erit duplum ipſius, ID. Sed, LI, ponit Keplerus in huiuſmodi lentibus inſenſibiliter differre ab, LC, negligit enim ipſarum craſſitiem, vt iam dixi. Ergo, LC, erit ferè dupla ipſius, CD. Focus igitur, L, lentis, ACB, abeſt ab eadem per duas ferè ſemidiametros, ſeù per integram diametrum conuexitatis. Quod oſtendendum

Cor. 2. ant.

Prop. ant.

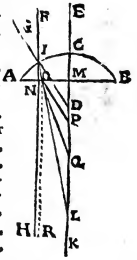
Ex Trigonometria.

dum

dum erat. Hæc paululum differt à demonſtratione, quam in Dioptr. affert Keplerus num. 35. quæ ad ipſius ampliorem declarationem hic poſita eſt.

PROPOSITIO. IX.

Si eadem lens, ACB, obuertat conuexum, ACB, ad radios parallelos; Erit nihilominus eiuſdem focus diſtans a lente ferè per diametrum conuexitatis.



SIt, EK, radius vt ſupra per medium lentis, M, C, incedens, cui ſumatur quicunque alius parallelus, vt, FI, incidens in conuexum in, I, qui ingrediens lentem ibit non rectè, vt per, INH, ſed accedet ad perpendicularem tranſeuntem per, I, quæ ſit; DIG, diminuens per $\frac{1}{3}$ ſuam inclinationem. Cum ergo inclinatio radij, FIH, ſuper cōuexum, ACB, ſit angulus, GIF, vel, HID, ibit per, IL, faciens angulum, HIL, refractionis, qui erit $\frac{1}{3}$ inclinationis, HID, & $\frac{1}{2}$ anguli, LID. Cum verò, LIH, æquetur ſibi coalterno, ILD, erit, ILD, $\frac{1}{2}$ ipſius, LID, quare cum, ID, ad, DL, ſit proximè vt angulus, L, ad angulum, I, ſicuti in demonſtratione Prop. ant. dicebatur, erit, ID, $\frac{1}{2}$ DL, & conuertendo, erit, LD, dupla, DC, &, LC, tripla, CD. Ex quo apparet, ſi radijs parallelis ipſi, EK, poſt incidentiam in conuexum, ACB, nil aliud contingeret, quod omnes concurrerent in, L, nēpè in diſtantia ſexquidiametri conuexitatis ab ipſa lente. Sed quia, IL, occurrit plano, AB, vt in, O, ibique iterum refringitur, quærendum eſt ad quod punctum ipſius, EK, concurrant. Ducatur ab, O, recta, OR, parallela ipſi, FH, &, OP, ipſi, ID. Erit ergo angulus, ROL, inclinatio radij, IO, ſuper,

Diop. n. 2.

Cor. 2. 7. huius.

Cor. 17. huius.

ſuper, AB, qui idcircò egrediens à cryſtallo in aerem ipſam per dimidiũ augebit; incedat per, OQ, angulus ergo, LOQ, erit $\frac{1}{2}$ anguli, LOR, &, LOR, eſt $\frac{1}{4}$ ipſius, LOP, ſicuti, LIH, eſt $\frac{1}{4}$, LID, vt ſuperius probatum eſt. Ergo, LOQ, erit $\frac{1}{8}$ ipſius, LOP. Sed $\frac{1}{8}$, & $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{3}{8}$, quare, LOQ, LOR, ſcilicet angulus, QOR, erit $\frac{1}{2}$ anguli, ROP, quare, ROQ, QOP, vel, OQP, POQ, erũt æquales, nam coalterni, ROQ, OQP, ſunt æquales. Erit igitur, PQ, æqualis ipſi, PO, ſicuti &, QD, erit ferè æqualis ipſi, DI, in lentibus enim paruæ craſſitiei ſunt, IO, CP, quaſi parallelæ. Quare erit, QC, ferè dupla, CD, hoc eſt erit ferè tantum à vero aberratio, quantum importabit lentis craſſities, ob quam, QD, verè maior eſt quã, DI. Erit igitur foci, Q, à lẽte, ACB, diſtantia ferè integræ diametri conuexitatis. Quod &c. 7. huius.

COROLLARIVM I.

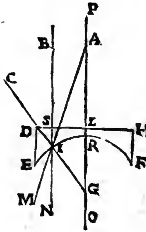
Hinc patet radios parallelos ipſi, EK, in conuexum ingredientes ſi nihil amplius eis accidere ſupponatur, omnes concurrere in punctum, vt, L, diſtans à conuexo per tres ſemidiametros conuexitatis.

COROLLARIVM II.

Patet inſuper nihil referre vtram faciem lentis ad parallelos conuertamus, nempè vel planam vel conuexam, prouenit enim vtrobiquè ferè eadem foci diſtantia à lente. Hoc inculcat Keplerus *in Dioptr. num.* 138. *rationibus, quas Lector ibidem videre poterit quanti valeant; fatetur autem non afferri ab eo accuratam demonſtrationem, quapropter ſtudioſus ab eo ad numeros ablegatur, quibus detegat quantum à veritate aberret hæc propoſitio. Nos autem qua potuimus ad eam confirmandam in medium attulimus.*

PROPOSITIO X.

Sit lens,DHFE,eiuſque plana ſuperficies ad parallelos conuerſa,DH,& caua,ERF,nō excedens gradus 30. cuius centrum,G,radiuſque per centra,L,R,G,incedens,PL RGO: Huic paralleli venientes ex parte,P,incident perpendiculariter in planum,DH,penetrabuntq; idcircò irrefracti. Dico igitur eoſdem incidentes in,ERF,& è cryſtallo in aerem egredientes omnes fore refractos per rectas in directum puncto in,PL,aſſumpto conſtitutas, quod aberit à lente ferè per diametrum cauitatis. Hoc punctum focus quoque dicitur, non quia radij in illud cōcurrant, ſed quia in directum ipſius diuergūt.



Sit vnus ex dictis parallelis,BS, qui incidēs in,S,penetrabit irrefractus in,I,vltra quod īdefinitè protēdatur, vt in,N,extendaturq; à cētro,G,per,I,recta,GIC. Erit ergo angulus,BIC,vel,NIG, inclinatio radij,BN,ſuper ſuperficiē,ERF. Sit āgulus,MIN, ½ ipſius,NIG,& ꝓducatur, MI, donec occurrat ipſi, PO, vt in, A. Radius ergo, BSI, egrediens in aerē ibit per,IM,adiūgens ſuæ inclinationi,NIG, dimidiū,nēpè angulum,MIN, eſtque,MI,in directū ipſi, A. Quia verò, MIN, angulus ęquatur interiori,IAG, &,NIG,ſibi coalterno,IGA,erit,IGA,duplus ipſius,IAG, ergo & latus,AI,duplum

Cor.1.7. huius.

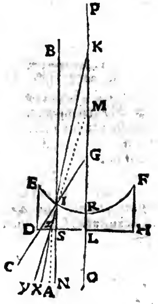
7.huius.

plum

plum erit lateris, IG; ſed, AI, inſenſibiliter differt, ab, A R, in lentibus paruæ craſſitiei. Ergo, AR, erit fere dupla, RG. Abeſt ergo, A, focus à lente fere per diametrum cauitatis. Quod, &c.

PROPOSITIO XI.

Si eadem lens, DHFE, obuertat cauam, ERF, ad radios parallelos: erit nihilominus eiuſdem focus diſtans à lente ferrè per diametrum cauitatis.



SIt eadem lens, DHF E, obuertens cauũ, ERF, ad radios parallelos, axis, PO, tranſiens per cẽtra, G, R, L, cui vnus radiorum, vt, BI, æquidiſtet incidens in cauum, ERF, vt in I, qui indefinitè protendatur vt in, N, ſecans planum, DH, in, S. Similiter à centro, G, per, I, educatur, GIC, Inclinatio ergo radij, B N, ſuper cauum, ERF, erit angulus BIG, vel, N IC. Radius ergo, BI, incidens in cryſtallum non ibit per, IS, ſed accedens ad perpendicularem, GC, diminuet per $\frac{1}{3}$ ſuam inclinationem, incedens per, IZ, quæ indefinitè ſit producta in, X, K, conſtituitque angulum, XIN, $\frac{1}{3}$ ipſius, NIC, & $\frac{1}{2}$ ipſius, XIC. Sed, NIX, æquatur angulo interiori, GKI, &, XIC, ipſi, KIG; duplus ergo erit ãgulus,

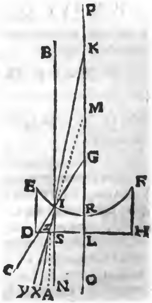
Cor. 2. 7. huius.

Cor. 1. 7. huius.

 KIG,

Digitized by Google

KIG, anguli, IKG, & ideò, GK, dupla erit ipſius, GI, vel, GR, &, KR, tripla, RG. Radius ergo, BI, per, IZ, diuergit à puncto, K, quod abeſt à lente per tres ſemidiametros cauitatis, vt de conuexo probabatur in Prop. 9.



Ducatur nunc per, Z, ipſa, ZA, parallela, PO, & ſubindè plano, EF, perpendicularis. Erit ergo angulus, AZX, inclinatio radij, IZX, ſuper planum, EF, illi ergo addito angulo, YZX, nempè ½, XZA, radius, IZ, egredietur à lente in aerem per, ZY, quæ producta verſus, LP, illi incidat vt in, M. Cum ergo, XZA, ſit æqualis ipſi, ZKM, interiori, &, YZX, ipſi, KZM, erit, KZM, ½ ipſius, MKZ. Ergo &, KM, erit ½ ipſius, MZ, (ſemper .n. ſumus infra gradus 15. & ſinus ſunt ferè vt anguli, & oppoſita angulis latera) vel ferè ipſius, ML, ob lentium paruitatem. Ergo punctum, ſeu focus, M, à quo diuergunt paralleli ipſi, PO, bis refracti in lente, DHFE, aberit à cauitate, ERF, diametro ferè cauitatis. Quod, &c.

7. huius.

COROLLARIVM I.

Colligitur ex hac parallelos axi huiuſmodi lentis primò refractos à cauitate, diuergere à puncto in axi, quod abeſt per tres ſemidiametros eiuſdem cauitatis à lente; cum oſtenſum ſit, IZ, diuergere à puncto, K, quod per tres ſemidiametros, GR, ferè abeſt à cauitate, ERF.

COROL

COROLLARIVM, II.

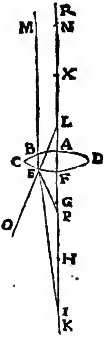
Colligitur vlterius quamcunq; lentis huiuſmodi faciem ad radios parallelos conuertamus, eandem foci diſtantiam à lente, integra nempè diametri cauitatis, prouenire. Vide Schol. 27. huius.

Hæc de lentibus ex vna parte planis oſtendimus, in quibus tamen & præallatam regulam generalem quodamodo verificari inferius declarabimus.

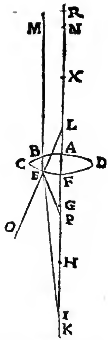
PROPOSITIO XII.

Lentis ex vtraque parte quomodocunque conuexæ focum inuenire.

SIt lens vtrinq; conuexa quomodocunq; CADF, cuius arcus, CAD, CFD, non ſuperent gr. 30. axis, RK, & in eo, L, centrum conuexi, CFD, &, G, centrum conuexi, CAD, æqualeſq; FL, LX, XN, inter ſe, nec non, AG, GH, HI, pariter inter ſe. Quæritur focus huius lentis. Sit, MB, vnus radiorum ipſi, RK, parallelorum lenti incidens in, B, qui vlterius protenſus incideret in, I, ſi non occurreret alteri conuexo, CFD, ſit tamen ducta, BEI, recta occurrens conuexo, CFD, in, E, perque, E, ab, L, educatur, LEO. Cor. 1. 9. huius. Quoniam ergo radij, BI, inclinatio ſuper conuexum, CFD, eſt angulus, BEL, vel, OEI, ideò radius, BE, è lente in aerem egrediens ibit per, E P, faciens angulum, PEI, dimidium ipſius, IEO. Cor. 7. huius. Quoniam verò vt angulus, PEI, ad, PIE, ita eſt, IP, ad, 7. huius.



PE,



PE, vel ad, PF,(in paruis enim lentibus inſenſibiliter differũt, PE,PF,) ideò vt duplus anguli, PEI, nempè vt, OEI, vel duo ſimul, ELI, EIL, ad eundem, EIL, ita duplum, IP, ad, PF, vel ita, IP, ad ½, PF, & diuidendo, vt angulus, ELI, ad, EIL, ita exceſſus, IP, ſuper ½, PF, ad ½, PF. Sed vt angulus, ELI, ad, EIL, ita, EI, ad, EL, vel ita, IA, ad, LF, (inſenſibiliter enim differunt, IE, IA, ob lentium paruitatem) ergo, IA, ad, LF, erit vt exceſſus, IP, ſuper ½, PF, vel, PA, neglecta lentis craſſitie, ad ½, PA. Et componendo, erit, IA, cum, LF, ad, LF, vt, IP, ad ½, PA. Vnde erit, IA, cum, LF, ad duplam, LF, ſeu ad, XF, vt, IP, ad, PA, & iterum componendo, erit, IA, cum, LF, &, XF, ideſt erit, IA, cum, FN, ad, XF, vt IA, ad, AP. Et permutando, erit, IA, cum, FN, ad, IA, vt, XF, ad, AP, vel erit, GA, cum, FL, (prædictorum ſubtripla) ad, GA, vt, XF, ſeù dupla, LF, ad, AP, diſtantiam foci, P, à lente, CD, eodem enim modo reliquos radios ipſi, RK, parallelos ad, P, concurrere oſtendemus. Concluditur ergo quod vt aggregatum ex ſemidiametris conuexitatum, nempè, GA, FL, eſt ad ſemidiametrum, GA, conuexitatis parallelos aſpicientis, ita duplum ſemidiametri reliquæ, LF, eſt ad, AP, diſtantiam foci à lente. Et hæc eſt regula generalis ſuperius tradita. Datis igitur dictis ſemidiametris, poterit quæſitus focus obtineri. Quod &c.

Poſt Schol. 7. huius.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX hoc conſtat focum lentis vtrinq; æqualiter conuexa diſtare à lente ferè ſemidiametro conuexitatis. Aggregatum enim ſemidiametrorum conuexitatum, quia ſunt æquales, eſt ad alteram ſemidiametrum, vt 2. ad 1. ſed ita eſt duplum reliquæ ſemidiametri ad diſtantiam foci. Ergo hoc duplum ad diſtantiam foci eſt vt 2. ad 1. focus ergo per vnam ſemidiametrum conuexitatis diſtabit à lente. Hoc autem probat quoq; particulari demonſtratione Keplerus in Dioptr. num. 39. quod nos per hanc omnibus lentibus vtrinq; conuexis communem collegimus.

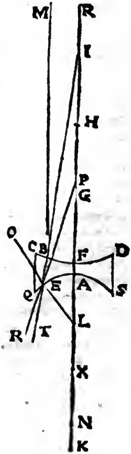
COROLLARIVM II.

PAtet inſuper eandem ferè diſtantiam foci à lente inæqualiter conuexa prouenire, quamcumq; faciem ad parallelos obuerteris. Eſt enim ſemper vt aggregatum ſemidiametrorum ad ſemidiametrum conuexi parallelos aſpicientis, ita duplum reliquæ ſemidiametri ad diſtantiam foci, vt probatum eſt. Altera autem iſtarum ſemidiametrorum vocetur, A, & reliqua, B. Si ergo cõuexum ipſius, A, reſpiciat parallelos, erit vt, A, B, ad, A, ita duplum, B, ad diſtantiam foci. At ſi conuexum ipſius, B, reſpiciat parallelos, erit vt, A, B, ad, B, ita duplum, A, ad diſtantiam foci. Hinc autem proueniunt foci æquales à lente diſtantiæ, quia cum ſit, A, B, ad, A, ita duplum, B, ad diſtantiam foci, rectangulum ſub, AB, & diſtantia foci æquatur rectangulo ſub, A, & duplo, B. Similiter cum ſit, A, B, ad, B, ita, duplum, A, ad diſtantiam foci, rectangulum ſub, A, B, & diſtantia foci æquatur rectangulo, ſub, B, & duplo, A. Verum rectangulum ſub, B, & duplo, A, æquatur rectangulo ſub, A, & duplo, B, nam hæc habent latera reciproca. Ergo rectangulum ſub, A, B, & prima foci diſtantia æquatur rectangulo ſub, A, B, & ſecunda foci diſtantia, ſed communis eſt altitudo, A, B, ergo ambæ foci diſtantiæ, quãcumq; faciem lentis ad parallelos conuertamus erunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XIII

Lentis ex vtraque parte quomodocunque cauæ focum inuenire.



RAtio eandem inueniendi, & demonſtratio ſimilis eſt præcedenti. Sit enim lens vtrinq; caua, CFDSAQ, cuius tamen arcus, C F D, Q A S, non excedant gradus 30. centra cauitatũ, G, L, & axis, RK, in quo ipſi, GF, ſumptæ ſint æquales, GH, HI, & ipſi, AL, pariter, LX, XN. Sit inſuper vnus parallelorũ axi, R K, ipſe, MB, qui occurrens lenti in, B, refringetur per, BE, in directum ipſi, I, incidens ipſi, QAS, in E, per quod ab, L, educatur, LEO. Erit ergo radij, B E, inclinatio ſuper, QAS, angulus, BEO, vel continuato, I B E, vt in, T, angulus, TEL. Si ergo fiat angulus, TER, $\frac{1}{2}$ ipſius, TEL, radius, BE, in aerem egrediens ibit per, ER, quæ producta verſus, E, incidat axi, RK, vt in, P, eritque focus, P, à quo poſt duas in lente effectas refractiones diuergent paralleli venientes ex parte, R. Quoniam ergo angulus, P E I, ad, PIE, eſt vt, IP, ad, PE, vel ferè ad, PF, erit vt duplus anguli, PEI, vel, RET, nempè, TEL, vel vt duo ſimul, ELI, EIL, ad

Cor. 1. 11. huius.
Cor. 1. 7. huius.
7. huius.

cun-

eundem, EIL, ita duplam, IP, ad, PF, vel ita, IP, ad $\frac{1}{2}$ PF. Et diuidendo vt angulus, ELI, ad, EIL, ita erit exceſſus, IP, ſuper $\frac{1}{2}$, PF, ad $\frac{1}{2}$, PF. Sed vt angulus, ELI, ad, EIL, ita, EI, ad, EL, vel ita, IF, (neglecta lentis craſſitie) ad, AL. Ergo, IF, ad, AL, erit vt exceſſus, IP, ſuper $\frac{1}{2}$, PF, ad $\frac{1}{2}$, PF. Et componendo, erit, IF, cum, AL, ad, AL, vt, IP, ad $\frac{1}{2}$, PF. Vnde erit, IF, cum, LA, ad duplam, LA, hoc eſt ad, XA, vt, IP, ad, PF. Et iterum componendo, erit, IF, cum, AL, &, AX, ſeù cum, AN, ad, AX, vt, IF, ad, PF: permutandoq; erit, IF, cum, AN, ad, IF, ſeù eorum ſubtripla, hoc eſt, GF, cum, AL, ad, GF, vt, AX, ſeù dupla, AL, ad, PF. Erit ergo & hic, vt aggregatum ſemidiametrorum cauitatum, nempè, GF, AL, ad ſemidiametrum cauitatis parallelis obuerſæ, ſcilicet ad, GF, vt duplum reliquæ ſemidiametri, hoc eſt dupla, AL, ad, PF, diſtantiam foci à lente conformiter ſuperius traditæ regulæ generali. Datis igitur ſemidiametris poterit focus inueniri. Quod, &c. Poſt Schol. 7 huius.

SCHOLIVM.

Hic quoque vt in Cor. primo Prop. ant. factum eſt, cum cauitates erunt æquales, colligemus focum à lente diſtare ferè per ſemidiametrum cauitatis. Cum verò cauitates erunt inæquales concludemus, vt in Cor. 2. proximè ſuperiori, eandem foci diſtantiam à lente prouenire, quamcunque illius faciem ad parallelos radios conuertamus.

Hactenus de lentibus egimus, quas Keplerus puras appellauit, nunc verò tranſibimus ad mixtas.

✠

PROPOSITIO XIV.

Si lens ſit conuexa ex vna parte, & ex altera caua, conuexumque aſpiciat parallelos axi. Dico ſi centrum cauitatis fuerit diſtans à conuexo per ſexquidiametrum eiuſdem conuexi, quod focus erit in ipſomet centro cauitatis. At ſi centrm cauitatis diſtabit à conuexo plus eiuſdem ſexquidiametro, focus diſtabit à conuexo minus eodem ſexquidiametro. Vlterius ſi centrum cauitatis diſtauerit minus ſexquidiametro conuexi, ſed plus ſemidiametro eiuſdem conuexi, focus erit diſtans plus ſexquidiametro conuexi. Et centro cauitatis foci diſtante per ſemidiametrum conuexi, nullus erit focus, ſed radij axi paralleli refringentur quoque eidem paralleli. Ac denique centro cauitatis propius ſemidiametro conuexi ipſi conuexo exiſtente, refringentur diuergentes à foco, qui erit vltra lentem verſus parallelos axi.

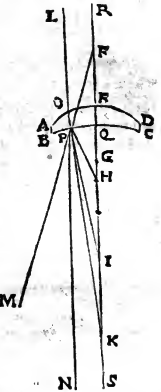
Vide Keplerum in Diopt. nu. 130.

SIt lens, cuius conuexum, AED, aſpiciens parallelos axi, RS, venientes ex, R, eiuſque centrum, G. Cauitas verò ſit, BQC, eiuſque centrum, I, ſexquidiametro conuexi, AED, diſtans, ab, E. Supponimus autem hic quoque, vt ſemper in hiſce lentibus, arcus, AED, BQC, non excedere gr. 30. ſeù hinc idem ab axi de eiſdem non aſſumi plus gradibus 15. Sit nunc vnus radiorum ipſi, RS, parallelorum, LO, qui refringetur per, OI, in, I, focũ. Secabitque, BQC, perpendiculariter, vnde in huiuſmodi lentibus radij axi paralleli non patiuntur niſi vnam refractionem, quæ fit in, AED. Et per hoc ſatisfactum eſt Propoſitionis primæ parti.

Cor. 1. 9. huius.

Sup-

Supponamus nunc, cæteris iiſdem manentibus, centrũ cauitatis, BQC, eſſe citra, I, vt in, K; radius igitur, LO, primò refractus in, AED, dirigetur in, I, ſed incidens in, BQC, vt in, P, ſecundò refractus, recedet à perpendiculari, PK, & à, PI, ibitque vt per, PH, concurrens cum axi, RS, inter, EI, eritque focus, H, diſtans ab, E, minus, EI, ſexquidiametro conuexi, AED. Cor.1.9. huius.



Sit nunc centrum cauitatis vt in, H, verſans inter ſexquidiametrum, EI, & ſemidiametrum, EG. Dico radium, LOP, ſecundò refringi, ad punctum citra, I, vt in, K. Vt hoc probetur ſupponemus, prius, IH, eſſe duplam, HQ, vnde, IH, erit dupla, HP, & angulus, HPI, erit ferè duplus anguli, HIP. Cum verò, HPI, ſit inclinatio radij, OP, ſuper, BQC, ponitur enim, H, eſſe illius centrum, ideò, OP, egrediens è lente, vt per, PN, faciet angulum, IPN, cuius erit duplus ipſe, IPH, ſed, IPH, eſt etiam duplus ipſius, HIP. Ergo, HIP, IPN, coalterni erunt æquales, & ſubinde parallelæ, PN, RS. Conſideret ergo Lector quod cum centrum eſt citra, I, focus eſt inter, IE, cum centrum eſt in, I, focus eſt in eodem, I, cum centrum eſt in, H, ita vt, IH, ſit dupla, HQ, nullus eſt focus, ſed radij ſecundò refracti incedunt paralleli axi, RS. Ergo cum centrum erit inter, IH, radij non refringentur paralleli axi, RS, ſed in illius punctum concurrent vt in, K, poſito centrum, H, vt dicebatur eſſe inter ſexquidiametrum, EI, & ferè ſemidiametrum, Cor.2.7. huius.

 EG.

EG. Si enim intelligamus, I H, eſſe duplam, HQ, vt, IG; dupla eſt, GE, ob paruam lentis craſſitiem parum diſtabit punctum, H, ab ipſo, G, eruntque, HQ, GE, ferè ęquales, &,BQC, AED, ferè ex æqualibus circulis.

Denique hinc apparet ſi centrum cauitatis propius ipſi, Q, ſumatur, quam eſt, H, ſeù, G, radios ſecundò fore refractos non per lineas concurrentes in aliquod punctum ipſius, E S, vel eidem parallelas, ſed per lineas diuergentes, vt eſt ex. gr. P M, quæ diuergit à puncto, F, qui erit focus huius lentis vltra ipſam conſtitutus. Quod,&c.

COROLLARIVM.

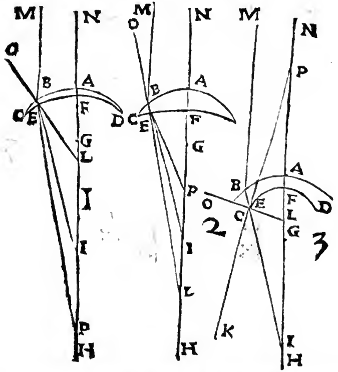
Hinc apparet quando cauitas eſt ex maiori circulo, quam conuexitas, haberi aliquem concurſum radiorum ſecundò refractorum; cum, QS, focumque eſſe in, QS. Cum verò ſunt ex æqualibus circulis patet nullum eſſe focum, ſed radios axi parallelos ſecundò refrangi. Et cum cauitas eſt ex minori circulo, quam conuexitas, ijdem fiunt diuergentes, à puncto, ſeù foco, in, E R, conſtituto.

PRO:

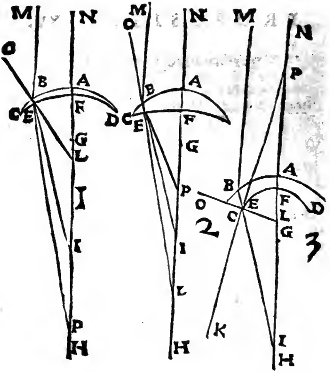
Digitized by Google

PROPOSITIO. XV.

Præfata lentis focum inuenire.



Sit lens, CADF, cuius axis, NH, tranſiens per media illius ſuperficierum puncta, A, F, conuexum, CAD, ſuperq; centrum, G, quod reſpiciat parallelos radios venientes ex parte, N; ſit inſuper cauum, CFD, cuius centrum ſi eſſet in, I, diſtans à lente per triplum ſemidiametri, AG, ſeu ſexquidiametro conuexi, CAD, iam conſtat omnes radios parallelos axi, NH, concurſuros fore in eodem puncto, Per ant.



cto, I. Similiter ſi centrum cauitatis, CFD, Foret in, G, circiter ij reflecterentur paralleli eidem axi, NH. Sit ergo caui, CFD, centrum in, L, extra dicta duo puncta, iuxta diuerſos caſus, qui in 3. figuris apparent: & quoniam neceſſariò ſequitur aliquis concurſus cum axi, NH, radiorum, ſecundò in lente refractorum ex Cor. ſuperiori, ideò nunc ille concurſus, ſiuè focus eſt inueniendus.

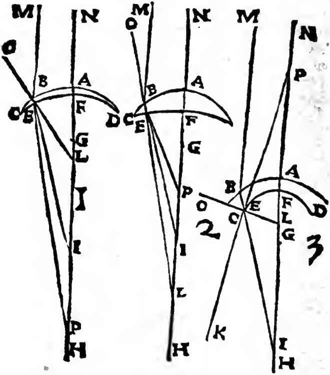
Cor. 1. 9. huius. Eſto vnus dictorum radiorum, MB, quod à puncto incidentiæ, B, per rectam, BI, dirigetur in, I, ſed incidens in cauum, CFD, vt in, E, refractus incidet in aliud punctum axis, NH, vt in, P, recedens à perdendiculari ſuper, CFD, tranſeunte per, E, quæ ſit, LEO, & faciens angulum, PEI, vel in 3. figura, KEI, ½ ipſius, IEL. Quoniam ergo angu-

angulus, ELF, ad, IEL, eſt vt, EI, vel, FI, ad, IL; latera enim ſunt vt ſinus dictorum angulorum, & ſinus ferè vt dicti anguli, quia ſunt infra gradus 15. erunt in 1. & 3. fig. anguli, LEI, LIE, (qui æquantur exteriori, ELF,) ad, LEI, vt, FI, ad, IL, & diuidendo erit, LIE, ad, LEI, vt, FL, ad, LI: ſed in 2. fig. erunt componendo, ELF, IEL, hoc eſt EIF, ad, IEL, vt, EL, vel, FL, ad, LI. Eſt autem, IEP, vel, IEK, in 3. fig. $\frac{1}{2}$ ipſius, IEL. Ergo, FIE, ad, IEP, vel, IEK, erit vt, FL, ad $\frac{1}{2}$, LI, vel vt dupla, FL, ad, LI. Eſt verò, FIE, ad, IEP, vel, IEK, vt, EP, vel, FP, (neglecta nempè ſemper lentis craſſitie) ad, PI. Ergo vt dupla, FL, ad, LI, ita eſt, FP, ad, PI, Et permutando, vt dupla, FL, ad, FP, ita eſt, LI, ad, IP, in omnibus his lentibus.

Nũc in 1. fig. erit componendo, dupla, FL, cum, FP, ad FP, vt, LP, ad, PI. Cum verò ſit vt dupla, FL, cum, FP, tota nempè vt tripla, FL, cum, LP, tota, ad totam, FP, ita ablata, LP, ad ablatam, PI, erit reliqua, hoc eſt tripla, FL, ad reliquam, FI, vel, AI, vt tota ad totam, nempè vt dupla, FL, cum, FP, ad, FP. Et diuidendo erit exceſſus triplæ, FL, ſuper, AI, (quia enim, FL, ſuperat, AG, etiam triplum ſuperat triplum) ad, AI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt exceſſus triplæ, FL, ſuper, AI, ad, AI, ita ſunt eorum ſubtripla, videlicet ita exceſſus, FL, ſuper AG (quæ eſt $\frac{1}{3}$ ipſius, AI,) eſt ad, AG. Ergo vt differentia inter, FL, AG, ſemidiametros caui, & conuexi, ad, AG, ſemidiametrum conuexi parallelos aſpicientis, ita eſt dupla, FL, ſemidiametri reliquæ ad, FP, diſtantiam foci. Quod eſt iuxta datam regulam generalem. 19. 5. Elem.

In 2. fig. cum ſit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, & vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia; erit dupla, FL, cum, LI, ad, FI, ſeù dupla, AL, cum, LI, ad, AI, (parua enim in his proportionibus intereſt differentia) vel dupla, AI, cum tripla, LI, ad, AI, ſiuè tripla, GI, cum tripla, IL, ad, AI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt tripla, GI, cum tripla, IL, ad, AI, ita ſunt eorum ſubtripla, nempè ita, GI, cum, IL, ſeù ita, GL, eſt ad, GA. Ergo, GL, differentia inter, FL, ſemidiametrum caui, CFD, vel ferè inter, AL, &, AG, eſt ad, AG, vt duplum, FL, reliquæ ſemidiametri, 12. 5. Elem.

ad,



ad, FP, diſtantiam foci iuxta dictam regulam generalem.

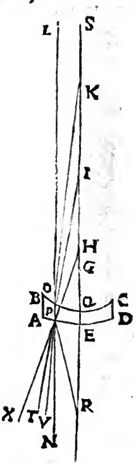
In 3. figura deniq; cum ſit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, erit permutando, & conuertendo, IL, ad duplam, LF, vt, IP, ad, PF, vel, PA: & diuidendo, erit exceſſus ipſius, IL, ſuper duplam, LF, ad duplam, LF, (cum enim, LF, ſit minor, AG, erit dupla, FL, minor dupla, AG, hoc eſt minor, GI, & multò minor quam, IL,) vt, IA, ad, AP. Quod ſi ipſi, IL, adiunxerimus, FL, & eandem, FL, iunxerimus duplæ, FL, erit exceſſus ipſius, IL, ſuper duplam, FL, idem cum exceſſu, IF, ſeù proximè, IA, ſuper triplam, FL. Erit ergo exceſſus, IA, ſuper triplam, FL, ad duplam, FL, vt, IA, ad, AP. Et permutando erit exceſſus, IA, ſuper triplam, FL, ad, IA, vt dupla, FL, ad, AP. Sed vt exceſ-

exceſſus, IA, ſuper triplam, FL, ad, IA, ita ſunt eorum ſubtripla, ſcilicet ita exceſſus, GA, ſuper, FL, ad, GA. Ergo vt differentia inter ſemidiametros, AG, FL, conuexi, & caui, ad, AG, ſemidiametrum conuexi parallelos aſpicientis, ita eſt duplum, FL, reliquæ ſemidiametri ad, AP, diſtantiam foci, conformiter præfatæ regulæ generali. Datis igitur ſemidiametris, poterit focus inueniri. Quod, &c.

PROPOSITIO XVI.

Si lens ſit ex vna parte conuexa, & ex altera caua, ipſumq; cauum aſpiciat parallelos axi. Dico, ſi centrum conuexitatis fuerit diſtans à cauitate per ſexquidiametrum eiuſdem cauitatis, quod focus erit in ipſomet centro cauitatis, à quo radij paralleli refracti diuergent. At ſi centrum conuexitatis diſtabit à cauitate plus eiuſdem ſexquidiametro, focus diſtabit à cauitate verſus radios parallelos minus dicta ſexquidiametro. Vlterius ſi centrum conuexitatis verſabitur inter dictæ cauitatis ſexquidiametrum, & ſemidiametrum, focus diſtabit plus eadem ſexquidiametro, ſemper, intellige verſus radios parallelos, à quo diuergent. Et centro eodem diſtante per ſemidiametrum ferè cauitatis, ij refrangentur ſecundò per parallelas axi. Ac denique eodem centro minus dicta ſemidiametro à cauitate diſtante, focus erit ex parte conuexi, ad quam radij axi paralleli ſecundò refracti concurrent.

Similis eſt Propoſitioni 14. ſuperiori, ad cuius modum pariter demonſtratur. Sit ergo lens, BADC, cuius cauum, BQC, & conuexum, AED, axis, SR, &, G, centrum cauitatis, BQC, necnon, IQ, tripla ipſius, GQ, cauumque, BQC, reſpi-



reſpiciat parallelos axi radios venientes ex parte, S, ſtatuaturque centrum conuexi, AED, vbicunque in axi, SQ. Dico focum ſe habere vt dictum eſt.

Sit primò centrum conuexi, AED, in, I, & vnus radiorum axi, SR, parallelorum,
Cor.1.11. huius. LO, qui à puncto incidentiæ,
O, refringetur per, OP, directam in, I, incidens conuexo, AED, perpendiculariter in, P, eo quod, I, ſit centrum cõuexi, AED, properabit ergo irrefractus vt in, T, eritque, I, focus à quo & ipſe, & quicũque alij axi, SR, radij paralleli diuergent.

Supponamus nunc conuexi, A E D, eſſe centrum vltra, I, vt in, K, & iungatur,
Cor.1.11. huius. KP, quæ indefinitè producatur vt in, V. Radius ergo, LO, incedet nihilominus per, OP, directam in, I, eritque eius inclinatio ſuper conuexum, AED, angulus, KPI,
Cor.2.7. huius. ſeù, VPT, recedet ergo egrediens in aerem vt per, PX, à perpendiculo, PV, faciens an-
7. huius. gulum, XPT, ½ ipſius, TPV, dirigeturque idcircò, XP, ad punctum, vt, H, intra, IQ. Erit ergo focus intrà, IQ, à quo paralleli axi diuergent, diſtans à, B Q C, cauo minus eiuſdem ſexquidiametro.

Quod ſi centrum verſetur inter, IG, ſic eius focũ aſſignabimus. Sit prius ipſum centrum in, H, ita vt, HG, ſit non maior, QE, vnde, HE, erit non maior, GQ, immò illi ferè æqualis, &, IH, ferè dupla, HE, vel, HP, ac ſubindè angulus, IPH,

IPH, ferè duplus, PIH. Sit rurſus, HP, indefinitè producta vt in, X. Erit ergo angulus, XPT, ferè duplus, HIP; at ſi duxerimus, PN, axi, SR, parallelam erit exterior angulus, TPN, æqualis interiori, PIH, vnde, XPT, erit ferè duplus ipſius, TPN. Igitur, OP, ſecundò refractus in, P, egrediens in aerem, ibit per, PN. Radij ergo axi paralleli exibunt è lente eidem ferè paralleli, cum centrum conuexi erit propè, G, vt dictum eſt. Conſideret ergo Lector cum centrum eſt in, H, refractionem fieri per, PN, cum eſt in, I, fieri per, PT; quapropter cum erit inter, IH, ſeù, IG, refractio fiet per intermedium ipſis, PN, PI, quæ ideò dirigetur in aliquod punctũ ipſius, IS, veluti, VP, dirigitur in, K. Tunc ergo focus diſtabit à, BQC, plus ſexquidiametro cauitatis, à quo radij axi paralleli diuergent.

Denique hic apparet, ſi dictum centrum fuerit inter, HQ, quod tunc refractio fiet non per vllam diuergentem, vt per, PX, vel, PT, vel, PV, nec per parallelam, PN, ſed per concurrentem cum axi, vt per, PR, in, R, focumque fore, R, citra lentem, ad quem concurrent dicti radij axi paralleli. Quod, &c.

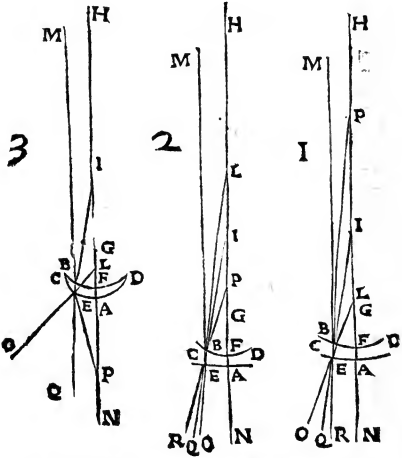
COROLLARIVM.

Hinc apparet quando conuexitas eſt ex maiori circulo, quam cauitas, haberi aliquem concurſum, ſeù focum radiorum ſecundò refractorum cum, QS, à quo diuergunt. Cum verò ſunt ex æqualibus circulis patet nullum eſſe focum, ſed refractionem fieri per rectas axi parallelas. Et cum conuexitas eſt ex minori circulo, quam cauitas, ijdem ſiunt conuergentes ad focum citra lentem in axi conſtitutum.

✠

PROPOSITIO XVII.

In huiuſmodi lentibus focum inuenire.



VTemur & hic eodem progreſſu Propoſitionis 15. paucis mutatis. Sit ergo lens, CFDA, axis, HN, centrum

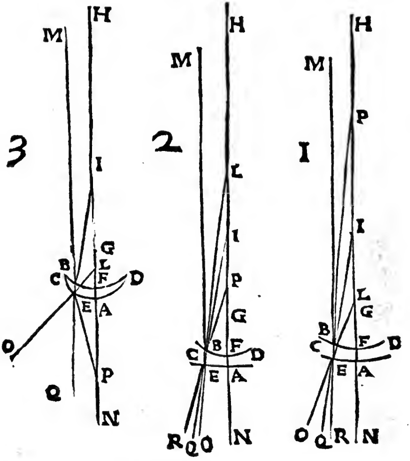
trum cauitatis, CFD, ipſum, G, quæ reſpiciat radios parallelos axi, HN, ex parte, H, venientes, &, IF, tripla, FG. Conuexitas, CAD, habeat centrum, L, inter, IG, in prima figura, vltra, I, in 2. & inter GF, in 3. vnde in 1. & 2. cauitas erit ex minori circulo quam conuexitas, in 3. verò ex maiori. Conſtat autẽ ex Cor. ant. quod ſi cauitas & cõuexitas eſſent ex æqualibus circulis, nullus eſſet focus, ſed radij axi paralleli refrangerẽtur ſecundò per parallelas eidẽ axi. At ſi conuexitatis centrũ eſſet in, I, focus quoq; eſſet in, I, à quo iidem diuergerent. In alijs ergo caſibus eſt focus inquirendus, ſequitur enim aliquis cum axi parallelorum concurſus ex Prop. ant.

Eſto vnus dictorum radiorum, MB, quod à puncto incidentiæ, B, per, BE, directam in, I, refrangetur, ſed incidens in conuexum, CAD, iterum refractus incedet per directam in aliquod punctum axis, HN, vt per, ER, directam in, P, recedens à perpendiculari, LEO, ſuper conuexum, CAD, per, E, tranſeunte, facienſq; angulum, REQ, vel, PEQ, in 3. figura $\frac{1}{2}$ ipſius, QEO, vnde &, PEI, erit $\frac{1}{2}$, IEL, & in 3. figura, PEQ, $\frac{1}{2}$, IEL. Quoniam ergo angulus, ELF, ad, IEL, eſt vt, EI, vel, FI, ad, IL, erunt in 1. & 3. figura vtrique ſimul, LIE, IEL, (qui æquantur exteriori, ELF,) ad, IEL, vt, FI, ad, IL, & diuidendo; LIE, ad, IEL, erit vt, FL, ad, LI. Sed in 2. figura erunt componendo, ELF, IEL, hoc eſt exterior, EIF, ad, IEL, vt, EL, vel, FL, ad, LI. Eſt autem, IEP, vel, QEP, in 3. fig. $\frac{1}{2}$, LEI. Ergo, FIE, ad, IEP, in 1. & 2. fig. & in 3. FIE, ad, QEP, erit vt, FL, ad $\frac{1}{2}$, LI, vel vt dupla, FL, ad, LI. Eſt verò, FIE, ad, IEP, in 1. & 2. fig. & in 3. FIE, ad, PEQ, vt, EP, vel, FP, ad, PI. Ergo in omnibus eſt vt dupla, FL, ad, LI, ita, FP, ad, PI. Et permutando, eſt vt dupla, FL, ad, FP, ita, LI, ad, PI. Nunc in commodum Lectoris repetemus ferè eadem, quæ habentur in Prop. 15. ad perficiendam ſingillatim demonſtrationem in 1. 2. & 3. figura.

Cor. 1. 11. huius.

In prima ergo iſtarum figurarum cum ſit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, componendo erit dupla, FL, cum, FP, ad, FP, vt, LP, ad, PI. Cum verò ſit vt dupla, FL, cum,

FP,



19. 5. Elē. FP, tota nempè vt tripla, FL, cum, LP, tota ad totam; FP, ita ablata, LP, ad ablatam, PI, erit reliqua, hoc eſt tripla, FL, ad reliquam, FI, vt tota ad totam, nempè vt dupla, FL, cum, FP, ad, FP. Et diuidendo, erit exceſſus triplæ, FL, ſuper, FI, (quia enim, FL, ſuperat, FG, etiam triplum ſuperat triplum) ad, FI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt exceſſus, triplæ, FL, ſuper, FI, ad, FI, ita ſunt eorum

ſubtri-

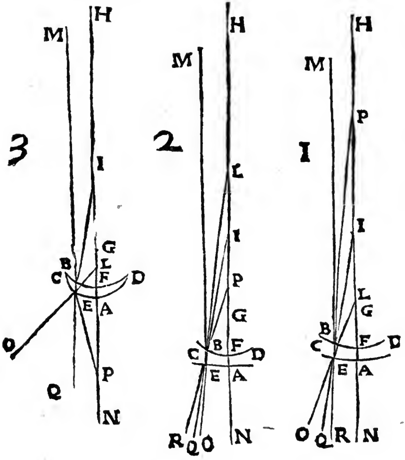
Digitized by Google

ſubtripla, nempè ita exceſſus, FL, ſuper, FG, (quæ eſt ⅓ ipſius, FI,) eſt ad, FG. Ergo vt differentia inter, FL, FG, ſeù quamproximè inter, AL, FG. ſemidiametros conuexi, & caui, ad, FG, ſemidiametrum caui parallelos aſpicientis, ita eſt dupla, FL, ſeù ferè dupla, AL, ſemidiametri reliquæ ad, FP, diſtantiam foci à lente, iuxta dictam regulam generalem.

In 2. figura cum ſit dupla, FL, ad, FP, vt, LI, ad, IP, & vt vnum ad vnum ita omnia ad omnia, erit dupla, FL, cum, LI, ad, FI, vel dupla, FI, ſeù tripla, IG, cum tripla, LI, ad, FI, vt dupla, FL, ad, FP. Sed vt tripla, IG, cum tripla, LI, ad, FI, ita ſunt eorum ſubtripla, nempè ita, GI, cum, IL, ſeù ita, GL, eſt ad, GF. Ergo, GL, ferè differentia inter, AL, GF, ſemidiametros conuexi, & caui, eſt ad, GF, ſemidiametrum caui parallelos aſpicientis, vt dupla, FL, ſeù proximè dupla, AL, ſemidiametri reliquæ eſt ad, FP, diſtantiam foci à lente, conformiter dictæ regulæ generali. 12. 5. Elē.

Deniq; in 3. figura cum ſit dupla, LF, ad, FP, vt, LI, ad, IP, erit permutando, & conuertendo, IL, ad duplam, LF, vt, IP, ad, PF: & diuidendo erit exceſſus ipſius, IL, ſuper duplam, LF, (cum enim, LF, ſit minor, FG, erit dupla, LF, minor dupla, FG, hoc eſt minor ipſa, GI, & multò minor quam, LI,) ad duplam, LF, vt, IF, ad, FP. Addita ergo communi, LF, erit exceſſus, IF, ſuper triplam, LF, ad duplam, LF, vt, IF, ad, FP. Et permutando, erit exceſſus, IF, ſuper triplam, LF, ad, IF, vt dupla, LF, ad, FP. Sed vt exceſſus, IF, ſuper triplam, LF, ad, IF, ita ſunt eorum ſubtripla, ſcilicet ita exceſſus, GF, ſuper, FL, ad, GF. Ergo vt differentia inter, GF, FL, ſeù quamproximè inter, GF, LA, ſemidiatros caui, & conuexi, ad, GF, ſemidiametrum caui parallelos aſpicientis, ita erit dupla, FL, vel ferè dupla, AL, ſemidiametri reliquæ ad, FP, vel, AP, diſtantiam foci à lente, iuxta dictam regulam generalem. Datis igitur his ſemidiametris, poterit focus inueniri. Quod, &c.

COROL.



C O R O L L A R I V M.

Hinc habetur eandem fere diſtantiam foci à lente prouenire quamcunque lentium huiuſmodi faciem ad radios parallelos axi conuertamus. Eſt enim ſemper in eadem lente differentia ſemidiametrorum caui, & conuexi, ad ſemidiame-

trum

trum faciei parallelos aſpicientis, veluti duplum reliquæ ſemidiametri, ad diſtantiam foci. Quod complete oſtendemus quemadmodum in Cor. 2. Prop. 12. hoc idem probatum eſt de lentibus vtrinque conuexis.

SCHOLIVM.

Conſtat ex hucuſque demonſtratis allatam regulam generalem in lentibus vtrinque conuexis, vel vtrinque cauis, & in conuexis tantum ex vna parte, ac ex altera cauis, de quibus propriè allata eſt, verificari. Etſi enim quando cauitatis, vel conuexitatis centrum abeſt à lente triplo ſemidiametri conuexitatis, id non expreſsè probatum fuerit, ſed tantum demonſtratum focum eſſe in eodemmet centro; id tamen facilè eſt 14. & 16. huius. oſtendere. Nam ſi in prima fig. Prop. 15. ſupponamus, I, centrum caui, CFD, quod abſit ab, A, triplo ſemidiametri, GA, conuexi, CAD; erit vt, IG, differentia ſemidiametrorum, GA, IA vel ferè, GA, IF ad, GA, cuius, IG, eſt dupla, ita duplum reliquæ ſemidiametri, IF, ad, IF, diſtantiam foci, nam focus ferè eſt in, I. Eodem modo oſtendemus dictam regulam verifi- 14. huius. cari, ſi in 3. fig. Prop. 17. ſit, G, centrum caui, BFD, ipſiuſq; conuexi, BAD, centrum, I, ita vt, IF, ſit tripla, FG. Remanet ſolum caſus quando cauitas, & conuexitas, ſunt ex æqualibus circulis, tunc enim nullus datur focus, vel ſi mauis dicere, infinitè diſtat à lente. Verum & huic caſui per quandam analo- 14. & 16. huius. giam adaptatur eadem regula generalis, eſt enim vt differentia ſemidiametrorum (quæ quia circuli cauitatis, & conuexitatis ſunt æquales nulla eſt) hoc eſt nihil, ad alterā ſemidiametrum, ita duplum reliquæ ſemidiametri, ad diſtantiam foci à lente, idcircò infinitam. In omnibus ergo caſibus circa has lentes contingentibus ipſa regula generalis verificatur.

At ſi quis vellet eam quoque extendere ad lentes ex vna parte planas, & ex altera conuexas, vel cauas, id ei licebit ſimiliter per quandam analogiam; ſupponens enim planum eſſe conuexum, vel cauum, cuius centrum ab eo infinitè diſtet, ſciet aggregatum vel differentiam ſemidiametrorum eſſe quid infinitum; ſi ergo conuexum, vel cauum conuertatur ad radios axi parallelos, erit dictum aggregatum, vel differentia infinita, ad

Digitized by Google

ſemidiametrum conuexi, vel caui, vt duplum reliquę ſemidiametri, hoc eſt duo infinita, ad diſtantiam foci, duarum idcircò ex ſemidiametris conuexitatis. Vel permutando, erit vnum infinitum ad bis infinitum, vt ſemidiameter conuexitatis, ad diametrum eiuſdem, hoc eſt ad foci diſtantiam. Verè enim focus huiuſmodi lentis diſtat à lente ferè per diametrum conuexitatis. Quod ſi planum vergat ad parallelos, erit dictum aggregatum, vel differentia infinita, ad ſemidiametrum faciei parallelos aſpicientis, infinitam, vt duplum reliqua ſemidiametri, nempè conuexi vel caui ad diſtantiam foci, qua erit pariter dupla dictæ ſemidiametri conuexitatis. Generaliſsima igitur eſt hac regula, omnibuſque huiuſmodi lentibus, quæ penes planitiem, conuexitatem, & cauitatem ſphæricas præfatas ſortiuntur varietates, congruere poteſt. Quoniam verò vt ſemidiameter ad ſemidiametrum ita eſt diameter ad diametrum, ideò eadem regula melius ſic conſtitui poteſt.

Eadem regula generalis ad inueniendos focos in omnibus pręfatis lentibus aliter concinnata.

COnuexis, vel cauis in contrarias partes vergentibus, vt aggregatum; ſed ijs ad eandem partem conſtitutis, vt differentia diametrorum vtriuſque faciei, ad alterutram ex ijſdem diametris, ita reliqua diameter, ad diſtantiam foci à lente.

Porrò manifeſtum eſt, ſicuti radij axi paralleli in dictis lentibus concurrunt, ſeù conuergunt, ad ſuos focos, vel ab ijs diuergunt; ita è cõtra ſi ab ijſdem punctis, qui ſunt foci, intelligamus radios diuergere, vel ad eos conuergere, quod tranſata lente refrangentur per rectas axi earundem lentium parallelas.

Similiter conſtat ad efficiendos ex parallelis conuergentes, vten-

vtendum eſſe lente vel ex vna parte plana, & ex altera cõuexa, vel vtrinque conuexa, aut ex vna parte conuexa, & ex altera caua, cauitate tamen, quæ ſit ex maiori circulo, quam conuexitas, hoc eſt, iuxta Keplerum, Meniſco, quæ cum ita conſtrui poſſit vt eius focus longiſſimè diſtet à lente. quamuis cauitas, & conuexitas non ſint ex circulis valdè magnis, ideò æquipollet ſolæ conuexitati circuli valdè magni, plano aſſociatæ in eadem lente. Huiuſmodi quoque lentibus poterimus efficere radios ex diuergentibus parallelos axi. Quod ſi velimus parallelos axi efficere diuergentes à puncto vltra lentem verſus parallelos in axi conſtituto vtemur vel lente plana ex vna parte, & ex altera caua, vel vtrinque caua, ſiuè ex vna parte conuexa, & ex altera caua, ita tamen vt conuexitas ſit ex maiori circulo quam cauitas, quæ cum ita conſtrui poſſit vt eius focus longiſſimè diſtet à lente, quamuis conuexitas & cauitas non ſint ex circulis valdè magnis, ideò æquipollet ſolæ cauitati circuli valde magni, plano aſſociatæ in eadem lente. Huiſmodi quoque lentibus poterimus efficere radios ex conuergentibus parallelos axi.

Dioptr. nu. 130.

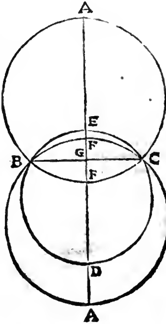
Dioptr. nu. 133.

Quoniam verò Keplerus in Dioptr. num 131. volens pro Meniſco focum inuenire, propoſuit hanc regulam generalem, nempè quod quantum attenuatur lens, tantum elongatur concurſus, ſeù focus à lente, haneque ſolum per inductionem, & à paucis caſibus, probauit, ideò nunc videndum reſtat num per noſtram regulam hoc idem aliqua meliori ratione, & vniuerſalius demonſtrari poſſit. Quod exequi conabimur oſtenſa prius ſequenti Propoſitione.

PROPOSITIO XVIII.

Si duo circuli, ABC, DBC, deſcribantur, quorum periphæræ ſe mutuò ſecent in punctis, BC, ſintque diametri, AF, DE, & iungatur, BC, ſecans eaſdem in, G, quibus erit perpendicularis, vt facilè oſtendi poteſt. Dico, EG, ad, GF, eſſe vt, AG, ad, GD.

Cor. 8, 6. Elem.



Erit enim quadratum, GC, æquale tam rectangulo, AGF, quam rectangulo, DGE; quapropter rectangula, AGF, DGE, erunt æqualia, habebuntque latera reciproca. 14. Sexti Elem. Ergo erit, EG, ad, GF, vt, AG, ad, GD. Quod, &c.

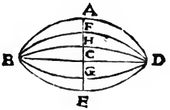
SCHOLIVM.

In præfatis lentibus cũ ſupponãtur paruę craſsitiei, et hinc inde ab axi, AF, non excedere grad. 15. erit proportio, AG, ad, GD, quã proximè eadem proportioni, AF, ad, FD, vel etiã ipſius, AF, diametri ad, ED, diametrũ. Vnde ſequitur ſi arcus conuexitatũ, vel cauitatũ lentiũ ab eadem chorda, vt à, BC, in lentibus, BEC, BFC. ſubtendantur, earum ſinus verſos, EG, GF, hoc eſt ipſarum craſsities, eſſe quamproximè in reciproca ratione diametrorum earundem conuexitatum, vel cauitatum.

PRO-

PROPOSITIO. XIX.

Si arcus conuexitatis, vel cauitatis lentium prædictarum ab eadem chorda ſubtendantur: erunt ipſarum craſſities in reciproca ratione diſtantiarum earundem focorum ab ijſdem lentibus.



SIt primò lens, ABED, vtrinque conuexa, ſiuè æquali, ſiuè inæquali conuexitate, chorda, BCD, arcubus, BAD, BED, communis, & axis, ACE, ſupponaturque alia lẽs, BADCB. Dico vt craſsities, EA, eſt ad craſſitiem, AC, ita eſſe diſtantiam foci lentis, AC, (liceat lentes, per earum craſſities nominare) ad diſtantiam foci lentis, AE, ab ipſis lentibus. Erit enim vt, EC, ad, CA, (qui ſunt ſinus verſi arcuum, BED, BAD,) ita quamproximè diameter conuexitatis, BAD, ad diametrum conuexitatis, BED, per allata in proximo Scholio. Sed dictę diametri ſunt diſtantiæ focorum ipſarum lentium. Ergo vt craſſities, EC, ad craſſitiem, CA, ita diſtantia foci lentis, AC, ad diſtantiam foci lentis, CE. Quod eodem modo de quibuſcunque alijs lentibus, quibus ſit communis chorda, ſeù planum, BD, oſtendemus. Igitur componendo, vt, EA, ad, AC, ita erit aggregatum dictarum diſtantiarum, hoc eſt diametrorum conuexitatum, BAC, BAD, ad diametrum conuexitatis, BED. Sed vt dictum aggregatum eſt ad diametrum conuexitatis, BED, ita diameter conuexitatis, BAD, eſt ad diſtãtiam foci lentis, AE, per regulam generalẽ poſtremò allatam. Ergo vt craſſities, EA, ad craſſitiem, AC, ita diameter cõuexitatis, BAD, hoc eſt diſtãtia foci lẽtis, AC, eſt ad diſtãtiã foci lẽtis, AE.

8. & 9. huius.

8. & 9. huius.

Eſto

Eſto nunc lens, cuius craſſities, AG, ad quam comparetur lens, AE. Oſtendemus ergo vt ſupra lentem, GA, ad, AC, eſſe vt diſtantiam foci lentis, AC, ad diſtantiam foci lentis, AG. Quoniam ergo lens, EA, ad lentem, AC, eſt vt diſtantia foci ipſius, AC, ad diſtantiam foci lentis, AE; & lens, AC, ad lentem, AE, conuertendo, eſt vt diſtantia foci lentis, AG, ad diſtantiam foci lentis, AC. Ex æquali in perturbata analogia, lens, EA, ad lentem, AG, erit vt diſtātia foci lentis, AG, ad diſtantiam foci lentis, AE.

Sit nunc lens, AF, ad quam comparetur eadem lens, AE. Et quoniam, AC, ad, CF, eſt vt diameter cauitatis, BFD, quamproximè, ad diametrum conuexitatis, BAD; erit per conuerſionem rationis, CA, ad, AF, vt diameter caui, BFD, ad exceſſum ipſius ſuper diametrum conuexi, BAD, hoc eſt vt diameter caui ad differentiam diametrorum dicti caui, & connexi. Et conuertendo, erit vt, FA, ad, AC, ita differentia diametrorum caui, & conuexi, ad diametrum caui. Sed hæc differentia, per allatam poſtremò regulam generalem, eſt ad diametrum caui, vt diameter conuexi, BAD, ad diſtantiam foci lentis, AF. Ergo vt, FA, ad, AC, ita erit diameter conuexi, BAD, hoc eſt diſtantia foci lentis, AC, ad diſtantiam foci lentis, AF. Et conuertendo, CA, ad, AF, erit vt diſtantia foci lentis, AF, ad diſtantiam foci lentis, AC. Sed, EA, ad, AC, oſtenſa fuit eſſe vt diſtantia foci lentis, AC, ad diſtantiam foci lentis, AE. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt, EA, ad, AF, ita eſt diſtantia foci lentis, AF, ad diſtantiam foci lentis, AE.

Ex Schol. ant.

Quod ſi compararetur, AE, ad, EF, eodem modo, quo circa lentes, EA, AG, proceſſimus per viam lentis, AC, per viam lentis, CE, propoſitum de ipſis, AE, EF, oſtenderemus. Similiter ſi eſſet lens, FH, ad quam compararemus, AE, per comparationem, AE, ad, EF, & poſtmodum, EF, ad, FH, (quæ ſimilis eſt comparationi, EA, ad AF,) propoſitum demonſtraretur. Nec diſſimiliter fieret ſi compararetur, AE, ad, FG. In huiuſmodi lentibus igitur, quomodocunq; ipſas comparemus, ſemper craſſities reciprocè reſpondent diſtantijs focorum. Quod, &c.

COROL-

COROLLARIVM.

Patet igitur verum eſſe quod dixit Keplerus in Dioptr. nu. 131. nempè quantum attenuatur lens, tantum elongari concurſum, ſeù focum ab ipſa lente. Inſuper ſi dua quæcunq; craſsities huiuſmodi lentium ponantur eſſe æquales, vt, AF, FH, etiam diſtantiæ focorum earundem erunt æquales. Erit enim ex. gr. vt, AF, ad, EA, ita diſtantia foci lentis, EA, ad diſtantiam foci lentis, AF; & vt, HF, ad, EA, ita diſtantia foci lentis, AE, ad diſtantiam foci lentis, FH. Cum ergo, AF, FH ponantur æquales habebunt ad eandem, AE, eandem rationem. Igitur eadem diſtantia foci lentis, AE, ad diſtantias focorum lentium, AF, FH, habebit eandem rationem, & ſubindè illæ erunt æquales.

SCHOLIVM.

Obijciet autem fortè aliquis, cum in hac doctrina ferè ſemper craſsities lentis negligatur, non poſſe à lentium craſſitie ad diſtantias focorum rectè diſcurri. Ad quod reſpondeo negligi lentium craſsitiem tantum relatiuè ad ſemidiametros connexitatum, & cauitatum, & ad diſtantias focorum, quæ, addita, vel detracta ipſarum craſſitie, parum variari poſſunt. At non negligimus lentium craſsitiem dum illæ inter ſe comparantur, hinc enim ſequitur, propter eiuſdem varietatem notabiliter ipſorum focorũ diſtantias variari. Quæ pro huiuſmodi doctrina dilucidatione nunc dicta ſufficiant.

Digitized by Google

De deſcriptione Parabolæ per quatuor data Puncta in angulis quadrilateri, cuius duo ſaltem oppoſita latera ſint extra concurrentia.

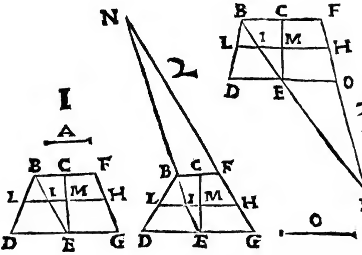
HOc Problema mihi propoſuit Ioannes Beaugrand, de quo mentionem feci in Exerc. 4. ad cuius ſolutionem per ſubſequentes propoſitiones ita proceſsi.

PROPOSITIO XX.

Dato trapezio quocunque, BCED, cuius duo oppoſita latera, BC, DE, ſint parallela, & iuncta, BE; ipſi DE, in, EO, æquidiſtantem ducere ex. gr. LM, ſecantem, BE, in, I, ita vt quadratum, LM, ſuperet quadratum, MI, quadrato datæ rectæ lineæ, vt ipſius, A, quæ ſit minor quam, DE, maior oppoſitarum baſium trapezij.

VEl ergo, DE, dupla eſt ipſius, BC, vt in 1. figura, vel plus quam dupla, vt in 2. aut minus quam dupla vt in 3. fig. in omnibus autem extendantur, DE, BC, in, G, F, ita vt, EG, ſit æqualis, ED, &, FC, ipſi, CB, & iungatur, FG. Cum ergo in 1. fig. DE, ſit dupla, BC, idcò, EG, erit æqualis, BF, vnde cum ſit quoque eidem parallela, erit etiam, BE, parallela ipſi, FG. In 2. fig. erit, EG, maior, BF, & eſt illi parallela, igitur, EB, GF, productæ verſus, BF, concurrent,

vt in



vt in, N. In 3. fig. denique erit, E G, minor, B F, & illi parallela, quare productæ, BE, FG, verſus, EG, concurrent, vt in, N. Fiat vt quadratum, D E, ad quadratum, A, ita in 1. fig. EB, ad, B I, ſed in 2. & 3. ita rectangulum, N E B, ad rectangulum, N I B, quod obtinebimus, ſi prius fiat vt q. D E, ad q. A, ita rectangulum, N E B, ad q. O, cui poſtmodum æquale rectangulum applicetur ipſi, N B, in 2. fig. excedens, & in 3. deficiens quadrato, B I: erit enim tunc vt q. D E, ad q. A, ita rectangulum, N E B, ad rectangulum, N I B. Rurſus per, I, ducatur ipſi, D G, parallela, L H, ſecus, C E, in, M, &, BD, FG, in, L, H. Quoniam ergo q. DE, ad q. A, in 1. fig. eſt vt, EB, ad, BI, ideſt vt, DE, ad, LI, ideſt vt rectangulum, DEG, vel quadratum, D E, ad rectangulum, L I H; ideò rectangulum, LIH, æquabitur quadrato, A. In reliquis verò figuris quoniam vt q. D E, ad q. A, ita eſt rectangulum, N E B, ad rectangulum, N I B, illud verò ad hoc habet rationem compoſitam ex ratione, EN, ad, NI, ſiuè, EG, ad, IH, & ex ratione, EB, ad, BI, hoc eſt, DE, ad, LI. Duæ rationes autem, D E, ad, LI, &, EG, ad, IH, componunt rationem

28. 29. 6. Elem.
1.6. Elē.
23.6. Elē.
23.6. Elē.

Rrr rectan-

rectanguli, DEG, vel q. DE, ad rectangulum, LIH; ideò vt q. DE, ad q. A, ita q. DE, erit ad rectangulum, LIH. Igitur rectangulum, LIH, æquabitur quadrato, A. Eſt autem in omnibus hiſce figuris rectangulum, LIH, exceſ-
5.Sec.Elé. ſus quadrati, LM, ſuper q. MI. Igitur factum eſt quod proponebatur.

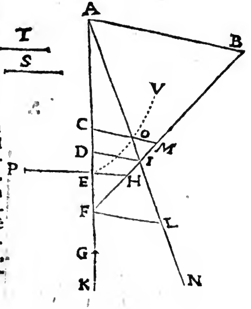
PROPOSITIO XXI.

Sint duæ quæcunq; rectæ lineæ, AK, AN, angulum quẽcunq; KAN, facientes; in altera verò ipſarum, vt in, AK, ſumptis vbicunq; duobus punctis, EG, ſit à quouis puncto ipſius, AK, vt ab, F, ad quodcunq; punctum rectæ, AN, vt ad, L, ducta, FL. His ſuppoſitis oportet ipſi, GE, applicare rectangulum excedens figura quadrata, quod ad quadratum rectæ lineæ æquidiſtantis ipſi, FL, interceptæ inter, AK, AN, ductæq; à puncto in, AE, per exceſſum applicationis facto, habeat datam rationem, vt quæ eſt ipſius, S, ad, T.

SEcatur, EG, bifariam, vt in ipſo, F, & ducatur, ab, E, ipſi, FL, parallela, EH, ita vt q. FE, ad q. EH, ſit vt, S, ad, T; iunctaque, FH, producatur indefinitè, ipſique, AN, occurrat, vt, in, I, & ipſi, AB, ductæ ab, A, æquidiſtanter ipſi, FL, in, B. Similiter per, I, ſit ducta eidem, FL, parallela, ID, incidens ipſi, AK, in, D. Denique in trapezio, ADIB, in quo ducta eſt, AI, agatur, MC, parallela, AB, ſecans, AI, in, O, &, AD, BI, in, C, M, ita vt quadratum, MC, ſuperet q. CO, quadrato, EH, hoc enim fieri
Per ant. poteſt, cum, EH, ſit minor, AB. Quoniam ergo ex ſimilitudine triangulorum, FEH, FCM, q. FC, ad q. CM, eſt vt ablatum q. FE, ad ablatum q. EH, ſeù ad ablatum exceſ-

ſum

ſum q. MC, ſuper q. CO, (hic enim exceſſus eſt ex conſtructione æqualis dicto q. EH,) ideò reliquum ad reliquũ, hoc eſt rectangulum, GCE, ad q. CO, erit vt totũ q. FC, (quod æquatur rectãgulo, GCE, cum EG, ſit bifariam ſecta in, F,) ad totum q. CM, ſiuè vt q. FE, ad q. EH, id eſt vt, S, ad, T. Quod faciendum erat.



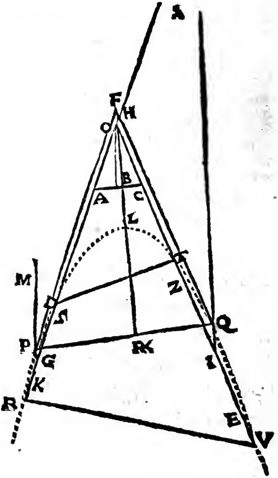
6. Sec. Elem.

Aliter, & facilius, ſed per locum ſolidum.

Fiat vt, S, ad, T, ſic, GE, ad, EP, & latere recto, EP, ac tranſuerſo, EG, in angulo, BAE, deſcribatur indefinitè ſemihyperbola, EV, quæ ſecet, AI, in, O, & ab, O, ducatur, OC, parallela, FL, occurrens ipſi, AK, in, C. Igitur rectangulum, GCE, ad q. CO, erit vt, GE, ad, EP, hoc eſt vt, S, ad, T, nempè in ratione data. 21.1.Co.

PROPOSITIO XXII.

Datis quatuor punctis in angulis cuiuſcunq; quadrilateri, cuius ſaltem duo oppoſita latera ſint extra ipſum concurrentia: per eadem Parabolam deſcribere.



Sit

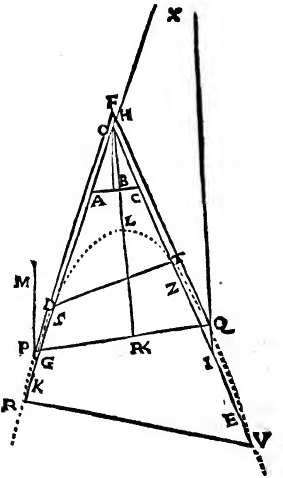
SIt data quatuor puncta in angulis quadrilateri cuiuſcunq; DRVT, cuius duo ſaltem oppoſita latera, RD, VT, indefinitè producta extra concurrant, vt in, O. Oportet per, D, R, V, T, parabolam deſcribere. Accipiatur in altera ipſarum, OV, OR, vt in, OV, quodcunq; punctum, C, fiatq; vt rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD, ita q.CO, ad q. OA, & iuncta, AC, eadem ſecetur bifariam in, B, ducaturq; OB. Similiter bifariam diuiſis, RD, vt in, G, I, ab his punctis verſus, O, ducantur ipſi, OB, parallelæ, GM, IX, & producta indefinitè, RO, verſus, IX, occurrat illi in, X. Vlterius cum in, XR, faciente cum, XI, angulum, RXI, quicunq; ſit, dentur duo puncta, R, D, & ſit ducta vtcunq; OI, ipſis, XR, XI, interiecta; inueniatur per Propoſitio ant. punctum, H, à quo ducta, verſus, XI, ipſa, HQ, parallela eidem, OI, ſecanteq; XI, in Q, rectangulum, RHD, ad q. HQ, ſit vt q.AO, ad q.OC: erit autem punctum, H, inter, O, X, puncta, nam cum rectangulum, VOT, cum q. TI, ſit æquale q. OI, ideò rectangulum, VOT, eſt minus q. OI, vndè rectangulum, ROD, ad q. OI, minorem habet rationem, quam ad rectangulum, VOT, ideſt quàm q. AO, ad q. OC, ideſt quam rectangulum, RHD, ad q. HQ. At ſi, H, eſſet inter, OD, rectangulum, RHD, eſſet minus rectangulo, ROD, & q.HQ, maius q. OI, vnde rectangulum, RHD, minorem haberet rationem ad q. HQ, quam rectangulum, R O D, ad q. O I, quod eſſet abſurdum; cadit ergo, H, inter, O, X. Inſuper ducatur à, Q, parallela ipſi, CA, quæ indefinitè producta occurrat ipſi, GM, in, P, ac per, P; ipſa, PF, parallela, RX, incidenſque in productam, QH, vt in, F. Rurſus ducatur, F℞, æquidiſtans, OB, occurrenſque, PQ, in, ℞, in quo, PQ, bifariam ſecabitur, cum etiam, OB, ſecet bifariam, AC, ſintq; triangula, FPQ, OAC, ſimilia ob latera parallela, & cum, F ℞, ipſi, OB, æquidiſtet. Deniq; bifariam ſecta, F ℞, in, L, circa diametrum, L ℞, & baſim, PQ, dedeſcribatur parabola, PLQ, quam indefinitè productam dico tranſituram per dicta puncta, D, R, V, T.

6. Sec. Elem.

8.5. Elem.

Quoniam enim, ℞ L, æquatur, LF, eſtq; P ℞, ordinatim, ad, L℞, applicata, ideò, FP, tanget parabolam

deſcri-



Cor. 35. 1. Conicorum. Schol. 51. 1. Conic.

deſcriptam in, P. Eodem modo oſtendemus, FQ, eſſe tangentem; ducuntur verò per hos contactus, GM, IX, parallelæ diametro, L ℞, & eiſdem tangentibus æquidiſtant, R O, VO. Ergo, PG, QI, erunt diametri parabolarum, quas abſcindunt verſus puncta, Q, P, ipſæ, OR, OV, indefinitè productæ.

Dico

Dico autem quod hæc abſciſſio fit in dictis quatuor punctis, R, D, T, V, (quod enim, OR, vt &, OV, ſecet in duobus punctis indefinitè producta deſcriptam parabolam indefinitè productam patet per 18. Primi Conicorum) ſi enim ex. gr. OR, non ſecat parabolam in, D, R, ſecabit tamen eam in duobus punctis æquè remotis à puncto, G, nam oſtenſum eſt, PG, eſſe diametrum reſectæ per eandem, OR, parabolæ. Erunt ergo dicta puncta vel intra, R, D, vel extra. Sint primum intra, vt, KS, per quæ ſupponatur tranſire deſcripta parabola. Quia ergo ſunt æquè remota à, G, & ſubinde à, D, R, ipſæ, RK, SD, erunt æquales, & cum, K, S, ſupponantur in deſcripta parabola, erit rectangulum, KHS, ad q. HQ, vt q. PF, ad q. FQ. Quia 16.3.Con. verò rectangulum, RHD, ad q. HQ, eſt vt q. AO, ad q. OC, ideſt vt q. PF, ad q. FQ, propter ſimilia triangula, PFQ, AOC: ideò rectangulum, RHD, ad, q. HQ, erit vt rectangulum, KHS, ad q. HQ. Vnde rectangula, RHD, KHS, erunt æqualia, & ideò, RH, ad, HK, erit vt, SH, 14.6.Elē. ad, HD, & diuidendo, RK, ad, KH, erit vt, SD, ad, DH, & permutando, RK, ad, SD, erit vt, KH, ad, HD; maior eſt autem, KH, ipſa, HD, ergo &, RK, maior erit ipſa, SD, cui oſtenſa eſt æqualis. Hoc autem eſt abſurdum: non ergo deſcripta parabola tranſibit per puncta intra, R, D; ſed & eodem modo probabimus non tranſire per puncta extra, R, D, ergo per ipſa, R, D, incedet.

Deniq; eandem dico tranſire per, T, V, ſi enim non vel tranſibit per puncta intra, T, V, vel extra, tranſeat primum per, Z, E, intra poſita: oſtendemus autem vt ſupra, TZ, EV, eſſe æquales, & poſtmodum inæquales hac ratione. Cum enim, EZ, ſupponantur in deſcripta parabola, erit rectangulum, EOZ, ad, ROD, vt q. QF, ad q. FP, ſed 17.3.Con. vt q. QF, ad q. FP, ſiuè vt q. CO, ad q. OA, ita quoque eſt rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD. Ergo rectangulum, VOT, ad rectangulum, ROD, erit vt rectangulum, EOZ, ad idem rectangulum, ROD. Igitur rectangula, VOT, EOZ, erunt æqualia, & ideò vt ſupra concludemus, VE, ad, ZT, eſſe vt, EO, ad, OT, & ſubindè ipſas, VE, ZT, eſſe inæquales, ſed & æquales, quod eſt abſur-

abſurdum. Non ergo deſcripta parabola tranſibit per puncta intra, T, V, poſita. Eadem ratione probabitur non poſſe tranſire per puncta extra, T, V, in ipſa conſtituta. Ergo incedet per, T, V, & per, D, R, quatuor data puncta. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc apparet, ſi reliqua latera, TD, VR, dati quadrilateri fuerint quoq; extra concurrentia, quod pari ratione alia parabola tranſiens per eadem quatuor puncta, D, R, V, T, deſcribi poterit. Hoc enim eadem praciſè ratione ſuperius adhibita oſtendetur.

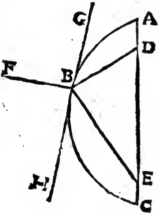
De inueniendo puncto, quod à tribus datis quibuſuis diſtet ſecundum minimam quantitatem.

Propoſitum fuit hoc Problema, prout mihi relatum eſt, ab inſigni Galliæ Mathematico D. de Fermat, ad cuius ſolutionem ita progreſſus ſum. Suppono ergo, datis tribus quibuſuis punctis, dari quoque tres minimas rectas lineas, vel ſaltem duas tribus æquipollentes, quæ à communi puncto ad ipſa duci poſſint. Deinde ſequentes Prop. ſic demonſtro.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Si ſit ſemiellipſis, ABC, diameter, AC, foci, D, E, punctum quodcunque, F, extra, & ad eandem ellipſis partem, FB, perpendicularis tangenti, GH, in, B, iunganturque, BD, BE. Dico, FB, eſſe omnium, quæ ad ellipſim duci poſſunt, breuiſſimam, eamque efficere angulos, FBD, FBE, æquales.



EST enim, FB, omnium minima, quæ ad rectã, GH, duci poſſunt, & ſubindè minima quoque erit omnium ad ſemiellipſim, ABC, ab, F, ducibilium. Inſuper anguli, FBG, FBH, ſunt æquales, quia recti; & anguli, GBD, HBE, pariter inter ſe æquales. Ergo &, FBD, FBE, erunt æquales. 48.3. Cõ.

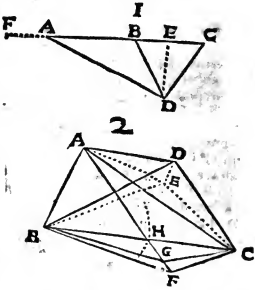
COROLLARIVM.

COnſtat è contra omnium minimam eſſe perpendicularem tangenti in puncto occurſus, & efficere angulos æquales cum ductis ab occurſu ad focos.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIV.

Si tria data puncta fuerint in recta linea, vel in angulis trianguli: punctum quæſitum non erit extra rectam, vel triangulum propoſitum, aut in eiuſdem ambitu.



SInt tria data pũcta, A, B, C, vel in recta linea, AC, vel in ãgulis triãguli, ABC. Dico punctũ quæſitum nõ eſſe extra rectã, A C, vel extra triãgulum, A B C, aut in illius ambitu. Sit enim, ſi fieri poteſt, vt in, D, extra rectam, AC, indefinitè hinc inde productam, vel in, D, extra planum trianguli, AB C. Tunc demiſſa rectæ, vel plano trianguli perpendiculari, DE, & iunctis, DA, DB, DC, EA, EB, EC, patet, EA, minorem eſſe hypothenuſa, AD, & ſic reliquas, EB, EC, reliquis hypothenuſis, DB, DC, minores eſſe. Non ergo, D A, D B, DC, erunt minimæ ducibilium à, D, ad, A, B, C, puncta. Igitur punctum quæſitum non eſt extra, A C, vel planum trianguli, A B C.

Supponatur nunc, F, punctum quæſitũ eſſe in directum ipſius,

ipſius, AC, vel in plano, ABC, ſed extra ipſum triangulũ, ABC. Producta ergo, CA, in, F, & iunctis, FB, FA, FC, quarum, FA, ſecet, BC, in, H, & intra, HF, ſumpto quocunque puncto, G, ac iunctis, GB, GC, manifeſtum eſt in 1. fig. quod appropinquantes puncto, A, breuiores quam ſint, FA, FB, FC, aſſumi poſſunt ad aliud punctum intra, F, A, poſitum, non ergo illæ ſunt minimæ. Et quia etiam continuò accedentes ad, B, poſſunt ſemper breuiores, & breuiores haberi, ideò nullibi erit punctum quæſitum, niſi pro eo abuti velimus puncto, B, in quo tres diſtantiæ in duas tãtum, BA, BC, degenerabunt. In 2. fig. verò erunt, BF, FC, maiores ipſis, BG, GC, & addita communi, AG, erunt, 21.1. Ele.
BF, FC, AG, maiores ipſis, BG, GA, GC, & multo maiores ipſæ, BF, FA, FC, non ergo iſtæ erunt minimę.

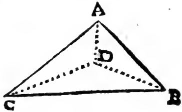
Sit nunc aſſumptum punctum vt, H, in ambitu trianguli, intelligaturque focis, AB, chordaque, AHB, deſcripta ex parte, H, ſemiellipſis; vnde, CH, ducta à puncto, C, extra ſemiellipſim ad punctum, H, ſi tres, CH, HA, HB, ſunt omnium minimæ, erit pariter omnium ad ellipſim deſcriptam à puncto, C, ducibilium minima, efficietque cum, HB, HA, Cor. ant.
hinc indè angulos æquales, quod eſt abſurdum, eſt enim, CH, in directum ipſi, HB. Non ergo punctum quæſitum erit extra rectam, AC, vel extra triangulum, ABC, aut in eius ambitu. Hoc tamen intellige niſi pro quæſito vno datorum abuti velimus, tribus diſtantijs tunc in duas tantum degenerantibus, hoc enim contingere poterit, vt nunc patebit. Quod, &c.

PROPOSITIO XXV.

Si tria data puncta fuerint in angulis trianguli angulum habentis graduum 120. vel maiorem: punctum quæſitum, non erit aliud quam vnum ex datis punctis, illud nempè, quod breuiora trianguli latera terminabit.

Sint data puncta, A, B, C, in angulis trianguli, ABC, cuius angulus, BAC, ſit graduum 1 2 0. vel maior, &

Digitized by Google



breuiora latera ſint, BA, AC. Dico non aliud haberi punctum quæſitum, quam, A, quo abuti poſſumus, tribus diſtantijs in duas, AB, AC, degenerantibus. Sit enim, ſi eſſe poteſt, punctum, D, cuius (iunctis, DA, DB, DC,) tres diſtantiæ ſint minimæ. Si ergo focis, A, B, & chorda, B D A, intelligatur ex parte, D, deſcripta ſemiellipſis, quoniam, DA, DB, DC, ponuntur eſſe minimæ, erit, C D, omnium ad ſemiellipſim ducibilium minima, & ideò faciet æquales angulos, CDB, CDA. Eodem modo per ſemiellipſim deſcriptam focis, A, C, chorda, ADC, oſtendemus angulos, BDA, BDC, pariter eſſe æquales. Tres ergo, BDA, ADC, CDB, erunt inter ſe æquales, & ſinguli graduum 120. Sed, B A C, non eſt minor quam gr. 120. ex hypotheſi. Ergo, BDC, erit vel æqualis, vel minor ipſo, B A C, quod eſt abſurdum. Non ergo dabitur minima triga diſtantiarum ad punctum intra triangulum, ſed nec in ambitu, vel extra. Ergo cum datur minima quantitas, ſaltem in duabus diſtantijs, tales erunt, BA, AC, ipſumque, A, deſeruiet pro quæſito. Quod, &c.

Cor. 23. huius.

21.1. Ele.

COROLLARIVM.

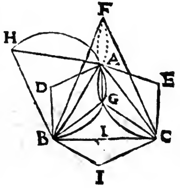
Hinc patet ſi punctum quæſitum ſit intra triangulum datorum punctorum, non aliud eſſe quam illud, apud quod ſiunt ad data puncta tres circumſtantes anguli ſinguli graduum 120.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Suppoſito dari minimam quantitatem in tribus diſtantijs, oportebit tria data puncta eſſe in angulis trianguli, cuius vnuſquiſq; ſit minor gradibus 120.

NOn enim dabitur minima triga diſtantiarum ad punctum extra triangulum, vel in illius ambitu, ergo illud erit intra, eritq; neceſſariò, apud quod fient circunſtantes anguli ſinguli gr. 120. At tale punctum non poteſt reperiri intra, ſi aliquis trianguli dati angulus fuerit gr. 120. vel maior. Supereſt ergo videndum num poſſit haberi cum anguli erunt ſinguli minores gradibus



24. huiu

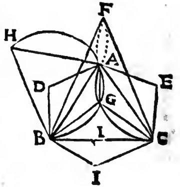
Cor. ant.

Prop. ant.

120. Quod ſic patebit. Sit triangulum, ABC, datorum punctorum, A, B, C, & in eo quilibet angulus minor gradibus 120. Fiant itaq; ſuper, AB, AC, triangula iſoſcelia, ABD, AEC, quorum anguli, D, E, æqualibus lateribus contenti ſinguli ſint gr. 120. & centris, D, E, interuallis, DA, AE, periphæriæ deſcribantur, AGB, AGC, q as in definitè productas, dico ſe ſecare intra triangulum, ABC. Quod enim illæ non ſibi occurrant vel in, BC, vel ſubter, BC, manifeſtum eſt, quia verſus, BC, continuò diſiunguntur, quod etiam amplius patebit inferius. Similiter non ſe tangent in, A, eſſent enim, DA, AE, ſibi in directum, quod eſt falſum: etenim anguli, DAB, EAC, ſinguli ſunt graduum 30. &, BAC, minor eſt gradibus 120. vnde tres, 11.3. Elē

DAB,

DAB, BAC, EAC, faciunt minus quàm gr. 180. Sed nec extra, vt in, F, concurrent, iunctis enim, BF, FC, cum, BDA, fit angulus ad centrũ, &, BFA, ad circumferentiam, erit ille huius duplus, & ſubindè, BFA, erit gr. 60. Eadem ratione conſtabit, AFC, eſſe gr. 60. vnde totus, BFC, erit gr. 120. ſed & eo maior eſt, BAC, erit ergo, BAC, maior grad. 120. cõtra hypotheſim, quod eſt abſurdum. Reſtat igitur vt concurſus non poſſit fieri niſi intra, fiet autem in vnò tantum puncto, quia peripharię conueniunt in, A, & circulus circulum non niſi in duobus punctis ſecare poteſt. Sit ergo talis concurſus in, G, & iungantur, GA, GB, GC; dico autem ſingulos angulos, AGB, BGC, AGC, eſſe gr. 120. Sumpto enim in altera peripharięriarum, vt in, BGA, continuata verſus, A, quolibet puncto, vt, H, iunctiſq; HA, HB, erunt anguli, AHB, AGB, oppoſiti æquales duobus rectis, ſed angulus, H, erit gr. 60. cum ſit ½ anguli, D, ad centrum: ergo, AGB, erit gr. 120. Eodem modo probabitur, AGC, eſſe gr. 120. quare, BGC, reliquus ad 4. rectos erit pariter gr. 120. Ex hoc conſtat ſi concurſus fieret vt in, I, quod duo anguli, AIB, AIC, eſſent gr. 240. quod eſt abſurdum, eſſent enim vel æquales duobus rectis, vel illis minores. Patet ergo in huiuſmodi triangulo poſſe reperiri punctum, apud quod fiant anguli ſinguli gr. 120. ad illudq; & non ad aliud punctum conſtitui trium diſtantiarum à datis punctis minimam quantitatem. Quod oſtendere opus erat.



20. 3. Elẽ.

21. 1. Elẽ.

10. 3. Elẽ.

22. 3. Elẽ.

Cor. 25. huius.

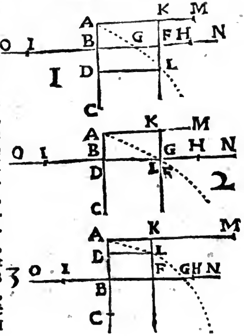
De inueniendis lateribus trianguli æquicruris ex data area, & perimetro eiuſdem.

Hoc mihi propoſuit A. R. P. Niceronius, de quo in Præfatione Exerc. 4. mentio facta eſt. Solutionem verò præbent ſequentes Propoſitiones, etſi per locum ſolidum, ſuppoſito quodam lemate Archimedeo.

PROPOSITIO XXVII.

Datam rectam, AC, ſectam vtcunq; in, B, ita diuidere ex. gr. in, D, vt paralleleppipedum ſub, AB, & q. BC, æquetur paralleleppipedo ſub, AD, & q. DC.

SIt in 1. figura, AB, minor quàm $\frac{1}{3}$, AC, in 2. ſit $\frac{1}{3}$, & in 3. fig. maior quàm $\frac{1}{3}$ ipſius, AC: ducatur autem per, B, perpendicularis ipſi, AC, & indefinita, NO, in qua ſint aſſumptæ, IB, BF, ſingulæ æquales ipſi, BC, &, FH, ipſi, BA; deinde rectæ, IH, applicetur rectangulum, IGH, 28.6.Ele. cuius minus latus ſit verſus, H, æquale quadrato, BF, deficiens quadrato, GH (hoc enim fieri poteſt cum, BF, ſit minor dimidia, IH) cum verò, AB, ſit minor quam $\frac{1}{3}$, AC, in 1. fig. erit etiam, FH, æqualis, BA, ex conſtructione, minor quàn $\frac{1}{3}$, BH; (eſt enim, BH, æqualis quoq; ipſi, AC,) & ſubinde, FH, erit minor medietate, BF, ac conſequenter minor quàm $\frac{1}{4}$, IF: vnde rectangulum ſub, HF, FI, erit minus quàm $\frac{1}{4}$ quadrati, IF, & ſubindè minus quadrato, BF, ac conſequenter minus rectangulo, IGH, iam applicato. Punctum ergo, G, remotius erit à puncto, H, quam



quam punctum, F, debet enim rectangulum, I F H, minus eſſe rectangulo, IGH, iam applicato, vndè punctum, G, cadet inter, B, F, non enim cadet in, B, cum rectangulum, I BH, ſit maius rectangulo, IBF, hoc eſt quadrato, BF. Similiter in 2. fig. cum, AB, ſit $\frac{1}{3}$, AC, erit quoq; FH, $\frac{1}{3}$, B H, & ſubindè $\frac{1}{2}$, BF, & $\frac{1}{4}$, IF; vndè rectangulum, I FH, erit $\frac{1}{4}$ quadrati, IF, & ideò æquale quadrato, BF. Punctum ergo, G, &, F, in hac figura fiunt idem punctum. Deniq; in 3. figura cum, AB, ſit maior quam $\frac{1}{3}$, AC, erit quoq; FH, maior quam $\frac{1}{3}$, BH, & ſubinde maior quam $\frac{1}{2}$, BF, & quam $\frac{1}{4}$, IF: itaq; rectangulum, IFH, erit maius quàm $\frac{1}{4}$ quadrati, IF, hoc eſt maius quadrato, BF, ſeù rectangulo, IGH, vndè punctum, G, erit propiùs quam, F, ipſi puncto, H.

Abſciſſa igitur ex, AC, ipſa, AD, æquali, GH, punctum, D, in 1. figura cadet inter, B, C; in 2. erit in ipſo, B, in 3. verò inter, D, C. Dico nunc parallelepipedum ſub, AB, & q. BC, æquari parallelepipedo ſub, AD, & q. DC. Ducatur per, F, recta, FK, parallela, AC, cui productæ, ſi opus ſit, occurrat, DL, acta per, D, parallela, ON, & ſtatuatur, AM, æqualis, IG, latus rectum ſemiparabolæ circa axim, AC, vertice, A, deſcriptæ verſus, N,

quam

quam dico tranſituram eſſe per puncta, G, L. Etenim in 1. figura q. BG, deficit à q. BF, rectangulo, IGF: eſt autem q. BF, æquale rectangulo, IGH. Ergo q. BG, deficit à rectangulo, IGH, rectangulo, IGF. Sed etiam rectangulum ſub, IG, FH, deficit ab eodem rectangulo, IGH, ipſo rectangulo, ſub, IG, GF. Ergo q. BG, æquatur rectangulo ſub, IG, FH, hoc eſt rectangulo, ſub, MA, AB, cum, MA, ſit æqualis, IG, &, FH, ipſi, AB; vndè punctum, G, erit in dicta ſemiparabola. Similiter cum q. DL, ſeù q. BF, ſit æquale rectangulo, IGH, hoc eſt rectangulo ſub, MA, &, AD, quæ eſt æqualis, GH, per conſtructionem; erit quoq; L, in dicta ſemiparabola, quæ ſit, AGL.

5.2.Elem. 1.2.Elem. 11.1.Con. 11.1.Con.

In 2. fig. cum tria puncta, F, G, L, ſint vnum punctum, cumq; quadrato, B F, æquale factum ſit rectangulum, IG H, ac ſit, IG, æqualis, AM, & GH, ipſi, BA, erit q. BG, æquale rectangulo ſub, MA, AB, & conſequenter punctum, G, erit in dicta ſemiparabola, quæ ſit, AG. 11.1.Con.

In 3. fig. deniq; cum q. BG, excedat q. BF, rectangulo, I GF; cumq; q. BF, per conſtructionem ſit æquale rectangulo, IGH, ideò q. BG, excedet rectangulum, IGH, rectangulo, IGF. Quadratum ergo, BG, æquabitur rectangulis ſub, IG, GH, & ſub, IG, GF, ideſt rectangulo ſub, IG, FH, nempè rectangulo ſub, MA, BA: cumq; q. BF, ſeù q. DL, æquetur rectãgulo, IGH, hoc eſt rectãgulo ſub, MA, AD, ideò tam punctum, G, quam, L, erunt in dicta ſemiparabola, quæ ſit, ALG.

6.2.Elem. 1.2.Elem. 11.1.Con.

Ruſus cum, BA, ad, AD, ſit vt q. BG, ad q. BL, ſit autem q. BO, æquale q. DC, (eſt enim, BF, æqualis, BC, &, FG, ipſi, BD, nam tota, BH, toti, AB, & pars, GH, parti, AD, eſt æqualis) & q. DL, æquale q. BF, ſeù q. B C; erit vt, BA, prima ad, AD, ſecundam, ita q. DC, tertia ad q. CB, quartam. Ergo paralleleppipedum ſub prima, B A, tanquam altitudine, & ſub quarta, hoc eſt ſub baſi q. BC, æquabitur paralleleppipedo ſub ſecunda, AD, & tertia q. DC. Igitur linea recta, AC, ſecta eſt in, D, prout opus erat.

20.1.Con. 34. 11. Elem.

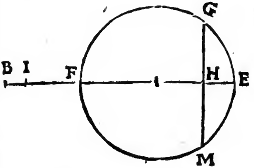
COROLLARIVM.

HInc habetur propoſito quocunq; paralleleppipedo, vt ſub, AB, & q. BC, exiſtente, AB, minori quàm $\frac{1}{3}$, AC, reperiri poſſe aliud paralleleppipedum prædicto æquale, eidem rectæ, AC, applicatum, vt quod ſub, AD, & q. DC, cuius altitudo maior erit quàm $\frac{1}{3}$ ipſius, AC, & è contra. At cum, AB, erit $\frac{1}{3}$, AC, tunc nullum aliud dato æquale, ipſiq; AC, applicabile, ac cubo deficiens reperiri poterit; ſed tale paralleleppipedum erit ſingulare, omniumq; ipſi, AC, ſic applicabilium maximum, vt nunc probabitur.

PROPOSITIO XXVIII.

Omnium paralleleppipedum ad eandem rectam lineam applicabilium, cubiſq; deficientium, maximum eſt quod ad tertiam illius partem applicatur.

SIt data recta, BE, illiuſq; $\frac{1}{3}$, BF. Dico paralleleppipedum ſub, BF, & q. FE, eſſe dictorum maximum. Aſſumatur primò punctum inter, F, E, vt, H, fiatq; ſphæra, FGEM, circa diametrũ, FE, quã



ſecet planum ipſi, FE, erectum ductum per, H, nempè, GHM. Igitur paralleleleppipedum ſub, BF, & q. FE, ad paralleleppipedum ſub, BH, & q. HE, erit vt ſphæra, FGEM, ad portionem, GEM. At ſphæra maior eſt dicta portione; ergo & paralleleppipedũ ſub, BF, & q. FE, maius erit paralleleppipedo ſub, BH, & q. HE. Sumatur nunc punctum vtcunq; inter, B, F, vt, I. Cum ergo paralleleppipedo ſub, BI, & q. IA, aliud æquale vltra, F, vt ſub, BH, & q. HE, reperiri poſſit; & cum

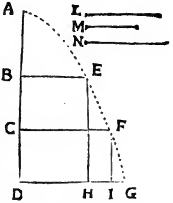
Elicitur ex 7. 3. Geo. Ind.

Ex ant.

cum parallelepipedum ſub, BF, & q. FE, oſtenſum ſit eſſe maius eo, quod ſit ſub, BH, & q. HE, idem quoq; maius erit eo, quod ſit ſub, BI, & q. IE, hocq; de ceteris quibuſcunq; eodem modo oſtendetur. Ergo paralleleppipedum ſub, BF, et q. FE, eſt omnium maximum, quæ ad, BE, deficientia cubis applicari poſſunt. Quod, &c.

PROPOSITIO XXIX.

Si ſit ſemiparabola quæcunq; AGD, vertice, A, diametro, AD, ad quam ordinatim applicentur quæcunq; DE, CF, BE, & per puncta, E, F, ipſis, AD, DG, parallelæ ducantur, EB, FC, EH, FI, quibus fiant parallelogramma æquiangula, BH, CI. Dico paralleleppipedum ſub, AC, & q. CD, ad paralleleppipedum ſub, AB, & q. BD, eſſe in duplicata ratione parallelogrammi, CI, ad parallelogrammum, BH.



Fiat vt, CF, ad, BE, ita, L, ad, M, & vt, CD, ad, DB, ita, M, ad, N. Cum ergo parallelogrammum, CI, ad, BH, habeat rationem cõpoſitam ex ratione, CF, ad, BE, ideſt, L, ad, M, &, CD, ad, DB, nempè, M, ad, N; erit parallelogrammũ, CI, ad, BH, vt, L, ad, N, cũ ratio, L, ad, N, componatur ex rationibus, L, ad, M, &, M, ad N. Rurſus paralleleppipedum ſub, AC, & q. CD, ad paralleleppipedum ſub, AB, & q. BD, habet rationẽ compoſitã ex ratione, AC, ad, AB, hoc eſt ex ratione q. CF, ad q. BE, vel q. L, ad q. M; & ex ratione q. CD, ad q. DB, hoc eſt q. M, ad q. N. Sed etiam q. L, ad q. N, habet rationẽ compoſitam ex iiſdem rationibus, nempè q. L, ad q. M, & q. M, ad

23. 6. Elé.

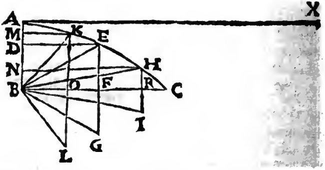
20. 1. Con.

 q. N.

q.N. Igitur parallelepipedū ſub,AC, & q.CD;ad parallelepipedū ſub,AB,& q.BD,eſt vt q.L,ad q.N. hoc eſt in duplicata ratione ipſius, quā habet, L,ad,N,ſcilicet parallelogrammum , CI, ad parallelogrammum, BH, Quod, &c.

PROPOSITIO. XXX.

Data area, & perimetro trianguli æquicruris, latera notificare.



EXponatur recta, BC, dimidio dati perimetri, æqualis, cuius $\frac{1}{2}$ ſit, B A, ipſi, B C, perpendicularis, à qua abſcindatur, AD, $\frac{1}{3}$ ipſius, AB, & vt, A B, ad, B C, ita fiat, B C, ad, A X, & latere recto, AX, deſcribatur circa axim, 11.1.Con A B, vertice, A, ſemiparabola ad partes, C, quæ tranſibit per, C, cumq; BC, æquetur rectangulo ſub, BA, AX, eritq; B, focus eiuſdem, cum, AB, ſit $\frac{1}{4}$ ipſius, A X, lateris recti, vt ego oſtendi in Speculo Vſtorio Cap. 9. Similiter erit, B C, æqualis compoſitæ ex quacunque acta à foco, B, ad parabolam, AC, & ex ea, quæ ducitur ab illius occurſu cum parabola, æquidiſtanter ipſi, AB, vſque ad, BC, vt patet ibidem Cap. 10. Sic igitur ducta, DE, per, E, parallela, B C, & EF, parallela, AB, ac iuncta, EB, erit, BC, æqualis compoſitæ, BEF, ſicut eſt quoque æqualis compoſitæ, BAB. Cum ergo, BA, ſit tripla, A D, erit, B A, ſexquialtera, BD; & dupla, B A, (cui æquatur compoſita, BEF,) erit tripla, D B; ergo, BEF, erit tripla, EF, &, BE, dupla ipſius, EF, ipſumq; trian-

Digitized by Google

triangulum, BEF, erit dimidium trianguli æquilateri, vt, EBG, ſub data perimetro. Quoniam autem nota eſt perimeter, nota erit & ſemiperimeter, BEF, & cum, BE, ſit dupla, EF, nota erit ipſa quoque, EF, &, BE, ac earum quadrata. Dempto ergo q. EF, ex q. EB, relinquetur notum q. BF, & ipſa, BF, nota, quæ ducta in, FE, notam, efficiet notam aream trianguli æquilateri, EBG, quæ ſi adæquetur datæ areæ, iam inuentum erit quod quærebatur, cum dicti trianguli ſint nota latera. Si verò illi non adæquetur, erit eadem neceſſariò minor. Nam veluti oſtenſum eſt paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, eſſe omnium ipſi, AB, applicabilium maximum, ita manifeſtum eſt, BEG, eſſe omnium triangulorum æquicrurium, quæ incipiunt à recta, BC, & deſinunt in rectam, AB, maximum, ſunt enim paralleleppipeda applicata induplicata ratione ſuppoſitorum in Prop. ant. parallelogrammorum, hoc eſt huiuſmodi triãgulorum æquicrurium, quæ dictis parallelogrammis adæquantur, vt, BEG, ipſi, DEFB. Ex ant.

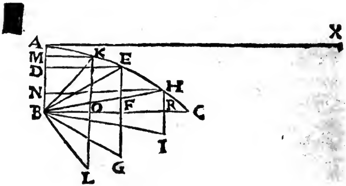
Fiat ergo vt q. numeri areę trianguli æquilateri ad q. datę areæ, ita paralleleppipedũ ſub, ad, & q. DB, ſeù dimidium cubi, DB, ad quartum ſolidum proportionale; & tandem huic ſolido applicetur ad rectam, AB, æquale paralleleppipedum, vt ſub, AN, & q. NB, ſi velimus ipſum altius, vel vt ſub, AM, & q. MB, ſi ipſum velimus depreſſius; ductis enim, BK, BH, & completis æquicruribus triangulis, BKL, BHI, quorum baſes, KL, HI, ſint perpendiculares ipſi, BC, erit triangulum, BHI, &, BKL, requiſitum. Eſt enim paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, ad paralleleppipedum ſub, AN, & q. NB, vt q. numeri areæ, DF, ad q. numeri areę, NR, vel vt q. numeri areæ trianguli æquilateri, BEG, ad q. numeri areæ trianguli æquicruris, BHI, prædicto iſoperimetri; ſed vt dictum paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, ad paralleleppipedum ſub, AN, & q. NB, ita eſt q. numeri areæ trianguli æquilateri, EBG, ad q. numeri datæ areæ; ergo triangulum, HBI, æquatur datæ areæ, cuius ſemibaſis, HR, ſit nota, ſi notificetur, NB. Eodem modò diſcurremus circa triangulum, BKL, depreſſius ipſo, HBI, cuius ſemibaſis, KO, nota fiet, ſi notificetur, MB. Res ergo huc deducta Elicitur ex ant.

eſt,

Digitized by Google

eſt, vt nempè dicto ſolido quarto proportionali æquale parallèleppipedum applicemus ipſi, AB, quartæ parti dati perimetri, cubo deficiens.

SCHOLIVM.



SI datum ſolidum ſit ex. gr. paralleleppipedum ſub, AM, & q. DB, & oporteat illi æquale paralleleppipedum applicare ad, AB, deficiens cubo, quod nunc ſupponatur eſſe, factum ſub, AN, & q. NB; neceſſe erit efficere vt, NA, ad, AM, ita q. DB, ad q. BN. Hoc autem eſt Lemma, quod per locum planum reſolutum, nedum huic noſtro negotio deſeruiret, ſed etiam Prop. 4. ſecundi Arch. de Sphæra, & Cylindro, in qua volens ſphæram in datam rationem ſecare ſeſe ad hoc Lemma reducit, quod ab Eutocio, Dauide Riualto, ac alijs Commentatoribus ad dictam Prop. 4. non niſi per locum ſolidum hucuſque abſolutum eſt. Videatur ergo huiuſmodi ſolutio apud dictos Auctores, vt per eam huic Propoſitioni, quantum licet, ſatisfieri poſſit.

De

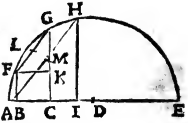
De ratione primę regulæ Problematis tertij meæ Centurię.

QVoniam nonnulli amici mei huiuſmodi rationem à me flagitarunt, cum ſimplicem regulam ſine demonſtratione ibidem tradiderim: ideò hic eorum votis ſatisfaciendum duxi. Oportet autem hanc intelligere cupienti quod ei non ſint ignotæ proprietates ſinuum, & logarithmorum, ac illa præcipuè, quæ nos docet, datis tribus quibuſcunque numeris, ſi addamus inſimul logarithmos ſecundi, & tertij, & à facta ſumma auferamus Log. primi, quod remanebit logarithmus quarti numeri proportionalis quæſiti. Vide meæ Trigonomatriæ priorem partem Prob. 5. vbi de regula trium per logarithmos abſoluenda amplius diſſeritur.

PROPOSITIO XXXI.

In ſemicirculo, AHE, ſumptis quibuſcunq; arcubus, AF, AH, centro, D. Dico quadratum radij, AD, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG, eſſe vt, AE, diametrũ ad differentiam ſinuum verſorum eorundem arcuum, AF, AG.

SVmpto enim arcu, GH, ipſi, AF, æquali, iungantur, AH, FG, & à punctis, F, G, H, demittantur ſuper, AE, perpendiculares, FB, GC, HI; & per, F, extendatur ipſi, AE, parallela, FK. Erit ergo arcus, AH, ſumma, &, FG, differentia datorum, AF, AG, & cum, AF, GH, ſint æquales arcus,



arcus, erunt, AH, FG, inter ſe parallelæ, vt &, GC, HI, intet ſe, quapropter triangula, HIA, GKF, ſimilia erunt. Eſt ergo, HA, ad, AI, vt, GF, ad, FK: ſed vt, HA, ad, AI, ita eſt, EA, ad, AH; ergo vt, EA, ad, AH, ita, GF, ad, FK. Rectangulum igitur ſub extremis, EA, FK, vel, BC, æquatur rectangulo ſub medijs, AH, FG, quod ſerua. Quoniàm verò vt, EA, ad, BC, ita, ſumpta, AE, communi altitudine, eſt q. AE, ad rectangulum ſub, AE, BC; hoc verò per oſtenſa æquale eſt rectangulo ſub, AH, FG. Ergo q. AE, ad rectangulum ſub, AH, FG, erit vt, AE, ad, BC. Sed vt q. AE, ad rectangulum ſub, AH, FG, ita eorum ſubquadrupla, id eſt ita q. AD, radij a rectangulum ſub dimidijs ipſarum, AH, FG, nempè (ijs bifariam ſectis in, M, L,) ſub, AM, FL, hoc eſt ſub ſinibus rectis dimidij arcuum, AH, FG, ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG: Ergo q. radij, AD, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG, eſt vt, AE, ad, BC, differentiam ſinuum verſorum, AB, AC, eorundem arcuum, AF, AG. Quod, &c. Hoc idem probatur in meo Direc. p. 3. Cap. 7.

4.6. Elem.

13.6. Elé.

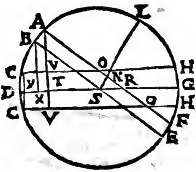
16.6. Elé.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Rationem afferre dictæ primæ regulæ Problematis tertij præfatæ Centuriæ, quæ inſeruit ad inueniendam ſolis altitudinem, vel depreſſionem.

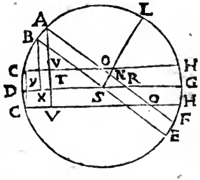
Regula eſt huiuſmodi. Logarithmus ſemisũmæ, cum log. ſemidifferẽtiæ arcus ſemidiurni, & diſtantię ſolis à medio cæli, cum log. binarij, log. ſecundo eleuationis poli, ac log. ſecũdo declinationis Solis; dabit log. altitudinis, vel depreſſionis eiuſdem Solis reſpectu horizontis, demptis conſuetis vnitatibus, &c.



Animaduertendum eſt autem hanc primam regulam poſtulare vt parallelus, in quo Sol reperitur, ſecet horizontem.

Sit ergo meridianus, ADEG, diameter horizontis, DG, æquatoris, BE, paralleli Solis, AF, ſecans, DG, in, R, ſimiliter, CH, paralleli horizonti, DG, & ſit ducta, LS, à centro ad polum verſus quem vergit parallelus Solis, quæ ſecet, AF, in, N, &, CH, in, O. Denique à punctis, A, B, C, cadant ſuper, DG, perpendiculares in, T, X, Y, quæ erunt quoq; ipſi, CH, perpendiculares, vnde fient triangula, XBS, VAO, TAR, æquiangula, quia etiam, BE, AF, ſunt inter ſe

parallelæ. Cũ ergo ſupponatur Sol eſſe in parallelo, AF, &, CH, erit in eorũ communi concurſu, vt potè in puncto, cui ſubijcitur ipſum, O, &, RA, erit ſinus verſus arcus ſemidiurni Solis, &, AO,



ſinus verſus eiuſdem diſtantiæ à meridiano, in parallelo, AF, cõputatæ. Similiter, CD, erit altitudo Solis, vel depreſſio, eiuſq; ſinus rectus, CY, qui hic inquiritur: BD, eſt complementum altitudinis poli, cum æquetur ipſi, EG, complemento, LG.

Quia ergo radius, SB, eſt ad, BX, Sinum 2. altitudinis poli, vt, OA, ad, AV, (cum triangula, OAV, SBX, ſint ſimilia) nempè vt, RA, ad, AT, ideſt vt reliqua, OR, ad reliquam, VT: ideò log. 2. eleuationis poli, cum log. ipſius, OR, dempto log. radij 1000000. dabit log. ipſius, VT, vel, CY. Nunc videndum eſt ex quibus conſtet ipſius, OR, log. Quoniam ergo, intelligendo ſemicirculum erectum ſuper diametro, AF, eſt q. radij, AN, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ arcus ſemidiurni, & diſtantiæ Solis a meridiano, quorum ſinus verſi ſunt, AR, AO, vt, AF, dupla ipſius, AN, ſinus 2. declinationis ſolis, (quæ eſt, AB,) ad, OR. Igitur ſi addamus inſimul log. ſemiſummæ, log. ſemidifferentiæ dictæ, cum log. AF, ideſt vt cum log. 2. declinationis, addito log. binarij (quia enim vt 1. ad 2. ita eſt, AN, ad, AF, ideo log. ipſius 2. hoc eſt binarij, cum log. AN, ideſt cum log. 2. declinationis, dempto log. vnitatis, qui eſt ciphra, faciet log. ipſius, AF,) & à ſumma auferamus log. quadrati radij, qui eſt duplus

Ex ant.

log.

log. radij, nempè auferamus 2000000. remanebit ipſius, OR, logarithmus. Ergo ſi ſimul addamus log. 2. eleuationis poli, log. 2. declinationis Solis, & log. binarij, cum logarithmis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ, arcus ſemidiurni, & diſtantiæ ſolis à meridiano, & ex ſumma auferamus 2000000, & inſuper 1000000. log. radij, qui in prima additione erat quoq; auferendus, hoc eſt ſi ex facta ſumma auferantur 3000000. ſeù tollantur vltimo loco ad ſiniſtram tres vnitates, cum ciphræ non alterent ipſam ſummam, remanebit log. ipſius, VT, vel, CY, ſinus recti altitudinis Solis, vel depreſſionis quæſitæ. Patet ergo ratio dictæ regulæ.

COROLLARIVM.

SI vice ſolis ſupponatur quæcunq; ſtella, ſeù quodcunque punctum cæleſtis Sphæræ, quod oriatur, & occidat in propoſita regione (hoc autem erit cum data ſtella, vel puncti complementum declinationis ſuperauerit altitudinem poli) eidem quoq; adaptabitur præfata regula: ita vt, data hora, & ex ea, media Solis, & ſtellæ, vel dati puncti aſcenſione recta, elicita diſtantia ſtellæ, vel puncti à meridiano, nec non data poli eleuatione, declinatione ſtellæ, vel puncti, ipſius altitudinem ſuper horizontem, vel depreſſionem, per eandem regulam poſſimus inueſtigare,

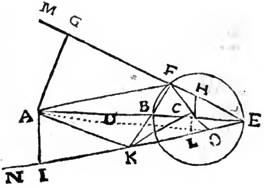
De quadam inſigni Galilei Propoſitione aliter ab eo per me hic demonſtrata.

ADmirabilis mihi ſemper viſa eſt circuli proprietas illa, quam in poſtremis Dialogis pagina 45. demonſtrauit ipſe Galileus. Circa hanc cum aliquando ſpecu-

larem, occaſione cuiuſdam controuerſiæ exortæ Panormi inter Illuſtriſſimum Danielem Spinulam, & quendam R. D. Petrum Emanuelem, circa quoddam Problema geometricum, de qua idem Spinula ad me ſcripſerat, contingit mihi in nouam dictæ Prop. demonſtrationem incidere, quam ideò hic appoſitam ſtudioſo non ingratam futurã eſſe dijudicaui; eſt autem huiuſmodi.

PROPOSITIO XXXIII.

Si ſit recta, AC, ſecta vtcunq; inæqualiter in, B, ita vt BC, ſit pars minor, cui ſumatur æqualis, BD, & fiat vt, AD, ad, DB, ita, AC, ad, CE, deſcribaturq; ſuper diametro, BE, circulus, BF, & ſumatur in eius peripheria quoduis punctum, vt, F, iunganturq; FA, FC. Dico, AF, ad, FC, eſſe vt, AB, ad, BC; & ad nullum aliud punctum coniunctas, ab, A, C, eſſe vt ipſas, AB, BC.



IVngatur, BF, per, E, F, extenſa indefinitè, EM, cadãt ab, A, C, ſuper eam perpẽdiculares, AG, CH, quę, cũ, etiã, BF, ſit ipſi, EM, perpẽdicularis, erũt tum inter ſe, tum cum, BF, parallelæ. Quoniam igitur eſt, AD, ad, DB, vt, AC, ad, CE, componen-

ponendo erit, AB, ad, BD, vel, BC, vt, AE, ad, EC, nempè vt, AG, ad, EH, ob ſimilitudinem triangulorum, AGE, CHE, Sed vt, AB, ad, BC, ita eſt, GF, ad, FH, ergo, AG, ad, CH, erit vt, GF, ad, FH, & permutando, AG, ad, GF, erit vt, CH, ad, HF. Cum ergo circa æquales angulos, AGF, CHF, (ſunt enim recti) ſint latera proportionalia, triangula, AGF, CHF, erunt ſimilia. Igitur, AF, ad, FC, erit vt, GF, ad, FH, nempè vt, AB, ad, BC. 10.6. Ele. 6.6. Elem.

Detur nunc quoduis punctum, K, extra dictam periphæriam, & iungantur, KA, KB, KC. Dico non eſſe, AK, ad, KC, vt, AB, ad, BC. Sit enim ſi fieri poteſt, & ducta indefinita, EKN, demittantur ab, A, C, ſuper, EN, perpendiculares, AI, CL. Quoniam ergo, AK, ad, KC, eſt vt, AB, ad, BC, nempè vt, AE, ad, EC, vel, AI, ad, CL; triangula, AIK, CLK, erunt ſimilia, igitur, IK, ad, KL, erit vt, aK, ad, KC, nēpè vt, AB, ad, BC. Erit ergo, KB, parallela ipſis, IA, CL, & ſubinde angulus, BKE, erit rectus, vndè, K, erit in periphęria deſcripti circuli contra ſuppoſitum, quod eſt abſurdum. Idem probabitur de quouis puncto intra periphæriam aſſumpto. 7.6. Elem. Elicitur ex 10. 6. Elem. Con. 31. 3. Elem.

Quod ſi altera ipſarum, AK, KC, vt, AK, eſſet ipſi, EN, perpendicularis, vt contingere poteſt, eſſet, AK, ad, KC, vt AB, ad, BC, hoc eſt vt, AE, ad, EC, vel, AK, ad, CL, vnde, KC, CL, eſſent æquales, quod eſt abſurdum, propter angulum rectum, CLK. Poſſent quoque ab, A, C, cadentes perpendiculares, vt ſuper, EN, eſſe ambæ ad alteram partem dati puncti quod ſit ex.gr. O, & tunc, iunctis, OA, OC, oſtēderemus vt ſupra triangula, AIO, CLO, eſſe ſimilia, & ſubinde angulum, AOI, æquari angulo, COL, partem toti, quod eſt abſurdum. Ad nullum aliud ergo punctum extra periphæriam, BFE, ab, A, C, inflexæ ſe habent vt, AB, ad, BC, veluti ſunt quæcunque ad puncta dictæ periphærię inclinatæ.

Quod erat oſtendendum.

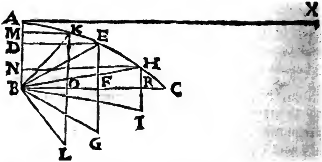
✠

De

q.N. Igitur parallelepipedũ ſub,AC, & q.CD;ad parallelepipedũ ſub,AB,& q.BD,eſt vt q.L,ad q.N. hoc eſt in duplicata ratione ipſius, quã habet, L,ad,N,ſcilicet parallelogrammum, CI, ad parallelogrammum, BH, Quod, &c.

PROPOSITIO. XXX.

Data area, & perimetro trianguli æquicruris, latera notificare.



EXponatur recta, BC, dimidio dati perimetri, æqualis, cuius $\frac{1}{2}$ ſit, B A, ipſi, B C, perpendicularis, à qua abſcindatur, AD, $\frac{1}{3}$ ipſius, AB, & vt, A B, ad, B C, ita fiat, B C, ad, A X, & latere recto, AX, deſcribatur circa axim,
11.1.Con A B, vertice, A, ſemiparabola ad partes, C, quæ tranſibit per, C, cumq; BC, æquetur rectangulo ſub, BA, AX, eritq; B, focus eiuſdem, cum, AB, ſit $\frac{1}{4}$ ipſius, A X, lateris recti. vt ego oſtendi in Speculo Vſtorio Cap. 9. Similiter erit, B C, æqualis compoſitæ ex quacunque acta à foco, B, ad parabolam, AC, & ex ea, quæ ducitur ab illius occurſu cum parabola, æquidiſtanter ipſi, AB, vſque ad, BC, vt patet ibidem Cap. 10. Sic igitur ducta, DE, per, E, parallela, B C, & EF, parallela, AB, ac iuncta, EB, erit, BC, æqualis compoſitæ, BEF, ſicut eſt quoque æqualis compoſitæ, BAB. Cum ergo, BA, ſit tripla, A D, erit, B A, ſexquialtera, BD; & dupla, B A, (cui æquatur compoſita, BEF,) erit tripla, D B; ergo, BEF, erit tripla, EF, &, BE, dupla ipſius, EF, ipſumq; trian-

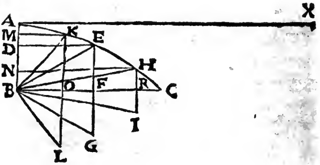
triangulum, BEF, erit dimidium trianguli æquilateri, vt, EBG, ſub data perimetro. Quoniam autem nota eſt perimeter, nota erit & ſemiperimeter, BEF, & cum, BE, ſit dupla, EF, nota erit ipſa quoque, EF, &, BE, ac earum quadrata. Dempto ergo q. EF, ex q. EB, relinquetur notum q. BF, & ipſa, BF, nota, quæ ducta in, FE, notam, efficiet notam aream trianguli æquilateri, EBG, quæ ſi adæquetur datæ areæ, iam inuentum erit quod quærebatur, cum dicti trianguli ſint nota latera. Si verò illi non adæquetur, erit eadem neceſſariò minor. Nam veluti oſtenſum eſt paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, eſſe omnium ipſi, AB, applicabilium maximum, ita manifeſtum eſt, BEG, eſſe omnium triangulorum æquicrurium, quæ incipiunt à recta, BC, & deſinunt in rectam, AB, maximum, ſunt enim paralleleppipeda applicata in duplicata ratione ſuppoſitorum in Prop. ant. parallelogrammorum, hoc eſt huiuſmodi triãgulorum æquicrurium, quæ dictis parallelogrammis adæquantur, vt, BEG, ipſi, DEFB. Ex ant.

Fiat ergo vt q. numeri areę trianguli æquilateri ad q. datę areæ, ita paralleleppipedũ ſub, ad, & q. DB, ſeù dimidium cubi, DB, ad quartum ſolidum proportionale; & tandem huic ſolido applicetur ad rectam, AB, æquale paralleleppipedum, vt ſub, AN, & q. NB, ſi velimus ipſum altius, vel vt ſub, AM, & q. MB, ſi ipſum velimus depreſſius; ductis enim, BK, BH, & completis æquicruribus triangulis, BKL, BHI, quorum baſes, KL, HI, ſint perpendiculares ipſi, BC, erit triangulum, BHI, &, BKL, requiſitum. Eſt enim paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, ad paralleleppipedum ſub, AN, & q. NB, vt q. numeri areæ, DF, ad q. numeri areę, NR, vel vt q. numeri areæ trianguli æquilateri, BEG, ad q. numeri areæ trianguli æquicruris, BHI, prædicto iſoperimetri; ſed vt dictum paralleleppipedum ſub, AD, & q. DB, ad paralleleppipedum ſub, AN, & q. NB, ita eſt q. numeri areæ trianguli æquilateri, EBG, ad q. numeri datæ areæ; ergo triangulum, HBI, æquatur datæ areæ, cuius ſemibaſis, HR, ſit nota, ſi notificetur, NB. Eodem modò diſcurremus circa triangulum, BKL, depreſſius ipſo, HBI, cuius ſemibaſis, KO, nota fiet, ſi notificetur, MB. Res ergo huc deducta Elicitur ex ant.

eſt,

eſt, vt nempè dicto ſolido quarto proportionali æquale parallèleppipedum applicemus ipſi, AB, quartæ parti dati perimetri, cubo deficiens.

SCHOLIVM.



SI datum ſolidum ſit ex. gr. paralleleppipedum ſub, AM, & q. D B, & oporteat illi æquale paralleleppipedum applicare ad, A B, deficiens cubo, quod nunc ſupponatur eſſe, factum ſub, A N, & q. NB; neceſſe erit efficere vt, N A, ad, A M, ita q. DB, ad q. BN. Hoc autem eſt Lemma, quod per locum planum reſolutum, nedum huic noſtro negotio deſeruiret, ſed etiam Prop. 4. ſecundi Arch. de Sphæra, & Cylindro, in qua volens ſphæram in datam rationem ſecare ſeſe ad hoc Lemma reducit, quod ab Eutocio, Dauide Riualto, ac alijs Commentatoribus ad dictam Prop. 4. non niſi per locum ſolidum hucuſque abſolutum eſt. Videatur ergo huiuſmodi ſolutio apud dictos Auctores, vt per eam huic Propoſitioni, quantum licet, ſatisfieri poſſit.

✠

De

Digitized by Google

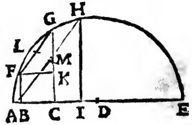
De ratione primę regulæ Problematis tertij meæ Centurię.

QVoniam nonnulli amici mei huiuſmodi rationem à me flagitarunt, cum ſimplicem regulam ſine demonſtratione ibidem tradiderim: ideò hic eorum votis ſatisfaciendum duxi. Oportet autem hanc intelligere cupienti quod ei non ſint ignotæ proprietates ſinuum, & logarithmorum, ac illa præcipuè, quæ nos docet, datis tribus quibuſcunque numeris, ſi addamus inſimul logarithmos ſecundi, & tertij, & à facta ſumma auferamus Log. primi, quod remanebit logarithmus quarti numeri proportionalis quæſiti. Vide meæ Trigonomatriæ priorem partem Prob. 5. vbi de regula trium per logarithmos abſoluenda amplius diſſeritur.

PROPOSITIO XXXI.

In ſemicirculo, AHE, ſumptis quibuſcunq; arcubus, AF, AH, centro, D. Dico quadratum radij, AD, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG, eſſe vt, AE, diametrũ ad differentiam ſinuum verſorum eorundem arcuum, AF, AG.

SVmpto enim arcu, GH, ipſi, AF, æquali, iungantur, AH, FG, & à punctis, F, G, H, demittantur ſuper, AE, perpendiculares, FB, GC, HI; & per, F, extendatur ipſi, AE, parallela, FK. Erit ergo arcus, AH, ſumma, &, FG, differentia datorum, AF, AG, & cum, AF, GH, ſint æquales arcus,

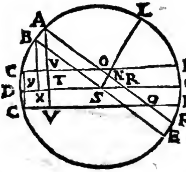


arcus, erunt, AH, FG, inter ſe parallelæ, vt &, GC, HI, inter ſe, quapropter
4.6.Elem. triangula, HIA, GKF, ſimilia erunt.
13.6. Elé. Eſt ergo, HA, ad, AI, vt, GF, ad, FK: ſed vt, HA, ad, AI, ita eſt, EA, ad, AH; ergo vt, EA, ad, AH, ita, GF, ad, FK. Rectangu-
16.6.Elé. gulum igitur ſub extremis, EA, FK, vel, BC, æquatur rectangulo ſub medijs, AH, FG, quod ſerua. Quoniàm verò vt, EA, ad, BC, ita, ſumpta, AE, communi altitudine, eſt q. AE, ad rectangulum ſub, AE, BC; hoc verò per oſtenſa æquale eſt rectangulo ſub, AH, FG. Ergo q. AE, ad rectangulum ſub, AH, FG, erit vt, AE, ad, BC. Sed vt q. AE, ad rectangulum ſub, AH, FG, ita eorum ſubquadrupla, ideſt ita q. AD, radij a rectangulum ſub dimidijs ipſarum, AH, FG, nempè (ijs biſariam ſectis in, M, L,) ſub, AM, FL, hoc eſt ſub ſinibus rectis dimidij arcuum, AH, FG, ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG: Ergo q. radij, AD, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ datorum arcuum, AF, AG, eſt vt, AE, ad, BC, differentiam ſinuum verſorum, AB, AC, eorundem arcuum, AF, AG. Quod, &c. Hoc idem probatur in meo Direc. p. 3. Cap. 7.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Rationem afferre dictæ primæ regulæ Problematis tertij præfatæ Centuriæ, quæ inſeruit ad inueniendam ſolis altitudinem, vel depreſſionem.

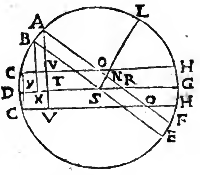


Regula eſt huiuſmodi. Logarithmus ſemisũmæ, cum log. ſemidifferẽtiæ arcus ſemidiurni, & diſtantię ſolis à medio cæli, cum log. binarij, log. ſecundo eleuationis poli, ac log. ſecũdo declinationis Solis; dabit log. altitudinis, vel depreſſionis eiuſdem Solis reſpectu horizontis, demptis conſuetis vnitatibus, &c.

Animaduertendum eſt autem hanc primam regulam poſtulare vt parallelus, in quo Sol reperitur, ſecet horizontem.

Sit ergo meridianus, ADEG, diameter horizontis, DG, æquatoris, BE, paralleli Solis, AF, ſecans, DG, in, R, ſimiliter, CH, paralleli horizonti, DG, & ſit ducta, LS, à centro ad polum verſus quem vergit parallelus Solis, quæ ſecet, AF, in, N, &, CH, in, O. Denique à punctis, A, B, C, cadant ſuper, DG, perpendiculares in, T, X, Y, quæ erunt quoq; ipſi, CH, perpendiculares, vnde fient triangula, XBS, VAO, TAR, æquiangula, quia etiam, BE, AF, ſunt inter ſe

parallelæ. Cũ ergo ſupponatur Sol eſſe in parallelo, AF, &,CH, erit in corũ communi concurſu, vt potè in puncto, cui ſubijcitur ipſum,O, &, R A, erit ſinus verſus arcus ſemidiurn Solis,&, AO,



ſinus verſus eiuſdem diſtantiæ à meridiano, in parallelo,AF, cõputatæ.Similiter,C D,erit altitudo Solis, vel depreſſio, eiuſq, ſinus rectus, C Y, qui hic inquiritur: BD, eſt complementum altitudinis poli, cum æquetur ipſi, EG, complemento, LG.

Quia ergo radius, SB, eſt ad, BX, Sinum 2. altitudinis poli, vt, OA, ad, AV, (cum triangula, OAV, SBX, ſint ſimilia) nempè vt, RA, ad, AT, ideſt vt reliqua, OR, ad reliquam, VT: ideò log. 2. eleuationis poli, cum log. ipſius, OR, dempto log. radij 1000000. dabit log. ipſius, VT, vel, CY. Nunc videndum eſt ex quibus conſtet ipſius, OR, log. Quoniam ergo, intelligendo ſemicir-
Ex ant. culum erectum ſuper diametro, AF, eſt q. radij, AN, ad rectangulum ſub ſinibus rectis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ arcus ſemidiurni, & diſtantiæ Solis a meridiano, quorum ſinus verſi ſunt, AR, AO, vt, AF, dupla ipſius, AN, ſinus 2. declinationis ſolis,(quæ eſt, AB,) ad, OR. Igitur ſi addamus inſimul log. ſemiſummæ, log. ſemidifferentiæ dictæ, cum log. AF, ideſt vt cum log. 2. declinationis, addito log. binarij (quia enim vt 1. ad 2. ita eſt, AN, ad, AF, ideo log. ipſius 2. hoc eſt binarij, cum log. AN, ideſt cum log. 2. declinationis, dempto log. vnitatis, qui eſt ciphra, faciet log. ipſius, AF,) & à ſumma auferamus log. quadrati radij, qui eſt duplus log.

Digitized by Google

log. radij, nempè auferamus 2000000. remanebit ipſius, OR, logarithmus. Ergo ſi ſimul addamus log. 2. eleuationis poli, log. 2. declinationis Solis, & log. binarij, cum logarithmis ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ, arcus ſemidiurni, & diſtantiæ ſolis à meridiano, & ex ſumma auferamus 2000000, & inſuper 1000000. log. radij, qui in prima additione erat quoq; auferendus, hoc eſt ſi ex facta ſumma auferantur 3000000. ſeù tollantur vltimo loco ad ſiniſtram tres vnitates, cum ciphræ non alterent ipſam ſummam, remanebit log. ipſius, VT, vel, CY, ſinus recti altitudinis Solis, vel depreſſionis quæſitæ. Patet ergo ratio dictæ regulæ.

COROLLARIVM.

SI vice ſolis ſupponatur quæcunq; ſtella, ſeù quodcunque punctum cæleſtis Sphæræ, quod oriatur, & occidat in propoſita regione (hoc autem erit cum data ſtella, vel puncti complementum declinationis ſuperauerit altitudinem poli) eidem quoq; adaptabitur præfata regula: ita vt, data hora, & ex ea, media Solis, & ſtellæ, vel dati puncti aſcenſione recta, elicita diſtantia ſtellæ, vel puncti à meridiano, nec non data poli eleuatione, declinatione ſtellæ, vel puncti, ipſius altitudinem ſuper horizontem, vel depreſſionem, per eandem regulam poſſimus inueſtigare,

De quadam inſigni Galilei Propoſitione aliter ab eo per me hic demonſtrata.

ADmirabilis mihi ſemper viſa eſt circuli proprietas illa, quam in poſtremis Dialogis pagina 45. demonſtrauit ipſe Galileus. Circa hanc cum aliquando ſpecu-

ponendo erit, AB, ad, BD, vel, BC, vt, AE, ad, EC, nempè vt, AG, ad, EH, ob ſimilitudinem triangulorum, AGE, CHE, Sed vt, AB, ad, BC, ita eſt, GF, ad, FH, ergo, AG, ad, CH, erit vt, GF, ad, FH, & permutando, AG, ad, GF, erit vt, CH, ad, HF. Cum ergo circa æquales angulos, AGF, CHF, (ſunt enim recti) ſint latera proportionalia, triangula, AGF, CHF, erunt ſimilia. Igitur, AF, ad, FC, erit vt, GF, ad, FH, nempè vt, AB, ad, BC.

10.6. Ele.

6.6. Elem.

Detur nunc quoduis punctum, K, extra dictam periphæriam, & iungantur, KA, KB, KC. Dico non eſſe, AK, ad, KC, vt, AB, ad, BC. Sit enim ſi fieri poteſt, & ducta indefinita, EKN, demittantur ab, A, C, ſuper, EN, perpendiculares, AI, CL. Quoniam ergo, AK, ad, KC, eſt vt, AB, ad, BC, nempè vt, AE, ad, EC, vel, AI, ad, CL; triangula, AIK, CLK, erunt ſimilia, igitur, IK, ad, KL, erit vt, aK, ad, KC, nēpè vt, AB, ad, BC. Erit ergo, KB, parallela ipſis, IA, CL, & ſubinde angulus, BKE, erit rectus, vndè, K, erit in periphçria deſcripti circuli contra ſuppoſitum, quod eſt abſurdum. Idem probabitur de quouis puncto intra periphæriam aſſumpto.

7.6. Elem.

Elicitur ex 10. 6. Elem.

Con. 31. 3. Elem.

Quod ſi altera ipſarum, AK, KC, vt, AK, eſſet ipſi, EN, perpendicularis, vt contingere poteſt, eſſet, AK, ad, KC, vt AB, ad, BC, hoc eſt vt, AE, ad, EC, vel, AK, ad, CL, vnde, *K*C, CL, eſſent æquales, quod eſt abſurdum, propter angulum rectum, CL*K*. Poſſent quoque ab, A, C, cadentes perpendiculares, vt ſuper, EN, eſſe ambæ ad alteram partem dati puncti quod ſit ex. gr. O, & tunc, iunctis, OA, OC, oſtēderemus vt ſupra triangula, AIO, CLO, eſſe ſimilia, & ſubinde angulum, AOI, æquari angulo, COL, partem toti, quod eſt abſurdum. Ad nullum aliud ergo punctum extra periphæriam, BFE, ab, A, C, inflexæ ſe habent vt, AB, ad, BC, veluti ſunt quæcunque ad puncta dictæ periphæriç inclinatæ.

Quod erat oſtendendum.

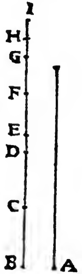
✠

De

De magnitudinum incommenſurabilitate.

PROPOSITIO XXXIV.

Datis duabus quibuſcunque magnitudinibus incommenſurabilibus, poſſibile eſt ab alterutra ipſarum auferre commenſurabilem reliquæ, ita vt reſiduum ſit minus quacunque propoſita magnitudine.



SInt datæ magnitudines incommē-ſurabiles, A, BI. Dico ab earum alterutra, vt à, BI, auferri poſſe magnitudinem ipſi, A, commenſurabilem, quæ deficiat à, B I, quantitate minori oblata quacunque, vt minori ipſa, GI. Secetur, BI, bifariam in, E, & ab, A, auferatur ipſius dimidium, ac à reſiduo dimidium, ſicque ſemper fiat, donec deuenianatur ad magnitudinem ipſa, BE, minorem, hoc enim fieri poteſt, cui
l.10.Ele æquetur, B C. Rurſus multiplicetur, BC, donec fiat primò maior, BE, ſitq; facta, BF, à qua ſi dematur, DF, ęqualis ipſi, BC, nō ſit reliqua, BD, maior, BE. Dico autem punctum, F, cadere inter, E, I, ſi enim caderet in, I, vel vltra, I, eſſet, DF, non minor, EI, & ſubinde, C B, ipſi, D F, æqualis, eſſet non minor, B E, contra conſtructionem, quod eſt abſurdum. Cadit ergo, F, inter, E, I, quare per, BF, aufertur à, BI, pluſquam ipſius, BI, dimidium, & eſt, BF, conſtans ex partibus, BC, CD,

CD, DF, æqualibus inter ſe, eidem, A, (vt eſt ipſa, BC,) commenſurabilis.

Eodem modo ex reliqua, FI, quæ erit ipſi, A, incommenſurabilis, auferemus pluſquam dimidium, ipſi, A, commenſurabile, & ſic ſemper donec relinquatur minus, GI, hoc enim fieri poteſt; ſitque talis magnitudo, FH, relinquēs, HI, minus, GI. Ergo cum vtræque, BF, FH, ſint ipſi, A, commenſurabiles, erunt quoque inter ſe commenſurabiles, & tota, BH, erit ſingulis partibus, AF, FH, commenſurabilis. Sunt itaque, A, commenſurabilis ipſi, BF, &, HB, pariter eidem, BF, commenſurabilis: vndè erunt, BH, &, A, inter ſe commenſurabiles. Sed, BH, deficit à, BI, magnitudine, HI, minori oblata, GI. Ergo poſſibile eſt ab alterutra datarum magnitudinum incommenſurabilium auferre reliquæ commenſurabilem, quæ ab ipſa deficiat magnitudine quacunque oblata minori. Quod oſtendere opus erat.

1.10. Ele

12. 10. Elem.

16. 10. Elem.

12. 10.

S C H O L I V M.

Hanc Propoſitionem apponere volui, mirabile enim mihi videtur illud, quod ab alterutra ipſarū magnitudinum incommenſurabilium auferendum eſt, vt remaneant reliquæ commenſurabiles, omni aſsignabili magnitudine minus eſſe poſſe. Non tamen illud dicendum eſt eſſe nihil quod inter duas magnitudines conſtituit incommenſurabilitatem, ſed erit aliquid, vt minus quacunque oblata magnitudine, alioquin eſſent & incommenſurabiles, vt cōmenſurabiles. Simile igitur quoddam mihi videtur hic contingere ei, quod circa hyperbolam, & aſymptotos, ſi enim in infinitum producantur, ad ſeipſas proprius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo, nec tamen ideò concurrunt. Hæc ſunt Geometriæ admiranda, quæ etſi in infiniti abditis receſsibus lateant, eiuſdem tamen vim, & efficaciam non effugiunt.

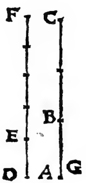
14.2.Co.

De

De motu puncti in circulo.

PROPOSITIO XXXV.

Si fuerint magnitudines, DE, AB, vt numerus ad numerum, & quot vnitates ſunt in numero alterutrius, toties reliqua multiplicetur: fient ex vtraque multiplicatione æquales magnitudines. Et ſi ſint duæ æquales magnitudines, vt, AC, DF, ſingulæ in quotcunque æquales partes diuiſæ, ita vt pars, FD, ſit, DE, & pars, AC, ſit, AB: erit, DE, ad, AB, vt numerus partium in, AC, ad numerum partium in, DF.



SInt ergo, DE, AB, multiplicatę, DE, quidem ſecundum vnitates numeri, AB, &, AB, ſecundum vnitates numeri, DE, factæque ſint, DF, AC, quas dico æquales eſſe. Quoniam ergo vt numerus ipſius, AB, ad vnitatem, ita eſt numerus partium in, FD, æqualium, DE, ad vnitatem, ideò ita erunt omnes partes, FD, ad, DE, & ita, FD, ad, DE. Secetur, AB, in, G, vt quemadmodum eſt numerus partium, AB, ad vnitatem, ita ſit, AB, ad, AG. Erit ergo vt vna, AB, ad vnam, AG, ita omnes partes æquales, AB, quæ ſunt in, AC, ideſt tota, AC, ad tot ęquales ipſi, AG, quot ſunt partes ęquales ipſi, AB, in, AC. Sed illę tot ſunt quot, vnitates ſunt in numero ipſius, DE, ex conſtructione, & eſt AG, communis menſura ipſarum, DE, AB. Ergo, DE, conſtabit ex tot æqualibus ipſi, AG, quot vnitates ſunt in numero ipſius, DE. Quapropter erit, CA, ad, DE, vt, BA, ad, AG, ſeù vt numerus partium, AB, ad vnitatem. Sed &, FD, ad,

12,5. Ele.

ad, DE, oſtenſa quoq; fuit eſſe vt numerus partium, AB, ad vnitatem. Ergo, DF, AC, ad eandem, DE, eandem rationem habebunt, & ſubindè erunt æquales.

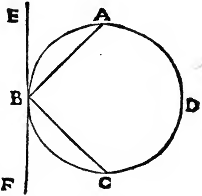
Supponantur nunc ipſæ, DF, AC, æquales, ſingulæq; ſectæ in partes æquales quotcunq; ita vt ſint earum partes, DE, AB. Quoniam ergo, DF, AC, ſunt æquales, ad eandem, ED, eandem rationem habebunt. Sit, BA, ad, AG, vt, FD, ad, ED. Erit ergo, BA, multiplex ipſius, AG, ac, FD, multiplex eſt ipſius, DE. Et quia, CA, ad, ED, eſt vt, FD, ad, DE, hoc eſt, vt, BA, ad, AG, permutando, CA, ad, AB, erit vt, DE, ad, AG. Erit ergo, DE, multiplex ipſius, AG, ac, CA, eſt multiplex ipſius, AB. Multitudo ergo partium in, DE, æqualium ipſi, AG, erit æqualis multitudini partium in, CA, ipſi, AB, æqualium. Et multitudo partium in, BA, æqualium, AG, erit æqualis multitudini partium in, DF, æqualium ipſi, DE. Erit igitur, DE, ad, AB, vt numerus partium in, CA, æqualium ipſi, AB, ad numerum partium in, FD, ipſi, DE, æqualium. Quæ oſtendenda proponebatur.

PROPOSITIO XXXVI.

Si in periphæria circuli cuiuſcunq; aſſignetur quoduis punctum, tanquam initium motus, à quo diſcedat aliud punctum incedens per eiuſdem circuli chordam, donec à periphæria reflectatur, & continuentur indefinitè motus, ac quæ deinceps ſubſequentur reflexiones; ſi arcus à præfata chorda ſubtenſus fuerit ad totam periphæriam vt numerus ad numerum: redibit punctum mobile ad initium motus poſt tot emenſas integras periphærias, quot vnitates erunt in numero arcus à chorda ſubtenſi, tranſibitque eodem tempore tot ex his arcubus, quot vnitates erunt in numero

Digitized by Google

peripheriæ. At ſi præfatus arcus fuerit integræ peripheriæ incommenſurabilis, punctum mobile nunquam redibit ad initium motus.



SIt circulus, AB CD, chorda, AB, &, A, ſtatuatur tanquam initium motus, à quo diſcedens punctum mobile feratur per, AB, & reflectatur à, B, per, BC, à, C, per chordam, CD, & ſic deinceps indefinitè, ſitque primò arcus, AB, ad totam periphæriam, ABCDA, vt numerus ad numerum, exempli gr. vt 3. ad 14. Dico poſt tres emenſos circulos, & 14. arcus, AB, rediturum punctum mobile ad initium, A,

Ducatur tangens circulum, in, B, nempè, EF; igitur iuxta legem incidentiæ, & reflexionis apud Opticos, & Mechanicos, erit angulus, EBA, æqualis angulo, FBC; ſed, EBA, æqualis eſt ei, qui fit in coalterna portione, BCDA; &, FBC, ei, qui fit in coalterna portione, BADC. Ergo anguli portionum, BCDA, BADC, erunt æquales, & ſubindè ipſæ periphæriæ, AB, BC, quibus inſiſtunt adæquabuntur. Eodem modo oſtendemus arcus reflexionum, quæ deinceps ſequuntur, eſſe ipſis, AB, BC, ſemper æquales: quapropter omnes per has reflexiones decurſi arcus erunt æquales inter ſe. Quoniam ergo, AB, ad, ABCDA, eſt vt 3. ad 14. erunt 14. arcus, AB, æquales 3. periphærijs, ABCDA. Ergo punctum mobile cum emenſus fuerit 3. periphærias, ABCDA, & 14. arcus, AB, erit in ipſo, A, initio motus.

[Margin: 32.3. Elē.] [Margin: 26.3. Elē.] [Margin: Per priorem partem ant.]

Sit

Digitized by Google

Sit nunc, AB, incommenſurabilis ipſi, ABCDA, periphæriç. Dico punctum mobile, continuatis quantumuis reflexionibus, nunquam rediturum eſſe in, A. Redeat enim ad, A, ſi fieri poteſt, poſt emenſas aliquot periphærias, ABCDA, vt ex. gr. decurſis 7. ex illis. Quoniam ergo arcus reflexionum ſunt ſemper æquales, habebimus duas magnitudines æquales, ſeu vnam duabus ęquipollentem, nempè aggregatum ex 7. periphęrijs, diuiſum tum in 7. partes ęquales, tum etiam in arcus ipſi, A B, æquales, qui erunt aliquo numero numerabiles, ſi enim eſſent innumerabiles, cum ęquētur 7. periphærijs integris, eſſent iſtæ quid infinitum, quod eſt abſurdum. Erit ergo vt numerus integrarum periphæriarum ad numerum decurſorum arcuum, ita arcus, AB, ad periphęriam, ABCDA. Non igitur, AB, erit ipſi, ABCDA, incommenſurabilis, contra ſuppoſitum, quod eſt abſurdum. Itaque punctum mobile nunquam redibit ad, A. Quod, &c. Per poſt partem ant.

SCHOLIVM.

Simile quodam accideret in Planetis, ſi eorum velocitates eſſent incommenſurabiles, nunquam enim iterum coniungerentur in eodem puncto, in quo ſemel fuiſſent coniuncti; alioquin circulationes corundem eodem tempore effecta eſſent, vt numerus ad numerum, & ſic conſequenter eorum velocitates non eſſent incommenſurabiles. Si ergo tales eſſent motus cæleſtes, in æternum non redirent eadem ſyderum conſtitutiones, ſeu annus magnus, quem vocant Platonicum in immenſam extenſionem abiret. Itaque fruſtra eiuſdem reditum Platonici expectarent.

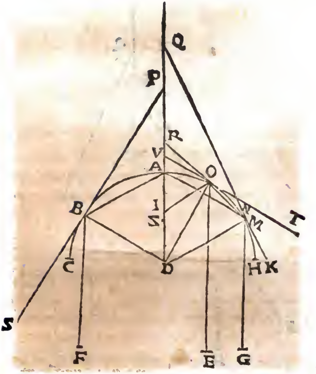
De foco Speculi ſphærici concaui.

PROPOSITIO XXXVII.

Si ſit ſemicircumferentia circuli, CAH, ſuper centro, D, biſariam ſecta in, A, per radium, DA, indefinitè productũ verſus, A; ducaturque, AN, latus exagoni, &, AB, ſumatur æqualis arcui, AN, ac reuoluatur peripharia, CAH, circa axem, AD, vt fiat, CAH, ſuperficies ſphærica, & quicunque radij axi, AD, paralleli incidant in dictam ſuperficiem. Dico quod ſpeculum concauum, BAN, reflectet parallelos axi procedentes ab, A, verſus, N, B, in puncta ipſius, AZ, (quæ ſit ½ ipſius, AD,) procedendo à, Z, verſus, A. At ſpeculum concauum, ſeù faſcia, CB, NH, reflectet parallelos axi procedentes à, B, N, in, C, H, in puncta eius, quæ eſt in directum ipſi, AD, ab, A, vltra ipſum, A, in infinitum procedendo.

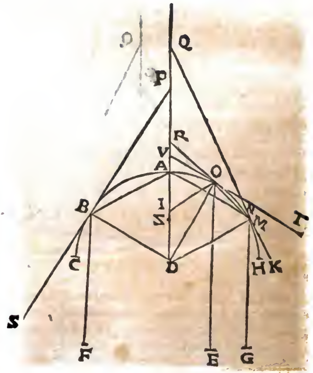
Sint ergo tres radij ipſi, AD, paralleli, EO, FB, GM, ipſorumque, EO, GM, reflexæ, OI, MR, & iungantur, DO, DB, DM, BA, ducanturque tangentes in, O, B, M, occurẽtes ipſi, DA, productæ in, V, P, Q, nempè, VOT, PBS, QMK. Quoniam ergo, EO, OI, ſunt incidens, & reflexa, iuxta legem Opticorum efficiunt cum, VT, angulos æquales; ſed etiam, DOV, DOT, recti, ſunt æquales. Ergo reliqui, DOE, DOI, & ſubindè, ODI, DOI, erunt inter ſe æquales; vnde, OI, erit ęqualis, ID. Similiter quia, EOT, VOI, ſunt æquales, etiam interior, OVI, parallelarum, EO, DA,

erit



erit æqualis ipſi, VOI, vnde &, IO, erit ęqualis, IV. Quapropter, VD, erit bifariam ſecta in, I. Ergo, I, cadet inter, Z, A, non enim cadet inter periphæriam, AO, & tangentem, VO. Et quia tangentes, quò magis punctum contactus recedet ab, A, remotius ab ipſo, A, occurrunt productę, DA, vt facilè probari poteſt: ideò punctum bifariæ ſectionis, vt, I, ſemper magis, ac magis appropinquabit ipſi, A, non tamē vllus perueniet ad, A, niſi, FB, ac quæcunque parallela axi incidens in puncta periphęriæ circuli axi, AB, erecti, cuius diameter eſt, BN, vt nunc probabitur. 16.3.Ele.

Dico igitur, BA, eſſe reflexam ipſius, FB. Cum enim BA, ſit latus exagoni, æquabitur ipſi, AD, vndè angulus, ADB,



AD , & ſubinde illi coalternus, FBD, æquabitur ipſi, D BA. Cum ergo totus, DBS, toti, DBP, ſit æqualis, quia ſunt recti, & pars, FBD, parti, DBA; reliquus angulus, FBS, æquabitur reliquo, ABP. Quare, BA, erit reflexa ipſius, FB. Idem verò de cæteris ipſi, FB, ſimilibus probabitur. Ex quo conſtat procedendo ab, A, verſus, B, N, puncta reflexionum procedere à, Z, verſus, A.

Deniq; angulus, GMK, æquabitur ipſi, RMQ, ſed, G MK, exterior æquatur interiori, RQM, parallelarum, G M, DQ; ergo, RMQ, æquabitur ipſi, RQM, & ſubindè, RM, æquabitur ipſi, RQ. Quia verò anguli recti, DMQ, DMK, ſunt æquales, vt & ipſi, GMK, RMQ, reliqui, G MD,

Digitized by Google

MD, DMR, erunt pariter æquales; ſed, GMD, æquatur ipſi, MDR. Ergo, MDR, DMR, erunt æquales, vnde & ipſæ, MR, RD, æquales erunt. Sed, MR, oſtenſa fuit æqualis ipſi, RQ. Ergo, DQ, bifariam ſecatur in, R. Sed &, PD, bifariam ſecatur in, A, cum enim anguli, FBS, ABP, ſeù, APB, ABP, ſit æquales, etiam, AB, AP, erunt æquales, &, BA, æquatur ipſi, AD, quare &, PA, æquabitur ipſi, AD. Cum ergo, QD, ſit maior, DP, etiam dimidia, RD, maior erit dimidia, AD. Quare punctum, R, erit ſupra, A. Idem de cæteris probabitur, & incidentes in, HN, CB, faſciam remotius à, BN, reflecti in puncta ipſius, AQ, ab, A, remotiora. Conſtat ergo propoſitum.

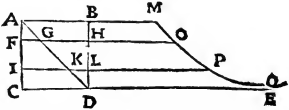
SCHOLIVM.

Propriè igitur non datur focus pro ſpeculo ſphærico, BAN, cum reflexio fiat in tota, AZ: verum ſi ſumpſerimus ſpeculum circa, A, cuius arcus ſit paucorum graduum, reflexio à toto ſpeculo fiet ferè circa Z, medium radij, DA. Similiter ſi arcus faſciæ, decerptæ ex, BC, NH, propè, BN, fuerit paucorum graduum, deſeruiet pro illius foco punctum, A, cui proximè plures radij à dicta faſcia reflectentur, cum reliqui à maiori faſcia reflexi, vt à tota, BC, NH, abeant in infinitum verſus, Q. Comburet ergo ſpeculum circa, Z, & faſcia circa, A, quod & experientia demonſtrat.

De ſolido infinitè longo æquali finito.

PROPOSITIO XXXVIII.

Solidum infinitè longum æquale finito per Indiuiſibilia facilè exhibere.



SIt parallelogrammum, ACDB, eius diameter, AD, in qua ſumptis quotcunq; punctis, G, K, & ductis per ea parallelis ipſi, AB, CD, nempè, FGH, IKL, fiat, GH, ad, HF, vt, HF, ad, HO, in directum ipſi, HF. Similiter vt, KL, ad, LI, ita fiat, LI, ad, LP, ipſi, LI, in directum, & ſic de cæteris, ſitq; BM, æqualis, & in directum ipſi, BA, ac per puncta, M, O, P, &c. ducatur curua, quæ cum, CD, indefinitè producta nunquam conueniet, ſi enim poſſibile eſt conuenire, vt in, Q, erit vt punctum, D, ad, DC, ita, DC, ad lineam finitam, quod eſt abſurdum, erit ergo, C E, aſymptotus, rectangulaque, A BM, GHO, KLP, æquabuntur per ordinem quadratis, A
17.6. Elē. B, FH, IL. Si ergo parallelogrammum, CB, cum triangulo, ABD, eleuetur vt, CB, cum, CB, conſtituar paralleleppipedum, &, ABD, cum, BDQM, ſolidum, quod erit infinitè longum, nempè verſus, Q; erit præfatum paralleppipedum huic ſolido infinitè longo æquale, nam ſicuti exempli gratia rectangulum, GHO,

GHO, quod eſt vnum ex omnibus planis ſolidi ſub, ABD, BDQM, æquatur quadrato, FH, quod eſt vnum ex omnibus planis paralleleppipedi ſub, C B, &, CB, ita omnia plana æquantur omnibus planis, at conſequenter ſolidum ſub, ABD, BMQD, quod eſt infinitè longum, æquatur paralleleppipedo ſub, CB, &, CB, finitæ magnitudinis. Inuentum ergo eſt, quod opus erat. 17. 6. Elé. 3. Exer. 1.

S C H O L I V M.

SI vice diametri, A D, ducantur quæcunque diagonales ab, A, ad, D. orientur infinita ſolida infinitè longa, ſingula paralleleppipedo ſub, C B, & , CB, æqualia, quod eodem modo patefiet.

De Hydracontiſterio, hoc eſt Vaſe aquarum eiaculatorio.

P R O P O S I T I O. XXXIX.

Prædictum Hydracontiſterium conſtruere.

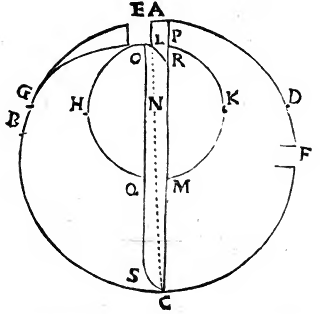
CVm incidiſſem in illam machinam Hydraulicam, quæ extrahit, & proijcit aquas meritò duarum rotularum, quarum dentes itá ſibi adhærcſcunt, vt dùm mouentur, vel ipſi aeri tranſitum interdicant, & includuntur Vaſe ouali, vt pluribus notum eſt, cuius neſcio quis fuerit inuentor: artificium ſummè admiratus ſum. Sed viſa eſt hæc machina maximam ſubire imperfectionem, ex eo quod confrica-

ti dentes, quàm citò conterantur, deturque tranſitus, & aeri, & aquæ, vnde inutilis fiat; præter ſummam difficultatem, quæ videbatur cõtingere poſſe in ipſius conſtructione. Quapropter mente cogitans, an id aliter fieri poſſet ſubuenit forma, quam infra deſcribimus, quæ eſt, ni fallor, ad conſtruendum facilior, & confricatione potius perficitur, quàm vitietur; præterquam maxima violentia proijcit aquas, vt propterea ipſum Vas Hydracontiſterium, ſeù aquarum eiaculatorium appellauerim.

Hoc ergo Vas debet fieri ex materia duriſsima, & eſt capſula rotunda foris, & intus, licet intus non perfectè, vt mox patebit. Intrà datum Vas duo ſunt fruſta, quorum vnum eſt Tympanum, ſeù Cylindrus Vaſe ità incluſus, vt ſit fundo perpendicularis, excentricus, prominens extra operculum Vaſis, qui habet fixuram per axem æquali ductu, & latitudine in ipſo inciſam à ſuperficie interiori fundi vſque ad interiorem operculi. Iuxta latitudinem fixuræ debet fieri Tabella, eiuſdemque altitudinis, quæ per ipſam fixuram, dum Tympanum Manubrio conuertitur, ſuſque, deque continuò reciprocetur, abradens ſuperficiem interiorem Vaſis, fundũ, & operculum. Hinc enim eueniet, vt per quoddam foramen attracta aqua illa constricta in anguſtum locum egrediatur per aliud foramen, ſi modò Vas ſit vndiq; clauſum, ne aer intùs penetrare poſſit. Sed hæc clariùs ex ſchemate fundi eiuſdem Vaſis puto intelligentur, quod nunc exhibemus in hac prima figura.

Sit ergo, ABCD, peripheria interior fundi prædicti Vaſis, & in ea diameter, CLA, accepta autem circino, CL, quę relinquat, LA, paruæ quantitatis, prout nobis placebit, inueniatur, BD, perpendicularis ipſi, AC, & ęqualis, LC, quibus concurrentibus in, N, centro, N, interuallo, NL, deſcribatur circulus, LHMK, qui quo minus excentricus erit, & maior, eo minor erit labor in operando. Similiter à puncto, B, vel ipſi vt cunque proximo vt, G, ducatur flexuoſa linea, vt, GL, quę poterit eſſe peripheria circuli cauitatis, quam artifex meliorem iudicarit. Vlterius ductis, LQ, PM, parallelis, ac centrum intercipientibus, ab eoque ęqualiter diſtantibus fiat, LRCSL, quæ repræſentabit formam.

Ta-

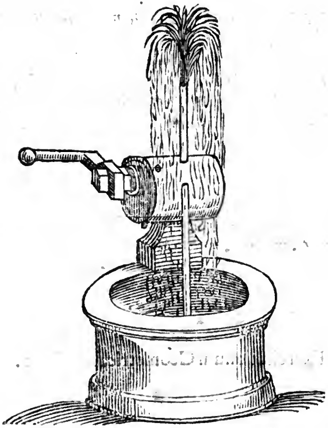


Tabellæ tranſeuntis per fixuram, LQMP, Tympani, I HM K, quod voluatur in circulo, LHMK, excauato intrà fundum. Linea, G L, oſtendit ſuperficiem Vaſis, ſecundum quam deuiat à perfecta rotunditate: ALP, eſt locus diaphragmate claudendus, nè aqua in parte, CGO, conſtituta, & compreſſa poſſit tranſire ad partes, D, ſed cogatur egredi per foramen, vt, OE. Sic igitur conſtituto, AC, vt ſtet perpendicularis Horizonti, facto foramine tractorio in, F, circa medium ſemicirculi, AFC, ſi Manubrio voluatur Tympanum, LHMK. à, C, in, B, (vt ſemper ſupponimus fieri motum) Tabella, LC, abradet peripheriam, & ſuperficiem interiorem vaſis incedens ſecundum ſemitam, CBGL, conſtringenſque aerem, qui erit in parte, CBGOQ, egredi per foramen, E. Vnde opportebit ſuccedere aerem, & deinde aquam per foramen, F, ipſamque ſimili ratione conſtringi à Tabel-

la, LC, dum mouetur verſus, B, ita vt idcircò velociſſimè, ac violentiſſimè per foramen, E, egredietur aqua. Et quia Tabella, ſi conteratur in, SC, ſemper magis adhæreſcet ſuperficiei Vaſis interioris, quam abradit; Ideò dixi in vſu hanc machinam perfectiorem fieri, licet nec ipſa careant ſuis difficultatibus.

Non in longiorem ſermonem hanc difundimus doctrinam, quia peritus artifex, quæ deficiunt ſua induſtria ſupplere poterit, tàm circa diaphragma, ALP, quā ſuperficiem, GL, & cætera, quæ ſpectant, ad ipſam machinam, exquiſitè laborandam. Hoc autem ſolùm moneo conſiderandum eſſe, Tympanum egredi ex operculo, & ideò in egreſſu poſſe collum fieri in ipſo operculo, & in parte exteriori, vt circa ipſum collum circumduci poſſit corium filo conſtringens & collum, & partem Tympani extantem extrà Vas, ne detur aeri ingreſſus.

Porrò ipſam machinam actu operantem in ſecunda figura videre potes, quàm ni ſatis explicaui ęqui, bonique conſulas, cum nouo impediar morbo quo & plura alia cogor hic prętermittere typographo inſtante, & ad finem impreſſionis properante.



SCHO.

Digitized by Google

SCHOLIVM.

Sed & tempus eſt, vt ab his Exercitationibus feriemur, Benigne lector, nè vltrà modum prorogatus athleticus hic labor ex vtili, qualem eſſe cupio, menti noxius euadat. In his plura menda, plures errores inuenies, tùm ex ineuitabili hoc defectu Typographiæ, tùm ex mei imbecillitate, & præcipuè in Exercitatione Quinta, & Sexta, quo enim tempore imprimebantur earum correctioni incumbere non potui. Tabellam errorum non trado, ſed eos tuo iudicio duxi relinquendos, cum aliquali adhibita diligentia facilè dignoſci poſſint. Denique ſi quis vnquam ex his meis lucubratiunculis aliquid vtilitatis ſibi comparauerit, ipſum rogabo, vt Deo Optimo Maximo mecum gratias referre velit, qui inter vitæ meæ tot ærumnas, nedum hæc meditari, ſed & aliqua ratione doctrinali, qualiſcunque ſit, ea diſponere ſua benignitate conceſſerit.

Vittorio Emanuele Biblioteca in Roma

Exercitationum Geometricarum Finis.

Digitized by Google

Facultas Reuerendiſs. P. Generalis,

NOs F. Gregorius Ferrarius à Cremona Congregationis Ieſuatorum S. Hieronymi Generalis, Opus cui titulus eſt, *Exercitationes Geometricæ*, à noſtro in Chriſto Filio Adm. R. P. F. Bonauentura Caualerio Priore Maſcarellæ, Mathematicarum in almo Bononienſi Archigymnaſio primario Profeſſore, & Congregationis noſtræ Sacerdote elaboratum, cum nobis conſtet nihil contra fidem, aut bonos mores continere, vt publici Iuris effici poſſit, ſeruatis ſeruandis, facultatem concedimus.

Dat. Bonon. ex Conuentu noſtræ Reſidentiæ SS. Hieronymi, & Euſtachij. Die 15. Menſis Auguſti. Anni 1646.

DE ſex hiſce Geometricis Exercitationibus Doctiſſimi, & Eruditiſſimi Viri in omnibus Mathematicis Admodum Reuer. Patris Bonauenturæ Caualerij ego infraſcriptus Reuiſor deputatus ab Eminentiſs. D. Cardinali Ludouiſio Archiepiſcopo, hoc mihi dicendum ſuppetit eas eſſe omni admiratione, & laude digniſſimas, quæ ingens non modo Auctori vt reliqua eius opera, ſed etiam Archigymnaſio Bononienſi decus ſint allaturæ, quibus etiam typis comiſſis, plurimum vtilitatis vniuerſæ literariæ Reipublicę acceſſurum eſſe exiſtimo.

Ouidius Montalbanus Philoſ. & Med. Doct. Colleg.
& Mathematicus in Archigym. Bonon. Ordinarius.

V. D. Alexius Ledeſma Cleric. Regul. S. Pauli; & in Metropol. Bonon. Pænitent pro eodem Eminentiſs.

Vidit F. Io. Riccius pro Reuerendiſſimo P. Inquiſit. Bonon. Librum, cui titulus eſt. *Exercitationes Geometricæ*, ab eximio Viro Admod. R. P. F. Bonauentura Caualerio, in Archigymnaſio Bononienſi Mathematicarum Profeſſore, opus præceptoris diſcipulus, & tanquam æterna memoria vt prælo committatur dignum cenſet.

Imprimatur.

F. Ludouicus Maria Calchus Magiſter, & Vicarius Generalis Sanctl Offitij Bononiæ.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google